织物模拟中的自适应网格剖分研究*)

刘 宁 高成英 罗笑南
(中山大学计算机应用研究所 广州510275)

摘 要 本文提出一种在织物模拟中的动态网格剖分方法,针对传统模拟算法中因网格剖分固定和曲面整体网格均匀剖分造成模拟误差与计算耗费,分别从织物物理和几何角度出发,提出在动态模拟过程中的自适应的网格剖分方法。利用模拟过程中曲面片局部形变信息,对网格进行动态剖分与合并,有效提高了模拟效率。经实际应用表明:该算法具有模拟效率高、易于计算机实现等优点,特别在对非均匀形变物体模拟中,该算法从模拟效率和精度均得到满意结果。

关键词 织物模拟,自适应,网格剖分

Cloth Simulation Based on Adaptive Meshing

LIU Ning GAO Ching-Ying LUO Xiao-Nan
(Computer Application Institute,ZhongShan University,Guangzhou 510275)

Abstract Most of numerical simulation methods regarding cloth draping are based on mechanical models. The representation of these models is common to be a uniform grid. The problem regarding the simulation run is to represent realistically the mechanical system surface and its associated motion which are strongly related to mesh discretization. This paper presents a new method based on adaptive meshing allowing the mechanical system to behave without any constraint related to a uniform mesh. Both the physical and geometrical properties of cloth are to be considered in the method. The method dynamically meshes and unites grid by analyzing the local deformation information of cloth surface in cloth simulation,and will effectively improve the simulation efficiency. And the practical application proves that the simulation is fairly high efficiency and realistically. The simulation efficiency and precision are both satisfying especially in non-uniform deformation object simulation.

Keywords Cloth simulation,Adaptive,Meshing

相对于刚体而言,柔体与周围环境或自身相互作用时,外形易发生较大形变,对其进行几何和机械属性描述较刚体复杂许多。自上世纪50年代,学者们已开始进行物体的仿真研究工作,但由于当时计算机条件所限,仿真模拟仅局限于刚体模拟。随着计算机硬件和计算机图形学算法的迅速发展,加之对柔体仿真模拟的迫切需求,近20多年来已吸引了众多学者对此展开深入研究。

织物是一种较为特殊的柔性物体,在计算机动画、游戏、三维虚拟服装等领域有着十分广泛的应用。上世纪80年代中期,以 J. Nisselson[1]为首的大批学者的研究工作使织物的仿真模拟得到迅速发展。Terzopoulos[2]等人是较早采用物理方法进行织物模拟的学者,他们运用连续弹性理论来模拟织物的形状和运动,成功模拟了柔性物体对外力的动力学响应。Breen[3]等人提出了基于织物机械属性的织物悬垂模拟技术,采用均匀网格来离散织物曲面,模拟了织物自由下落过程。为获得更真实模拟效果,Breen 等人在模型中引入了 Kawabata 系统,取得了较为真实的模拟效果。对50×50的粒子系统,采用 RS6000工作站,计算时间约为一星期。Provot[4]提出了基于均匀四边形网格的弹簧-质点模型。该方法对模拟小规模的简单织物非常有效,因计算简单,计算效率高,几乎达到实时效果。因而随后的许多有关织物模拟的研究工作,都是基于该模型。Baraff 和 Witkin[5]等人采用均匀三角形网格来剖分织物,通过引入隐式积分求解方程,计算速度得到了极大的提高。在这方面,国内的一些研究机构:浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室[6]、华中科大 CAD 国家重点实验室[7]、西北工业大学自动控制系[8]等也进行了很多有益研究。

