一类剩余格上的三I算法*)

马盈仓[1,2]　何华灿[1]
(西北工业大学计算机科学与工程系　西安710072)[1]　(西安工程科技学院理学院　西安710048)[2]

摘　要　对三I算法的应用范围进行了扩充，得出一类剩余格上的三I算法，给出其上三I算法P-还原的充分条件，并给出泛逻辑学在$k=0.5$且相同的h下，基于泛蕴涵的三I算法。

关键词　三I算法，剩余格，伴随

Triple-I Algorithm on a Kind of Residuated Lattice

MA Ying-Cang[1,2]　HE Hua-Can[1]
(Department of Computer Science & Engineering, Northwestern Polytechnic University, Xi' an 710072)[1]
(College of science, Xi' an Univ. of Eng. Sci. and Tech., Xi' an, 710048)[2]

Abstract　Expand the using scope of triple-I algorithm, triple-I algorithm on a kind of residuated lattice is given. The sufficient conditions for the triple-I algorithm P-reductor are given. And the triple-I algorithm based on universal implication is given under $k=0.5$ and same h.

Keywords　Triple-I algorithm, Residuated lattice, Adjoint

近年来，模糊控制方法在诸多方面取得很大的成功，而模糊控制的理论基础是模糊推理。因此，研究模糊推理方法就显得尤为重要。传统的模糊推理方法为Zadeh于1973年提出的CRI方法(Compositional Rule of Inference)[1]，它已取得广泛的应用，但其缺乏严格的数学基础。之后，我国著名教授王国俊于1997年提出的模糊推理的三I(三蕴涵)方法[2]，则兼顾实用性与数学的合理性，使模糊推理建立在严格的数学基础之上。并且三I方法优于传统的CRI方法。因此，基于三I方法的模糊推理更为有效和严密。本文就是借助于三I方法，在一类剩余格上讨论模糊推理，给出其相应的推理算法。

1　定义及引理

定义1[3]　设L是偏序集，L上的二元运算$\otimes$与$\to$叫做互为伴随，若以下条件成立：

1. $\otimes: L\times L\to L$是单调递增的；
2. $\to: L\times L\to L$是关于第一变量不增的，关于第二变量是不减的；
3. $a\otimes b\leqslant c\Leftrightarrow a\leqslant b\to c, a,b,c\in L$。

这时$(\otimes,\to)$叫做L上的伴随对。其中$\Leftrightarrow$表示“当且仅当”。

引理1[3]　设$(\otimes,\to)$是偏序集L上的伴随对，则$\forall a,b\in L$有：(1)$a\leqslant(b\to(a\otimes b))$，(2)$(a\to b)\otimes a\leqslant b$。

定义2[3]　有界格L叫剩余格，若：

1. L有伴随对$(\otimes,\to)$；
2. $\langle L,\otimes,1\rangle$是带单位元1的交换半群，这里1是$L$的最大元。这时$L$常记作$\langle L,\otimes,\to\rangle$。

引理2[3]　设$\langle L,\otimes,\to\rangle$是剩余格。$\vee$表示取大，$\wedge$表示取小，$\forall a,b,c,x_i\in L$则：

1. $a\otimes 1=a, a\otimes b=b\otimes a$；
2. $a=1\to a, a\leqslant b\Leftrightarrow a\to b=1, (a\otimes b)\to c=(a\to(b\to c))$；
3. $((\bigvee_i x_i)\to a)=\bigwedge_i(x_i\to a)$；
4. $a\otimes b\leqslant a\wedge b$。

例1　设$L=[0,1]$，序关系为通常意义下的小于等于“$\leqslant$”。设$a\to b$由R_0算子$R_0(a,b)$定义，即：

$$a\to R_0 b=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant b\\ (1-a)\vee b, & \text{当 } a>b\end{cases}$$

可得其相应的伴随算子为：

$$a\otimes R_0 b=\begin{cases}0, & \text{当 } a+b\leqslant 1\\ a\wedge b, & \text{当 } a+b>1\end{cases}$$

称其为R_0伴随对。易知$\langle L,\otimes R_0,\to R_0\rangle$构成剩余格。

定义3[4]　设$T(x,y)$是$[0,1]^2\to[0,1]$的二元运算，$x,y,z\in[0,1]$，若满足：

1. $T(0,y)=0, T(1,y)=y$；
2. $T(x,y)$关于x,y单调递增；
3. $T(x,y)=T(y,x)$；
4. $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$。

则称$T(x,y)$为T范数。

例2　设$L=[0,1]$，序关系为通常意义下的小于等于“$\leqslant$”。设$a\otimes_T b$由T范数$T(x,y)$来定义。则其对应的伴随算子为：

