

# 基于通用高斯马尔可夫随机场模型的图像超分辨率重建

黄华 李俊 齐春 朱世华

(西安交通大学电信学院 西安 710049)

**摘要** 提出了一种基于通用高斯马尔可夫随机场(GGMRF)模型的图像超分辨率重建方法,给出了求解过程和实验结果,并进行了分析。相对 Compound Markov 随机场模型和 Huber-Markov 随机场模型,GGMRF 模型不用判断边缘或者线过程,因此优化求解简单,大大减少了运算量。实验结果表明在低噪声情况下,该方法重建图像视觉效果较好。

**关键词** 超分辨率,图像重建,GGMRF 模型

## Reconstruction of Superresolution Image Using Generalized Gaussian Markov Random Fields Model

HUANG Hua LI Jun QI Chun ZHU Shi-Hua

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** An image super-resolution reconstruction method based on generalized Gauss-Markov random fields (GGMRF) model is presented in this paper. The process of searching solution and experimental results are presented and analyzed. Compared with Compound Markov and Huber-Markov random models, GGMRF model has the merits of easier solving and reduced computational expense, because it does not need to discriminate edge or line process. The experimental results show that for the case of lightly noised image, this method has a better visual effect on the reconstructed image.

**Keywords** Superresolution, Image reconstruction, GGMRF

通常数字图像因欠采样而引起的信号混叠,因低分辨率传感器点扩散(PSF)而造成的高频部分丢失,以及因相对运动或者散焦造成的光学模糊等因素而导致所得到的图像是退化的、低分辨率的。但在许多应用中,需要高分辨率的图像。图像超分辨率重建是指由几个模糊的、欠采样的、有噪的观测图像重建一个高于观测分辨率的图像,其目的是为了降低图像噪声,减少图像因欠采样出现的混迭,提高观测图像的空间分辨率。近年来,图像超分辨率技术不断发展,提出了不少方法<sup>[1~5]</sup>。

基于 Markov 随机场的超分辨率重建是现有方法中比较成功的一类方法。Markov 随机场模型提供了关于图像的一种统计描述,这种模型着重考虑每个像素关于它的一组邻近像素的条件分布,能够有效地描述图像的局部统计特征。Schultz<sup>[6]</sup>和张新明<sup>[6]</sup>使用 Huber-Markov 随机场模型,Rajan<sup>[1]</sup>使用 Compound Markov 随机场模型进行了超分辨率重建,取得了较好的效果。选择这两种模型的原因在于它们具有边缘保持性能,Huber-Markov 模型运用边缘惩罚函数,Compound Markov 模型使用线过程,其目的都是对边缘像素和非边缘像素做不同处理,以达到平滑非边缘像素以降低噪声并保持或增强边缘像素的目的。但是这两种方法都需要设定阈值来判断边缘,而边缘阈值没有一个客观准确的取法,同时由于对边缘像素和非边缘像素加权不同,导致其优化求解的难度加大。

GGMRF(generalized Gaussian Markov random fields,通用高斯马尔可夫随机场)模型是一类常用图像模型,和上面两种模型一样,也具有边缘保持性能<sup>[7]</sup>,在图像恢复和重建等领域得到了有效的应用<sup>[8,9]</sup>。本文将 GGMRF 模型应用

于图像超分辨率重建中,实验结果表明相对基于 Huber-Markov 随机场和 Compound Markov 随机场两种模型的方法,基于 GGMRF 模型的方法优化求解简单,运算量大大减少,同时保证了较高的重建性能。