上述模拟方法,无论是基于四边形网格还是三角形网格,均采用了均匀网格的剖分形式。采用粗糙网格模拟织物,因网格剖分较大,往往在大形变区域表面上会产生很多"皱纹",不能得到理想模拟效果。为了获得更精确的模拟效果,必须采用精细剖分的网格。但每个网格节点都相对于机械模型中的一个粒子,在合理的计算时间内求解如此一个大型系统十分困难,难以满足一些实时性应用的要求。针对于此,人们提出了自适应网格的剖分技术,即根据模拟过程中物体形变程度来动态进行网格剖分,这样使得在初始低网格剖分密度的情况下,高效获得精确计算机织物模拟效果成为可能(较好地解决了模拟精度和仿真速度间的矛盾)。近年来已有一些学者对此进行深入研究。Hutchinson[9]等人最先提出多网格方法来模拟织物动画。其主要思路是:在模拟的开始阶段,将织物离散为粗糙网格,当相邻网格间的夹角超过给定的阈值时,对其进一步加细。但在模拟过程中,机械系统不能很好地适应网格的拓扑结构,结果不太令人满意,且计算时间过长。Zhang[10]等人提出了一种基于多层次网格的模拟方法,曲面被离散为三角形网格。在开始阶段采用粗糙网格进行模拟,每当织物接近平衡状态时,就将当前网格加细:每个三角形都被细分成四个更小三角形,再计算加细后的网格使其逐渐接近平衡状态,如此循环。该方法属于整体网格动态均匀加细剖分的模拟方法,即使在一些不需要加细区域,也进行了剖分,整体效率较低。

*)本项目得到国家自然科学基金(60273063);广东省科技计划项目(A10204)资助。

不同于均匀网格剖分下的织物模拟，进行局部自适应网格模拟时，除了剖分网格的模拟约束条件外，由于网格中各个部分的剖分密度不同，为保证模拟效果真实连续和模拟过程顺利进行，需要考虑几何和物理两方面对剖分网格的约束条件：

1）为保证局部网格的多次剖分、合并可正常进行，网格几何拓扑结构不随网格剖分、合并而改变。

2）为保证织物模拟效果整体连续性，局部网格的剖分、合并操作不能改变网格的物理性质。

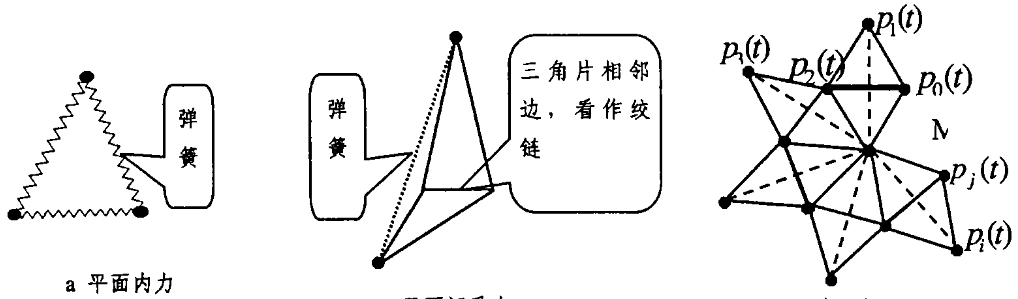
因此，从上述物理和几何约束条件出发，并在三角域的弹簧质点模型基础上，本文提出织物动态模拟过程中的自适应网格剖分算法。主要思路为：模拟过程中，算法根据网格面间几何形变情况，根据给定网格剖分标准和局部剖分的约束条件，进行自适应网格剖分和物理属性修正，结合弹簧质点模型和碰撞检测方法，对给定的时间步长 t，对织物状态进行模拟，经过反复叠代求解，最终达到稳定状态。

1　三角域下的弹簧-质点模型

弹簧-质点模型是广泛应用在柔性体模拟中的一种物理模型，它将柔性织物表示为有一定质量的质点集，质点间通过无质量弹簧相连，将质点间相互关系归结为弹簧作用，同时用每个质点的质量代表相应剖分单元格质量，形成弹簧质点网格模型对柔性体进行模拟。该模型利用质点间的弹簧来描述织物最基本的拉伸、剪切、弯曲三种机械属性，同时通过对弹簧弹性系数的调整可以对不同材质织物进行动态模拟。对每个质点而言，其运动状态取决于它所受外力和内力约束总和，即在剪切、弯曲、拉伸内力和重力、空气阻力、摩擦力和其它外力的综合作用下，质点表现为它所代表的小块单元运动轨迹。这样，通过对网格中每个质点进行计算，便可得出相应织物动态效果。