$(a\to_T b)=sup\{x\in L\mid x\otimes_T a\leqslant b\}, a,b\in L$。

则$\langle L,\otimes_T,\to_T\rangle$是剩余格。

例3　设$L=[0,1]$，序关系为通常意义下的小于等于“$\leqslant$”，易知其为完备格。在其上定义元素a的补元为$1-a$，记为a'，并且设L为剩余格，其伴随对为$(\otimes,\to)$，则$\langle L=[0,1],\leqslant,\otimes,\to\rangle$为一类特殊的剩余格。可以看出例1、例2都是例3的特例。本文就是讨论例3给出的剩余格，不妨称其为赋值剩余格。并简记为：$\langle L,\otimes,\to\rangle$或者$L$。

*)基金项目：国家自然科学基金资助项目(批准号：60273087)。**马盈仓**　讲师，博士生，主要研究方向为代数学、泛逻辑学。**何华灿**　教授，博士生导师，主要研究领域为人工智能及应用、泛逻辑学。

2 L 上的模糊推理算法

在模糊推理的研究中，最基本的模糊推理形式为基本 FMP(模糊取式)。其描述为：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \to B \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B^* \end{array}$$

这里 $A, A^* \in \mathscr{F}(X) \subseteq L, B, B^* \in \mathscr{F}(Y) \subseteq L$。三 I 方法的基本思想为：要所求 B^* 使得

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \quad (1)$$

取得最大值的最小模糊集。下面就给出 L 上基于三 I 方法的模糊推理算法。

定理1 设 L 为例3给出的赋值剩余格，$(\otimes, \to)$ 为其上的伴随对。取 $\to$ 作为蕴涵算子。对基本 FMP 进行求解，则基于 $\to$ 的 L 上的三 I 算法为：

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}\{A^*(x) \otimes (A(x) \to B(y))\}, y \in Y \quad (2)$$

证明：首先证明对 X 中的任一固定点 a 和任一 $y \in Y$，由(2)式所确定的 B^* 满足：

$$(A^*(a) \to B^*(y)) \geqslant (A(a) \to B(y)) \quad (3)$$

由引理1，$\forall\ a, b \in L, a \leqslant b \to (a \otimes b)$，由引理2知，$a \otimes b = b \otimes a$，所以有：$a \leqslant b \to (b \otimes a)$，即：

$$A(a) \to B(y) \leqslant (A^*(a) \to A^*(x) \otimes (A(a) \to B(y)))$$

从而(3)式成立。由引理2知，B^* 可使(1)式取最大值1。从而(2)式所得的 B^* 使得(1)式的值最大。

其次证明 B^* 是使得(1)式值最大的最小模糊集，即：B^* 不可能再小。给 B^* 减去一个很小的正数 ε。如果存在 $b \in X$，使得：

$$(A(b) \to B(y)) > (A^*(b) \to (B^*(y) - \varepsilon)) \quad (4)$$

成立。此时(1)值不为1，则可以说明 B^* 最小。下面证明它。

设 $b \in X$，且使得 $x = b$ 时，$B^*(y) - \varepsilon < A^*(b) \otimes (A(b) \to B(y))$。这样的 b 存在。由定义1，$\forall\ a, b, c \in L, a \otimes b \leqslant c \Leftrightarrow a \leqslant b \to c$，即：$a \otimes b > c \Leftrightarrow a > b \to c$，则：$(A(b) \to B(y)) > (A^*(b) \to (B^*(y) - \varepsilon)) \Leftrightarrow (A(b) \to B(y)) \otimes A^*(b) > (B^*(y) - \varepsilon)$。从而(4)式成立。命题得证。

定理2 L 上的三 I 算法是 P-还原算法，这里性质 P 指 A 为正规模糊集，即有 $a \in X$，使得 $A(a) = 1$。

证明：即证明对基本 FMP，当 $A^*(x) = A(x)$ 时，以定理1所得的 $B^*(y)$ 要等于 $B(y)$。由引理1知，$a \otimes (a \to b) \leqslant b$，所以，$\forall\ x \in X, A(x) \otimes (A(x) \to B(y)) \leqslant B(y)$，所以，由(2)式所求的 B^* 最大为 $B(y)$。由于 A 为正规模糊集，存在 $a \in X$，使得 $A(a) = 1$。由引理2知，$A(a) \otimes (A(a) \to B(y)) = B(y)$。即 $B^*(y) = B(y)$。命题得证。

由此可以看出基于 R_0 的三 I 算法为 L 上的一种特例。下面研究 L 上较基本 FMP 更为复杂的如下的问题的求解方法：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \to B \\ & \cdots\cdots \\ & A_n \to B_n \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B^* \end{array}$$

称其为推广的 FMP。对此问题有两种方法。一是先推理后聚合的 FITA 方法，另一个是先聚合后推理的 FATI 方法。

FITA 方法 设 $1 \leqslant i \leqslant n$，由 L 上的三 I 方法先求解以下式子：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_i \to B_i \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B_i^* \end{array}$$