## 1 模型

### 低分辨率图像的形成模型

给定一个场景的  $K$  幅低分辨率图像  $G_k, 1 \leq k \leq K$ ,为了矩阵的表示方便,将这些图像的像素值按照字典顺序排列成矢量形式表示。理想的高分辨率图像  $F$  和观测到的低分辨率图像之间的关系可以表示为:

$$G_k = DHM_k F + V_k \text{ for } 1 \leq k \leq K \quad (1)$$

其中  $D$  表示抽取矩阵,  $H$  表示模糊矩阵,  $M_k$  表示第  $k$  帧低分辨率图像对应的高分辨率图像与所求的理想高分辨率图像之间的运动关系矩阵,  $V_k$  表示附加的随机噪声,通常假设噪声是高斯的,并且是不相关的。详细的描述参见文<sup>[2]</sup>。

### GGMRF 模型

图像建模是用一种数学的解析式来表达图像的特征或基本属性,正确的图像模型可以作为先验知识或约束用于图像重建、特征提取、图像编码、图像识别等。可以把图像看作一个随机场,并用一个概率分布函数来描述该随机场。Markov 随机场模型提供了一个 Bayes 框架,允许对图像进行最大后验估计。

GGMRF 中,图像  $f$  的概率分布有:

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{\rho \sigma_f} \sum_{i,j \in \mathcal{N}_i} N_{i,j} |f_i - f_j|^p \right\} \quad (2)$$

其中  $Z$  是标准化常数,是  $\rho, \sigma_f$  和  $N_{i,j}$  的函数;  $\rho$  是图像锐化度参数,取值范围为  $1 < \rho \leq 2$ ;  $\sigma_f$  是 GGMRF 的尺度参数;  $\mathcal{N}_i$

表示  $i$  的邻域;  $\sum_{j \in \alpha_i} N_{i,j} = 1$ ,  $N_{i,j}$  表示像素  $i$  和  $j$  之间的关联度;  $f_i$  表示位置  $i$  处像素值。对一个八邻域系统,  $N_{i,j}$  可定义为:

$$N_{i,j} = \begin{cases} 1/6 & d(i,j)=1 \\ 1/12 & d(i,j)=\sqrt{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $d(i,j)$  是像素  $i$  和  $j$  间的欧几里得距离。

当  $p=2$  时, 式(2)所描述的 GGMRF 就是 GMRF (Gaussian Markov random fields, 高斯马尔可夫随机场), 因此可以将 GMRF 看作是 GGMRF 的特例。

记图像像素总数为  $S$ , 则 GGMRF 的尺度参数的  $\sigma_f$  的最大似然估计为:

$$\hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{S} \sum_{i \in \alpha_j} N_{i,j} |f_i - f_j|^p \quad (4)$$

### 噪声模型

假设观测图像的噪声是服从  $(0, \sigma_n^2)$  分布的加性白色高斯噪声, 且观测图像间的噪声分布是独立同分布的。这样, 在给定理想高分辨率图像的条件下, 观测图像的条件分布等价于噪声的分布, 有

$$p(g_1, g_2, \dots, g_k | f) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^K \|g_k - DHM_k f\|^2 \right] \quad (5)$$

## 2 MAP 估计及求解

按照 Bayesian 规则, 有:

$$P(f | g_1, g_2, \dots, g_k) = \frac{p(g_1, g_2, \dots, g_k | f) P(f)}{p(g_1, g_2, \dots, g_k)} \quad (6)$$

对上式取对数, 因为分母不是  $f$  的函数, 有:

$$\ln P(f | g_1, g_2, \dots, g_k) \propto \ln P(g_1, g_2, \dots, g_k | f) + \ln P(f) \quad (7)$$

结合式(2)、(5), 利用给定的低分辨率图像重建高分辨率图像的最大后验概率估计为:

$$f = \arg \max_f P(f | g_1, g_2, \dots, g_k) = \arg \max_f \{ \ln P(g_1, g_2, \dots, g_k | f) + \ln P(f) \} = \arg \min_f \left\{ \sum_k \frac{\|g_k - DHM_k f\|^2}{2\sigma_n^2} + \sum_i \sum_j \frac{N_{i,j} |f_i - f_j|^p}{p\sigma_f^p} \right\} \quad (8)$$