Provot 提出基于四边域的弹簧-质点模型，通过构造拉伸、剪切和弯曲弹簧来模拟织物。该模型具有物理结构简单、易于计算机存储与实现等优点。但实际应用中发现，四边网格构造较困难，在模拟过程中对其进行局部剖分调整极易产生不规则四边形，破坏网格整体几何和物理属性，导致模拟失败。因此，本文采用基于三角域的弹簧-质点模型对织物进行模拟。

首先对织物进行三角网格均匀剖分，在此基础上建立弹簧质点模型。其中用 $p_i(t)$ 表示网格中的质点 p_i 在 t 时刻的状态。每个质点所受内力可分为面内力和面间力两种类型，利用面内力来表示织物在三角面内受力情况，可利用三角面各边弹簧形变进行描述；面间力表示相邻三角片间弯曲情况，可以将公共边看作铰链，相邻三角片对应顶点间弹簧的形变来进行描述。



a 平面内力　　b 平面间受力　　c 三角网格剖分

图1　基于三角域的弹簧质点模型

质点所受内力为：

$$F_{int}(P_i(t)) = -\sum_{j=0}^{n_i} k_{i,j}\left(\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)} - \overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}' \frac{\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}}{|P_i(t)P_j(t)|}\right)$$

其中 n_i 是指与质点 i 直接或对应顶点相连的弹簧数量，$k_{i,j}$ 是相应连接弹簧的弹性系数，分为面内弹簧和面间弹簧弹性系数，$\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}$ 为弹簧向量表示，$\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}'$ 是弹簧原长。

质点所受外力主要为：重力、摩擦力、空气阻力、织物与环境间相互作用力等。

重　力：$G_i = m_i g$　（m 为质点的质量，g 为重力加速度）

空气阻力：$F_a = K_a v_y$　（K_a 为空气阻力系数，v_y 为质点运动速度矢量在 y 方向的分量）

与其它刚体间的动、静摩擦力：$\begin{cases} f_s = c_s F_n \\ f_k = c_k F_n \end{cases}$，（$c_s$ 和 c_k 分别代表静摩擦系数和动摩擦系数，F_n 为施加到织物模型上的法向压力）

质点所受外力为：$F_{external} = F_g + F_a + f_s + f_k$

当计算出 t 时刻质点 x_i 的受力 $F_i(t)$ 后，根据牛顿定律，采取数值积分方法可以求出质点 x_i 随时间 t 的状态变化。v_i^t 代表质点 x_i 在时间 t 时刻的速度 $v_i^t = \frac{dx_i}{dt}$，采用欧拉方法可得：

$$\begin{cases} v_i^{(t+\Delta t)} = V_i^t + F_i^t \dfrac{dt}{m} \\ x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^t + v_i^{(t+\Delta t)} dt \end{cases}$$

这样，我们可以依次求出质点网格中每个质点位置随时间变化的情况，进而求出织物整体模拟的动态效果。

2　自适应网格剖分

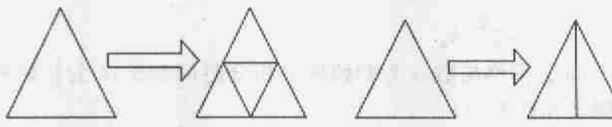
采用离散质点网格逼近连续织物，不可避免会产生模拟误差。采用粗糙网格模拟织物，模拟织物的真实感较差，但模拟速度快；采用精细网格剖分织物，获得真实感较为理想，但模拟速度十分缓慢。为了保留这两种剖分方式的优点，本文提出了一种动态自适应网格剖分算法。在模拟过程中，算法采用对三角网格相邻三角片的面法向量夹角 θ_{dist} 进行检测，来动态控制网格的尺寸。网格节点处的加细标准依赖于网格的几何属性。当节点处曲面曲率超过给定阈值时，进行网格加细剖分；反之，对剖分网格进行合并。为避免复杂计算，本文采用了在曲面和切平面间的偏移来逼近局部曲率。偏移量的计算采用了节点处的法向量，在节点处的法向量通过平均与其相连的所有三角形的法向量取得。