则推广的 FMP 所求的 $B^* = \vee_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i^*$。

FATI 方法 设 $I(x, y) = \vee_{1 \leqslant i \leqslant n}(A_i(x \to B_i(y))$，令 B^* 为 $\mathscr{F}(Y)$ 中使得

$$I(x, y) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \quad (5)$$

恒取值1的最小模糊集。

定理3 L 上 FITA 方法与 FATI 方法等价。

证明：设 B^* 为按照 FITA 方法所求得，则它使 $(A_i(x) \to B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))$ 值恒为1，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$。则有 $\wedge_{1 \leqslant i \leqslant n}[(A_i(x) \to B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))]$ 的值恒为1。由引理2，

$$\wedge_{1 \leqslant i \leqslant n}[(A_i(x) \to B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))] = [\vee_{1 \leqslant i \leqslant n}(A_i(x) \to B_i(y))] \to (A^*(x) \to B^*(y)) \quad (6)$$

所以，所求的 B^* 使得(5)式的值恒为1。

反之，设 B^* 为按照 FATI 方法所求得，即 B^* 使得(5)式的值恒为1。则由(6)式知，$\wedge_{1 \leqslant i \leqslant n}[(A_i\{x\} \to B_i(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))]$ 的值恒为1即，$(A_i(x) \to B_i(y) \to (A^*(x) \to B^*(y))$ 值恒为1。

特别地对 $\mathscr{F}(Y)$ 中满足上述一方条件的最小模糊集也有同样的关系，所以 FITA 与 FATI 方法等价。即二者求出的是同一个模糊集 B^*。命题得证。

作为应用，我们看一下模糊条件语句的推理规则，其基本形式如下：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \to B \\ & A' \to C \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B^* \end{array}$$

应用 FATI 方法，容易得到如下的定理：

定理4 L 上关于模糊条件语句的三 I 算法为：

$$B^*(y) = sup_{x \in X}\{A^*(x) \otimes (I(x, y))\}$$

其中，$I(x, y) = \vee\{A(x) \to B(y), (1 - A(x)) \to C(y)\}$。

定理4所得的结果与传统的模糊条件语句推理规则极为类似，但它以三 I 算法为基础，从而使得所找到的 B^* 更优。

3 L 上基于泛蕴涵的三 I 算法

伴随对的概念在一定程度上给人们说明，取相对应的算子在推理中的意义，而泛逻辑学[5]的提出，也是基于此点。其实，在一定意义上说，伴随对反映了泛逻辑学的原理，它们在某些方面是相通的。但是泛逻辑学更为语义化和实用化，因为广义相关性系数 h 与自相关系数 k 的引入使得纷繁复杂的现实变得可以计算，而且通过运算簇使得运算更为方便和合理。本文仅对泛逻辑学中取 $k = 0.5$，h 恒定的情形讨论其泛蕴涵下的三 I 算法。

泛逻辑学中的泛与($\wedge h$)运算簇是连续的 T 范数。泛蕴涵($\to_h$)为 T 蕴涵，可知在相同的 h 下，它们互为伴随对。因此它满足例2中的条件。在相同的 h 下，也为赋值剩余格的一种特例。因此，由定理1，我们有：

定理5 在 $k = 0.5$ 且相同 h 下，对基本 FMP 进行求解，则基于泛蕴涵($\to h$)的三 I 算法为：

$$B^*(y) = sup_{x \in X}\{A^*(x) \wedge_h (A(x) \to_h B(y))\}, y \in Y$$

注：此处仅给出$k=0.5$且相同h下的泛逻辑学的推理规则，其实泛逻辑学中k,h都可变，而且k,h本身代表命题间的相关性，寻求基于泛逻辑学的更一般的推理规则也是一个很有意义的研究。

在第2节中，我们讨论了基本FMP与推广的FMP的求解。FMP更为一般的情形如下：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_{11},\cdots,A_{1m}\to B_1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & A_{n1},\cdots,A_{nm}\to B_n \\ \text{且给定} & A_1^*,\cdots,A_m^* \\ \hline \text{求} & \qquad B^* \end{array}$$

当$m=n=1$时即为基本FMP情形，$m=1$时即为推广的FMP情形，$n=1$时，一般的FMP变为如下的形式：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_1,\cdots,A_m\to B \\ \text{且给定} & A_1^*,\cdots,A_m^* \\ \hline \text{求} & \qquad B^* \end{array}$$

只要给出上述$n=1$时的求解算法，结合2中的基本FMP与推广的FMP情形，我们就可以得到一般FMP的求解算法。下面我们应用泛逻辑学给出$n=1$时情形下的求解算法。