对  $1 < p < 2$ , 上式为凸函数, 虽然可以用梯度相关的算法或者模拟退火算法求解, 但这两类方法计算都太复杂, 计算量大。本文使用迭代坐标递减算法 (Iterative Coordinate Decent Algorithm, ICD 算法) 对图像中的每个像素逐个求值使得上式大括号内的值最小化。记  $Q_k = DHM_k$ , 定义错误向量

$$e_k = g_k - Q_k f \quad (9)$$

ICD 算法按照下面的方式更新每个像素  $f_i$ , 直到达到停止迭代的条件。

$$v \leftarrow f_i \quad (10)$$

$$\theta_1 = -\frac{\sum_k e_k^T (Q_k)_{\cdot, i}}{\sigma_n^2} \quad (11)$$

$$\theta_2 = \frac{\sum_k \|(Q_k)_{\cdot, i}\|^2}{\sigma_n^2} \quad (12)$$

$$f_i \leftarrow \arg \min_u \left\{ \theta_1 (u - v) + \frac{1}{2} \theta_2 (u - v)^2 + \frac{1}{p\sigma_f^p} \sum_{j \in \alpha_i} N_{i,j} (u - f_j)^p \right\} \quad (13)$$

$$e_k \leftarrow e_k - (Q_k)_{\cdot, i} (f_i - v) \quad (14)$$

其中  $(Q_k)_{\cdot, i}$  表示矩阵  $Q_k$  的第  $i$  列。算法的关键是计算式(13)的最小值, 式(13)对  $u$  求导并令其等于 0, 得到

$$\theta_1 + \theta_2 (u - v) + \frac{1}{\sigma_f^p} \left[ \sum_j N_{i,j} |u - f_j|^{p-1} \text{sign}(u - f_j) \right] = 0 \quad (15)$$

当权重  $N_{i,j}$  取正值时, 上述方程的解必然落在下面的区间

$$\left[ \min \left\{ f_i \text{ for } j \in \alpha_i, (v - \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right\}, \max \left\{ f_i \text{ for } j \in \alpha_i, (v - \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right\} \right]$$

利用这个界限, 上式的解可以通过区间分半寻求方法计算。

## 3 实验结果及分析

实验时按照 LR 图像成像模型, 将一幅 HR 图像进行平移, 得到一系列相互之间有相对运动的图像, 再对它们进行高斯模糊, 然后在两个尺度上进行同一抽取率的抽取, 再加噪, 得到一系列实验用的低分辨率图像。

从式(8)可以看出, 计算重建图像需要确定图像的噪声  $\sigma_n^2$  和图像的 GGMRF 模型锐化度参数  $p$ , 图像尺度参数  $\sigma_f$  的值。图像的噪声  $\sigma_n^2$  可以通过估计得到<sup>[10]</sup>。作为图像锐化度参数的  $p$  在计算中通常由人给定;  $p$  的取值范围为  $1 < p \leq 2$ ,  $p$  值越小, 图像的锐化度越大, 在图像恢复重建中, 为了保证图像不过于平滑, 通常取  $p=1.1$  左右。剩下的主要问题是估计图像的尺度参数  $\sigma_f$ 。

给定一幅图像, 可以根据式(4)估计图像的尺度参数  $\sigma_f$ , 现在面临的问题是需要根据抽取的观测图像来估计原始图像的尺度参数, 两者维数不同, 抽取前后图像的尺度参数间的关系无法计算。对不同类型的一些图像进行同样的模糊、抽取, 分析处理前后图像的尺度参数变化, 实验结果表明抽取前后的尺度参数没有明显的关系, 观测图像的尺度参数可能小于原始图像, 也可能大于原始图像。