根据模拟误差精度 ε（最终模拟稳定条件），算法分别定义三角片间的最大和最小夹角 δ_{max}、δ_{min}。每步模拟完成后，对法向量夹角 θ_{dist} 进行检测，当在 δ_{max} 和 δ_{min} 之间时，认为相邻三

角片在合理形变范围内；夹角 θ_{dist} 大于 δ_{max} 时，表示该部分形变程度过大，现有三角剖分过粗，采取向前回退上步状态，进行加细剖分后重新利用数值积分方法进行模拟。通过状态回退、网格加密、数值积分模拟的机制，对于大形变区域进行加密剖分，将相邻网格面间法向量夹角控制在合理范围内，保证模拟精度；夹角 θ_{dist} 小于 δ_{min} 时，表示该部分形变程度过小，三角剖分过细，通过检测是否满足三角片合并边界条件来决定是否进行三角片合并操作，以减少不必要的计算耗费。为防止在三角网格剖分、合并过程中不规则三角片的出现，在剖分、合并的同时，需要采取相邻三角形1-4、1-2型剖分相结合的剖分方法，以保证被分割后三角片质量。同时，为更好表述动态剖分过程和模拟计算中数据结构方便，特引入多层次三角网格概念。初始三角网格 S^0 为第零层(S_j^0 为第零层三角网格中 j 块三角片)，相应三角片的顶点记为 $p_i^0(t)$，随着模拟过程中网格局部剖分的进行，三角片根据其剖分/合并的操作进行其网格层次调整，再按照网格层数由高到低采用不同时间步长和弹性系数进行模拟，最终达到织物自适应模拟的目的。

2.1 网格剖分规则

1)为保证网格在剖分前后性质保持不变，采用以下两种三角剖分方式对网格进行加细剖分；



a 1-4 型剖分　　b 1-2 型剖分

图2 网格两种剖分方式

2)每进行一次1-4剖分，新生成和相关三角片和顶点层数加2；

3)每进行一次1-2剖分，新生成和相关三角片和顶点层数加1；

4)每进行一次三角形合并，若合并前的三角形层数为奇数，合并后的三角形和顶点层数减一。若为偶数，相应三角形和顶点层数减二；

5)针对网格中每个点，可能同时隶属不同层次三角网格，此时，网格点层数以最高层数为准；

6)相邻三角形1-4剖分后的公共点，标记为加细剖分中心点。

这样，不同剖分密度网格分别属不同网格层次。进行网格剖分，网格层数增加。反之，进行网格合并，则网格层数降低。通过规定1-4和1-2相结合的剖分方法，可在有效进行局部网格剖分情况下，保证网格平衡，避免不规则三角形的出现。同时，多层次网格的引入，简化了多密度网格表示的数据结构，降低了动态模拟计算的程序实现难度。