解决上述推理的一般方法为：分别用$X_1,\cdots,X_m$与Y上的模糊集表示命题$A_1,\cdots,A_m$与B($A_1^*,\cdots,A_m^*$与B^*)，只要把$A_1,\cdots,A_m$与$A_1^*,\cdots,A_m^*$作叉积，并令$A=A_1\times\cdots\times X_m$，$A^*=A_1^*\times\cdots\times A_m^*$，则$A$与$A^*$都是$X=X_1\times\cdots\times X_m$上的模糊集，此时就可以转化为基本*FMP*情形，则可以用我们上面得出的结论来求。

现在需要说明的是，在传统的推理中，A与A^*在具体运算时都取算子$\wedge$，即取小运算，这样显然是不合理的。因为从语义上来说，上述情形可以理解为在有$A_1,\cdots,A_m$的条件下，可得到B，好像是需要给它们取合取(传统上即取$\wedge$)。但是，由泛逻辑学原理知道，多个命题的合取与其广义相关系数有关，只有两个命题的相关系数为1时，才可取小。由于命题间的相关系数有可能不同，因此，在相同的k值下，此时更为合理的解释为$A=A_1\wedge h_1\cdots\wedge_{h_{m-1}}A_m$，同样，$A^*=A_1^*\wedge h_1^*\cdots\wedge h_{m-1}^*A_m^*$。我们为了计算方便，取相同的$h$，即假定所有命题的相关性相同。基于此，结合前面的结论，得出一般FMP在$n=1$时基于泛蕴涵的三I算法如下：

定理6 在$k=0.5$且相同h下，一般FMP在$n=1$时基于泛蕴涵($\to h$)的三I算法为：

$$B^*(y)=sup(x_1,\cdots,x_m)\in X_1\times\cdots\times X_m\{\wedge_h(A_i^*)\wedge h(\wedge h(A_i)\to_h B(y))\},y\in Y$$

其中：$\wedge_h(A_i^*)=A_1^*(x_1)\wedge_h\cdots\wedge_h A_m^*(x_m)$，$\wedge h(A_i)=A_1(x_1)\wedge h\cdots\wedge_h A_m(x_m)$。

作为应用，下面给出基本模糊三段论(FHS)基于泛蕴涵的三I算法。基本FHS的推理形式如下：

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A\to B \\ & B^*\to C \\ \hline \text{求} & A\to C^* \end{array}$$

其中，A为X上的模糊集，B与B^*为Y上的模糊集，C与C^*为Z上的模糊集。

定理7 在$k=0.5$且相同h下，基本FHS的情形基于泛蕴涵($\to_h$)的三I算法为：

$$A(x)\to_h C^*(z)=sup_y\in Y\{(A(x)\to_h B(y))\wedge_h(B^*(y)\to_h C(z))\},x\in X,y\in Y$$

证明：由三I方法，及定理6，即求$A(x)\to_h C^*(z)$使得式

$$((A(x)\to_h B(y))\wedge_h(B^*(y)\to C(z)))\to_h(A(x)\to_h C^*(z)) \qquad (7)$$

值最大的最小模糊集。容易看出，对每一固定的$b\in Y$，对任意的$x\in X,z\in Z$，都有：$((A(x)\to_h B(b))\wedge_h(B*(b)\to C(z)))\leqslant(A(x)\to_h C^*(z))$，即定理所求得的$A(x)\to_h C^*(z)$使得式(7)取到1。其次证明它不可在小，假设所求的模糊集为$(A(x)\to_h C*(z))-\varepsilon$，其中$\varepsilon>0$。则存在$b\in Y$，使得$((A(x)\to_h B(b))\wedge_h(B*(b)\to C(z)))>(A(x)\to_h C*(z))-\varepsilon$。从而使(7)式值小于1，所以定理成立。

小结 本文就赋值剩余格上基于$\to$作为蕴涵算子的三I算法进行了刻画，可以看出它是基于R_0蕴涵算子的三I算法的推广。通过本文可以看出，对于以T范数作为模糊与算子的推理来说，应用其相对应的伴随将使模糊推理更为有效和合理，并且有严格的数学基础。从另一方面也说明传统模糊推理在选取模糊算子的局限性。并且所给的三I算法是P-还原的。对于泛逻辑学的推理我们仅就特殊情况进行了讨论。通过本文的讨论，将三I算法扩充到赋值剩余格上，使其应用范围得以提高。

参考文献

1 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transactionson Systems, Man and Cybernetics, 1973, 1: 28~44

2 Wang Guo jun. On the logic foundation of fuzzy reasoning, Lecture notes in fuzzy mathematics and computer science. Omaha: Creighton University, 1997, 4: 1~48

3 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社，2000

4 何华灿，王华，等. 泛逻辑学原理. 北京：科学出版社，2001

5 何华灿，刘永怀，何大庆. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学(E辑)，1996，26：72~78