为了选择合适的重建图像的尺度参数, 现在考察不同的尺度参数对重建结果的影响。在表 1 给出了 Lena 图像 (256 × 256) 在 7 × 7 高斯模糊、2 倍抽取、加方差为 25 的高斯噪声后, 给定不同的重建尺度参数得到重建图像的尺度参数和信噪比之间的关系, 表中重建用尺度参数为观测图像的尺度参数的倍数。原始图像的尺度参数为 9.774, 观测图像的尺度参数为 12.459。实验结果表明重建用尺度参数对重建图像的信噪比影响不大, 不管重建用尺度参数怎样变化, 信噪比都在 28dB 附近; 重建后的尺度参数随着重建用尺度参数的增大缓慢地增大。进一步的实验表明不管重建用尺度参数怎样增大, 重建图像的尺度参数总小于原始图像的尺度参数。

表 1 重建用尺度参数和信噪比之间的关系

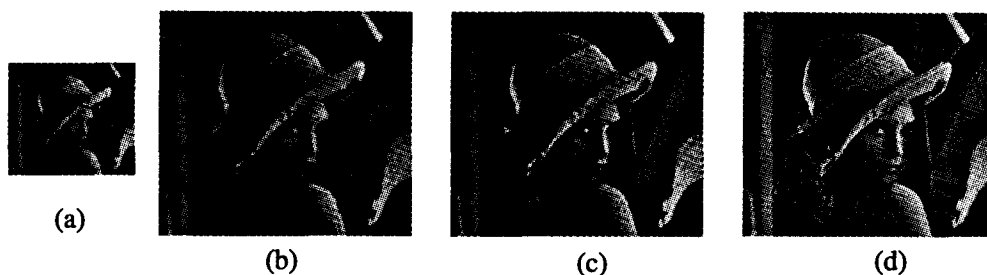
重建用尺度参数	重建后尺度参数	信噪比 (dB)	重建用尺度参数	重建后尺度参数	信噪比 (dB)
1	6.284	28.03	8	7.713	28.04
2	6.891	28.10	9	7.610	28.07
3	7.169	28.07	10	7.881	27.99
4	7.374	28.09	15	8.038	28.04
5	7.369	28.10	20	8.248	27.96
6	7.698	28.04	30	8.314	27.96
7	7.524	28.10	40	8.532	27.88

从式(4)中可以发现图像的尺度参数  $\sigma_f$  同样也反映了图像的锐化度, 即相邻像素的差异度。重建用尺度参数越大, 得到的重建图像的尺度参数也越大, 但是偏离正确模型也就越远, 根据以上的实验结果, 本文重建实验时取尺度参数为观测

图像尺度参数的 5 倍。

图 1 给出了在高斯模糊为  $7 \times 7$ 、高斯噪声方差为 5、抽取

率为 2、 $p=1.1$  的情况下,用 4 幅图像进行重建的结果,及与原始图像的效果对比。



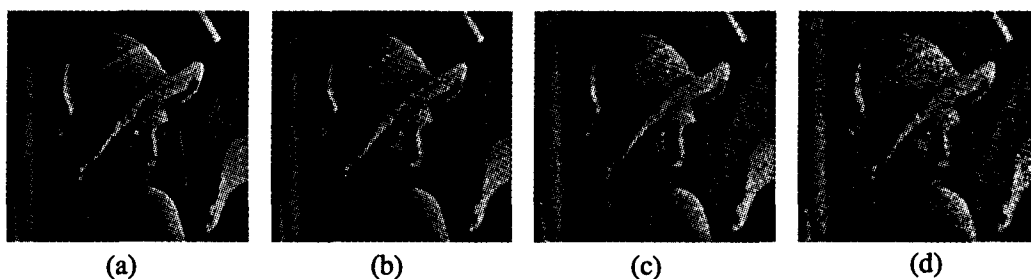
a 为重建用四幅低分辨图像之一, b 为 a 双三次插值后的图, c 为本文方法重建后的图, d 为原始图像。