2.2 三角网格动态剖分

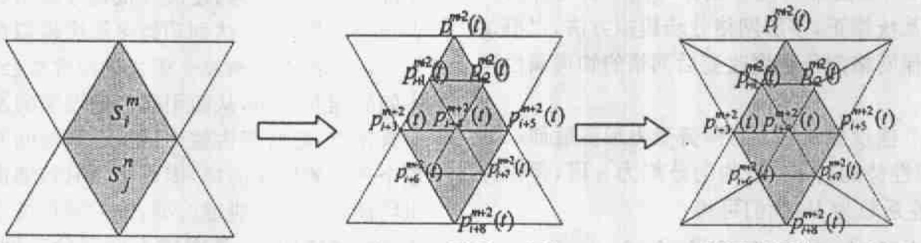
θ_{dist} 为网格中相邻三角片 S_i^m，S_j^n 间的夹角：

1)$\theta_{dist}>\delta_{max}$，且 $m=n$ 时：对进行1-4剖分，标记相应剖分中心点；

2)$\delta_{min}<\theta_{dist}<\delta_{max}$，且 $m-n=2$时，对 S_j^n 进行1-2剖分；

3)$\delta_{min}<\theta_{dist}<\delta_{max}$，且 $m-n=1$时，对 S_j^n 进行1-4剖分；

4)模拟中检测每个中心点周围四对三角形夹角满足 $\delta_{min}<\theta_{dist}<\delta_{max}$，将四对三角行进行合并。

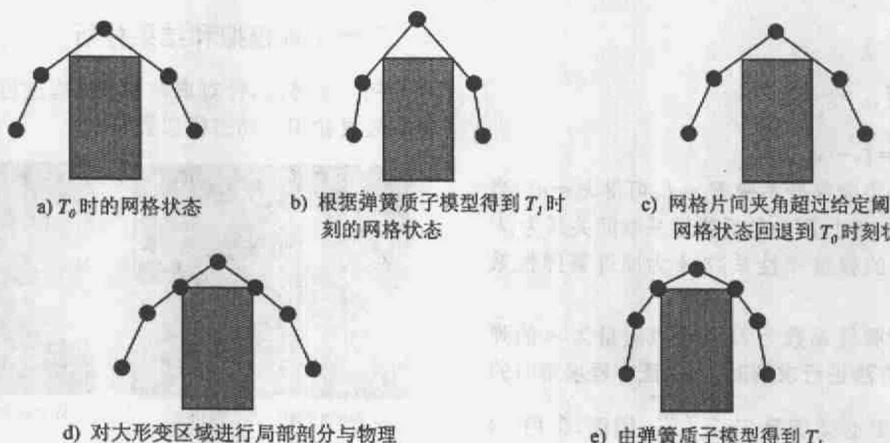


a) 当相邻三角片 s_i^m，s_j^n 夹角大于 δ_{max}

b) 对 s_i^m，s_j^n 进行 1-4 剖分，并标记 $p_{i+4}^{m+2}(t)$ 为中心点

c) 保证网格平衡，对相邻三角形进行 1-2 剖分

图3 三角网格动态剖分



a) T_0 时的网格状态

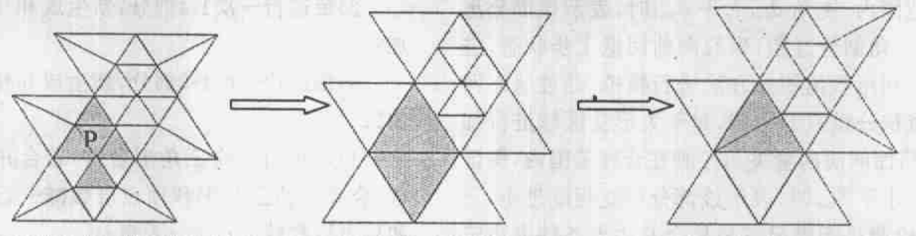
b) 根据弹簧质子模型得到 T_1 时刻的网格状态

c) 网格片间夹角超过给定阈值，网格状态回退到 T_0 时刻状态

d) 对大形变区域进行局部剖分与物理属性修正，网格其它部分保持不变

e) 由弹簧质子模型得到 T_1 时刻精确网格状态

图4 基于非均匀剖分下的织物模拟



a) 对于中心点 P 周围四对三角片夹角进行检测，若都满足条件4，则进行三角片合并　　b) 合并中心点 P 周围四对三角形　　c) 保证网格平衡，对于合并后的三角形进行调整

