模糊关系下的粗集粗糙度

邱卫根

(广东工业大学计算机学院 广州 510090)

摘要 本文研究粗糙集的粗糙度问题。首先仔细分析了 Pawlak 粗糙集的粗糙度,得到了粗糙集粗糙度包容相斥原理,然后将结果推广到模糊集理论领域,对研究模糊关系下模糊粗糙集理论有一定的作用。

关键词 粗糙集,粗糙度,模糊粗糙集,下近似,上近似

The Roughness Measures of the Fuzzy Rough Sets

QIU Wei-Gen

(Computer Faculty of Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

Abstract In this paper, the orughness measures of rough sets is studied. Firstly, the roughness mesures of Pawlak rough sets is analyzed in detail, and a inclusion-exclusion principle on rough sets is obtained. We also extend these results to fuzzy rough sets, which is some significance for deeply study of fuzzy rough sets theory.

Keywords Rough sets, Roughness measures, Fuzzy rough sets, Lower approximation, Upper approximation

1 引言

粗集理论将知识理解为在某种等价关系下对特定空间的划分,利用上下近似的概念,将知识库中的各种等价类有效结合起来,形成近似空间,来发现隐含的知识(规则),从而达到客观描述对象知识不确定性的目的。粗集理论提供了仅依赖数据本身的有效表示和处理知识的强有力工具,在广泛的领域内诸如决策分析、机器学习、模式识别、市场研究、专家系统等内获得成功的应用,具有良好的研究前景^[1]。大量的工程实际中涉及的并不是简单的有无概念,属于模糊关系描述的范畴,因此有必要将 Pawlak 粗集理论拓广到模糊集合领域,进一步扩大粗集理论的研究和使用领域。

在粗集理论中,粗糙度 $\rho_R(X)$ 是描述概念 X 在现有知识 R 下知识不完全性程度的一种重要指标。本文讨论了粗糙度的两个类似于普通集合的包容相斥原理,证明了它的一个充分必要条件,并将这结果推广到模糊粗糙集的情况。

2 粗糙集粗糙度

设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是有限对象集,称为论域, $n = |U|$ 。 R 是定义在 U 上的一个等价关系, U/R 表示其相应的分类, $[x]_R$ 表示等价关系 R 下 x 的等价类, $x \in U$ 。 U 的子集合 X 称为概念,它的上、下近似定义为:

$$\bar{R}X = \{x | x \in U, [x]_R \cap X \neq \emptyset\}, \underline{R}X = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X\}$$

下近似集 $\underline{R}X$ 表示在现有的分类下,可以肯定属于概念 X 的知识集合;上近似集 $\bar{R}X$ 表示可能属于(不能确定)概念 X 的知识集合;集合 $Bn(X) = \bar{R}X - \underline{R}X$ 称为粗糙集的边界。粗糙集的粗糙度由下式表示:

$$\rho_R(X) = \frac{|Bn(X)|}{|\bar{R}X|} = 1 - \frac{|\underline{R}X|}{|\bar{R}X|}$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数。

推论 1 (U, A) 是近似空间, $X, Y \subseteq U, T \subseteq S \subseteq A$, 则

$$1) \bar{T}X \supseteq \bar{S}X \supseteq X \supseteq \underline{S}X \supseteq \underline{T}X$$

$$2) \rho_T(X) \geq \rho_S(X)$$

$$3) \rho_S(X) \leq \rho_S(Y)$$

定义 1 U 是一个非空有限论域, R 是定义在 U 上的等价关系, 如果 $X \cap \bar{R}Y = \emptyset$, 或 $Y \cap \bar{R}X = \emptyset$, 则称 X 和 Y 严格分离。

定理 1 设 U 是非空有限论域, R 是 U 上等价关系, $X, Y \subseteq U$, 则下面两组等式等价。

$$1) \rho_R(XUY) |\bar{R}(XUY)| + \rho(X \cap Y) |\bar{R}(X \cap Y)| = \rho_R(X) |\bar{R}X| + \rho_R(Y) |\bar{R}Y|.$$

$$2) \bar{R}(X \cap Y) = \bar{R}X \cap \bar{R}Y, \underline{R}(XUY) = \underline{R}X \cup \underline{R}Y.$$