图 1 重建效果对比

可以明显看出相对图 b, 图 c 的视觉效果有显著的提高, 感觉清晰了很多, 眼睛部位的改善特别明显, 这说明利用多幅图像的信息进行融合是能得到比任何一幅图像都多的信息的。与图 d 相对比, 头发部分的细节并没有恢复出来, 这是因为通过高斯模糊后, 这些过小的边缘已经丢失, 也就是说相对模糊和抽取尺寸太小的细节无法恢复, 这是基于重建方式的图像超分辨率必然遇到的问题<sup>[11]</sup>。

另外注意到帽子上的斜纹、眼睛、头发等处的边缘不仅保持而且得到了增强, 这也说明 GGMRF 模型具有良好的边缘保持和增强性能, 当然增强性能是与  $p$  的取值相关的, 在正常的取值范围内,  $p$  越小重建图像的锐化度越高。

随着噪声的增大, 重建图像的噪声明显增大, 信噪比减小, 同时视觉效果也变坏。图 2 给出了 Lena 图像在高斯模糊为  $7 \times 7$ 、抽取率为 2、 $p=1.1$  的情况下, 高斯噪声方差分别为 16、100、225、400 时的重建结果。与其它基于随机场的算法一样, 本算法期望重建图像经过成像模型后得到的图像与观测图像偏差足够小, 也就是期望重建图像与观测图像有很好的数据一致性, 公式的前半部分就是计算两者的偏差。从解空间角度来看, 由于重建是病态反问题, 解空间越大, 对噪声也就越敏感。因此随着观测图像噪声的增大, 必然导致重建图像与理想图像偏离范围变大, 在图像上体现为重建图像噪声也增大。



a、b、c、d 分别为方差为 16, 100, 225, 400 时的重建图像

图 2 不同噪声情况下的重建效果

**结论** GGMRF 模型是一类常用图像模型, 在图像恢复和重建等领域得到了良好的应用。本文将 GGMRF 模型应用于图像超分辨率重建中, 给出了求解过程和实验结果, 根据实验结果确定了重建用尺度参数, 并对算法特点和结果进行了分析。相对 Compound Markov 随机场模型和 Huber-Markov 模型, GGMRF 模型不用判断边缘或者线过程, 因此优化求解简单, 大大减少了运算量。实验结果表明在低噪声情况下, 该方法重建图像视觉效果较好。

### 参考文献

- 1 Rajan D, Chaudhuri S. An MRF-based approach to generation of super-resolution images from blurred observations[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2002, 16(1): 5~15
- 2 Patti A J, Sezan M I, Tekalp A M. Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1997, 6(8): 1064~1076
- 3 Elad M, Feuer A. Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy and undersampled measured images [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1997, 6(10): 1646~1658
- 4 Patti A J, Altunbasak Y. Artifact Reduction for Set Theoretic Su-

per Resolution Image Reconstruction with Edge Adaptive Constraints and Higher-Order Interpolants[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001, 10(1): 179~186

- 5 Schultz R, Stevenson R. Extraction of high-resolution frames from video sequences [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5(2): 996~1011
- 6 张新明, 沈兰荪. 基于多尺度边缘保持正则化的超分辨率复原 [J]. *软件学报*, 2003, 14(6): 1075~1081
- 7 Bouman C, Sauer K. A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1993, 2(3): 296~310
- 8 López A, Molina R, Katsaggelos A K. Bayesian SPECT Image Reconstruction with Scalable Hyperparameter Estimation for Escalable Priors. In: 1st Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis (IbPRIA2003), Lecture Notes in Computer Science, Mallorca, Spain, June 2003, 2652: 538~546
- 9 López A, Molina R, Katsaggelos A K. Scale Hyperparameter Estimation for GGMRF Prior Models with Application to SPECT Images. In: IEEE 14th International Conference on Digital Signal Processing (DSP 2002), Santorini, Greece, 2002, 2: 521~524
- 10 邹谋炎. 反卷积和信号复原. 北京, 国防工业出版社, 2001. 3
- 11 Baker S, Kanade T. Limits on Super-Resolution and How to Break them[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 29(9): 1167~1183