图5　三角网格动态合并

3　网格物理属性动态调整

在模拟过程中动态调整了网格密度，同时也改变了该弹簧质点模型的物理属性。为保证真实模拟，需对调整后的剖分网格物理属性进行调整，以确保该区域的性质不因剖分的调整而改变，由文[9]可知，为正常进行模拟，需要确保网格满足以下三个条件：

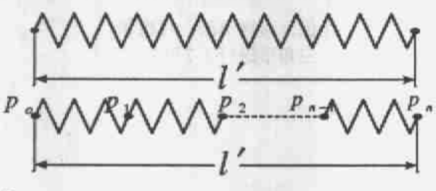
1)弹簧质点模型中所有的质点物理属性需要一致。确保模型中各个质点在相同外力下表现出物理属性。

2)质点模型中各部分质量不会因质点数目改变而改变。否则织物各个部分质量会随着质点数目而发生改变。

3)外力在织物中传播不能因质点网格疏密而速度发生改变。

在动态剖分过程中，算法新加入质点质量与原有质点质量相等，满足了模型中新旧质点性质相同(条件1)。然而，由于加密、合并过程中局部质点数目的改变影响了织物局部质量，(不能满足条件2和3)。算法采用改变积分时间步长与弹簧弹性系数的方法进行系统修正，多层网格分步模拟方法，以满足条件3。最终能够确保网格剖分密度改变后网格的物理属性不变。

弹性系数修正　假设原长为 l 的弹簧受力形变后伸长为 l'，弹性系数为 k，弹性势能为 E_1，被均匀分割为 n 段，弹性势能为 E_2，相应的弹性系数为 k'，我们可得：



$$E_1=\frac{1}{2}k(l-l')^2$$

$$E_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k'\left(\frac{l'-l}{n}\right)^2$$

其中 $P_i-P_{i-1}=l'/n, i=1,\cdots,n$。

由剖分前后弹弹性势能保持不变 $E_1=E_2$ 可得 $k'=nk$，当采用1-4和1-2剖分时($n=2$时)剖分前后弹性系数间关系为：$k'\approx 2k$(其中 k' 为剖分后的弹簧弹性系数，k 为原弹簧弹性系数)。

积分步长修正　对弹性系数为 K 和质点质量为 m 的弹簧网格，采用欧拉积分方法进行求解时，为保证方程求解时的稳定性，对于时间步长 T 必须满足 $T\leqslant\sqrt{\frac{m}{k}}$。因而，采用1-4和1-2剖分时，剖分前后积分时间步长必须满足：$T'\leqslant\sqrt{\frac{m}{2K}}=\frac{\sqrt{2}}{2}T$ (其中 T' 为剖分后时间步长，T 为剖分前时间步长)。

多层次网格下的动态剖分　采用多层次三角网格对织物进行模拟，初始网格设定为多层次网格中的第0层，根据织物种类设定质点质量 m 和弹簧网格的弹性系数 k 和初始条件(如：风力、重力等外力)，利用质点弹模型开始进行模拟。随着对初始网格剖分、合并进行，形成多层次网格模型。针对不同层次网格，根据式(1)，对积分步长和弹性系数作相应调整。

$$\begin{cases} t_n=\sqrt{2}\,t_0/2^{n+1} & (n\text{ 为偶数})\\ k^n=2^{\frac{n}{2}}k_0 & \\ t_{n-1}=\sqrt{2}\,t_0/2^n & (n\text{ 为奇数})\\ k^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}k_0 & \end{cases}\tag{1}$$

(n 为网格层数，t 为初始网格积分时间步长，k 为初始网格弹簧弹性系数)

在模拟过程中，从高层网格(小时间步长)到低层网格(大时间步长)进行迭代。在高层网格进行迭代，改变运动状态的同时，低层网格保持原有运动状态不变(加速度为零)。根据网格间积分步长关系，逐次降低积分网格层数，求解出相应网格点运动位移，最终达到动态多层次模拟目的。

碰撞检测与响应　织物模拟常常会涉及到织物与周围物体间的相互作用，从而引起碰撞现象的发生。而碰撞检测过程非常耗时，通常要占整个模拟计算时间的50%以上，它一直是整个系统的瓶颈问题，因而必须有效地提高碰撞检测的效率。织物模拟涉及的碰撞检测，分为两种类型：一是织物与周围物体之间的碰撞；二是织物不同部分之间的碰撞(常称为自碰撞)。对于前者，我们采取基于 AABB 层次包围盒[11]的碰撞检测算法；对于后者，我们采用 Volino P[12]的方案，利用几何规律，提高自检测效率。通过分别考虑两种碰撞，且采用有效的检测与响应技术，进一步提高了织物模拟的实时效果。

4　织物仿真模拟和结果分析

利用本算法，针对桌布下落过程进行了模拟，下面是对比模拟效果和相应动态模拟数据。

a) 初始剖分网格(347 个网格面)　　b) 自适应剖分效果(1653 网格面)

图6　自适应剖分桌布模拟

结论　本文提出了一种基于三角域弹簧质点模型的织物自适应网格剖分的模拟方法。根据模拟过程中三角网格间形

变信息，对网格进行自适应剖分与合并，减少传统模拟过程中因统一网格剖分密度而导致的大量计算耗费和模拟误差，经实践证明，该算法有效提高了模拟效率。

采用 VC++ 和 DirectX8.0，利用三维建模产生的标准数据文件作为初始网格，采用本文提出的算法实现了对织物的动态模拟，并以此建立了三维织物模拟系统。模拟数据显示，同以往方法相比，特别在对于非均匀变形模拟方面，算法得到满意效果。下一步工作的主要目标是结合动态剖分网格，针对模拟过程中的数值积分进行改进，进一步提高模拟效率。

参考文献

1 Nisselon J, et al. Computer Graphics in Fashion. Computer Graphics(Proc. Siggraph), 1987, 24(4): 333～334
2 Terzopoulos D, Platt J C, Barr A H. Elastically deformable models. ComputerGraphics, 1987, 21(4): 205～214
3 Breen D E, House D H, Wonzy M J. Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. Computer Graphics, 1994, 28(5): 365～372
4 Provot X. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In: Wayne A, ed. Proc. of the Graphics Interface Conference'95. Vancouver: Canadian Human-Computer Communications Society, 1995. 147～154
5 Baraff D, Witkin A. Large Steps in Cloth Simulation. Computer Graphics Proceedings, ACM Siggraph, Orlando, FL, USA, July 1998. 43～54
6 成迟薏，石教英，徐迎庆. 沈向洋基于物理模型的窗帘运动实时动画. 软件学报，2000，11(9)：1228～1236
7 樊劲，周济，王启付，袁铭辉. 基于弹簧质点模型的二维/三维映射算法. 软件学报，1999，10(2)：140～148
8 陈昨，徐乃平. 采用能量法进行真实感布仿真. 软件学报，2001，12(2)：303～308
9 Hutchinson D, Preston M, Hewitt T. Adaptative refinement for mass-spring simulations. In: 7th Workshop on Animation and Simulation. Poitiers, France, 1996
10 Zhang D, Yuen M M. Cloth simulation using multilevel meshes. Computers and Graphics, 2001, 25
11 Vanden Bergen G. Efficient Collision Detection of Complex Deformable Models using AABB Trees [J]. Journal of Graphics Tools, 1997, 2(4): 1～14
12 Volino P, Magnenat Thalmann N. Efficient Self-collision Detection on Smoothly Discretized Surface Animations Using Geometrical Shape Regularity. Computer Graphics Forum, (Proc. Euro-Graphics94), Oslo, Norway, 1994, 13(3): 155～166

(上接第137页)

$$r_1(r_1^*)=\frac{1}{8\mu}[\lambda+4\mu+\theta-(+)\sqrt{(\lambda+4\mu+\theta)^2-16\lambda\mu}].$$

由定理4.1，率阵 R 可表为

$$R=\begin{bmatrix} r_0\frac{\theta}{2\mu}\frac{r_0}{r_1^*-r_0} & \frac{2\theta}{5\mu}\frac{r_0(r_1^*-1)}{(r_1^*-r_0)(1-r_0)} \\ r_1 & \frac{\theta}{5\mu}\frac{r_1}{1-r_1} \\ & \rho \end{bmatrix}.$$

现在，$B(R)$是8阶方阵：

$$B[R]=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & & & \\ & & 3\mu & -(\lambda+3\mu+2\theta) & 2\theta & & & \\ & & 4\mu & 0 & -(\lambda+4\mu) & 0 & \lambda & \\ & & & 3\mu & 0 & -\frac{\lambda}{r_0} & \frac{2\theta r_1^*}{r_1^*-r_0} & \frac{2\theta r_0(r_1^*-1)}{(r_1^*-r_0)(1-r_0)} \\ & & & & 4\mu & 0 & -\frac{\lambda}{r_1} & \frac{\theta}{1-r_1} \\ & & & & 5\mu & 0 & 0 & -5\mu \end{bmatrix}$$

求解文[9]中的方程组(1.3.9)，并应用矩阵几何解表示，我们得到(L_v, J)的联合分布。

$$\pi_{k2}=\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k K, k=0,1,2,3$$

$$\pi_{42}=K\beta_{42}=K\frac{1}{3!}(\frac{\lambda}{\mu})^3 r_0,$$

$$\pi_{41}=K\beta_{41}=K\frac{1}{4!}(\frac{\lambda}{\mu})^4\frac{2\theta r_0}{\lambda(1-r_0)},$$

$$\pi_{52}=K\beta_{52}=K\frac{1}{3!}(\frac{\lambda}{\mu})^3 r_0^2,$$

$$\pi_{51}=K\beta_{51}=K\frac{1}{4!}(\frac{\lambda}{\mu})^4\frac{2\theta r_0}{\lambda}\frac{r_1(r_1^*-r_0)+r_0(1-r_0)}{(r_1^*-r_0)(1-r_0)},$$

$$\pi_{50}=K\beta_{50}=K\frac{1}{5!}(\frac{\lambda}{\mu})^5\frac{2\theta r_0}{\lambda^2}\frac{r(r_1^*-r_0)+\theta r_0}{(r_1^*-r_0)(1-r_0)}.$$

对 $k>5$，使用矩阵几何解表示，我们有

$$\pi_k=(\pi_{k2},\pi_{k1},\pi_{k0})=K(\beta_{52},\beta_{51},\beta_{50})R^{k-5}, k\geqslant 5.$$

结论 综上所述，本文给出多 Agent 系统的排队模型并进行了严格的理论证明。这内容将对多 Agent 系统的研究有积极的促进作用，今后我们应在此理论的基础上做一些实际应用系统。

参考文献

1 Pirk A, Gans M. Domain-Dependnt information gathering agent. Expert systems with Applications, 2002, 23(3): 207～218
2 Mali A D. on the evaluation of agent behaviors. Artificial Intelligence, 2003, 143 (1): 1～17
3 Jennings N R. on agent-based Software engineering. Artificial Intelligence, 2000, 117(2): 277～296
4 Tesfatsion L. Agent-based Computational economics: Modeling economies as complex adaptive system. Information Science, 2003, 149(4): 262～268
5 李凡长. 多 Agent 系统的组合设计模型研究. 小型微型计算机系统, 2002, 23(2)
6 由乃硕，岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解. 科学出版社，2002
7 Neuts M. Probability distributions of phase type. In Liber Amicorurn Prof. Depar. Of Math., Belgiun: Univ. of Louvain, 1975. 173～206
8 Neuts M. Matrin-analytic methods in queueing theory. Advance in Queueing, Edited by Dshalaw, CRC Press, 1985. 265～292
9 李凡长，佘玉梅. 多 Agent 系统的排队模型(1). 计算机科学, 2004, 31(4): 123～128