证明: 由文[1], $\bar{R}(XUY) = \bar{R}X \cup \bar{R}Y, \underline{R}(X \cap Y) = \underline{R} \cap \underline{R}Y$ 。 则

$$\rho_R(XUY) |\bar{R}(XUY)| + \rho_R(X \cap Y) |\bar{R}(X \cap Y)| = \rho_R(X) |\bar{R}X| + \rho_R(Y) |\bar{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(XUY)| - |\underline{R}(XUY)| + |\bar{R}(X \cap Y)| - |\underline{R}(X \cap Y)|$$

$$= |\bar{R}X| - |\underline{R}X| + |\bar{R}Y| - |\underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}X \cup \bar{R}Y| - |\underline{R}(XUY)| + |\bar{R}(X \cap Y)| - |\underline{R}X \cap \underline{R}Y|$$

$$= |\bar{R}X| - |\underline{R}X| + |\bar{R}Y| - |\underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{R}X| + |\bar{R}Y| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| - |\underline{R}(XUY)| + \\ |\bar{R}(X \cap Y)| - |\underline{R}X \cap \underline{R}Y| \\ = |\bar{R}X| - |\underline{R}X| + |\bar{R}Y| - |\underline{R}Y| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -|\bar{R}X \cap \bar{R}Y| - |\underline{R}(XUY)| + |\bar{R}(X \cap Y)| - |\underline{R}X \cap \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow -|\bar{R}X \cap \bar{R}Y| - |\underline{R}(XUY)| + |\bar{R}(X \cap Y)| = -|\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\text{由文[1], 注意到关系 } \bar{R}(X \cap Y) \subseteq \bar{R}X \cap \bar{R}Y \text{ 和 } \underline{R}(XUY) \supseteq \underline{R}X \cup \underline{R}Y, \text{ 因此必有 } |\bar{R}(X \cap Y)| \leq |\bar{R}X \cap \bar{R}Y|, \text{ 以及 } |\underline{R}(XUY)| \geq |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|, \text{ 这样上式等价于}$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow |\bar{R}(X \cap Y)| - |\bar{R}X \cap \bar{R}Y| = |\underline{R}(XUY)| - |\underline{R}X \cup \underline{R}Y|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{R}(X \cap Y) = \overline{RX} \cap \overline{RY} \\ \underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY} \end{cases}$$

定理 2 设 U 是非空有限论域, R 是 U 上等价关系, $X \subseteq Y \subseteq U$, 则当下面 3 条件之一成立时, 等式组 $\overline{R}(X \cap Y) = \overline{RX} \cap \overline{RY}$ 和 $\underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY}$ 成立.

- 1) X 或 Y 是可定义的;
- 2) X 与 Y 是严格分离的;
- 3) $X - Y$ 或 $Y - X$ 是可定义的.

证明: U 是非空有限论域, R 是 U 上等价关系, $X \subseteq Y \subseteq U$,

1) 设 X 是可定义的, 则 $\underline{RX} = X = \overline{RX}$ 成立. 对 $\forall x \in U$, 若 $x \in \overline{RX} \cap \overline{RY}$, 则 $[x]_R \cap X \neq \phi$, 并且 $[x]_R \cap Y \neq \phi$. 由于 X 可定义, 因此 $[x]_R \cap X = [x]_R$, 则 $[x]_R \cap X \cap Y = [x]_R \cap Y \neq \phi$, 即 $x \in \overline{R}(X \cap Y)$. 又因为 $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{RX} \cap \overline{RY}$, 这样 $\overline{R}(X \cap Y) = \overline{RX} \cap \overline{RY}$.

对 $\forall x \in U$, 若 $x \in \underline{R}(X \cup Y)$, 则 $[x]_R \subseteq X \cup Y$. 由于 X 可定义, 则或者 $[x]_R \subseteq X$, 或者 $[x]_R \cap X = \phi$. 若 $[x]_R \subseteq X$, 则 $x \in \underline{RX}$, 即 $x \in \underline{RX} \cup \underline{RY}$. 若 $[x]_R \cap X = \phi$, 则 $[x]_R \subseteq Y$, $x \in \underline{RY}$, 即 $x \in \underline{RX} \cup \underline{RY}$. 又因为 $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{RX} \cup \underline{RY}$, 所以 $\underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY}$.

对 Y 可定义, 可以同理证明.

2) 设 X 与 Y 严格分离, 则 $X \cap \overline{RY} = \phi$ 或 $Y \cap \overline{RX} = \phi$, 因此 $\overline{RX} \cap \overline{RY} = \phi$, $X \cap Y = \phi$, 即 $\overline{R}(X \cap Y) = \phi = \overline{RX} \cap \overline{RY}$. 由于 $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{RX} \cup \underline{RY}$, 设任意 $x \in \underline{R}(X \cup Y)$, 因此 $[x]_R \subseteq X \cup Y$, 由于 $\overline{RX} \cap \overline{RY} = \phi$, 则 $[x]_R \subseteq X$ 成立, 或者 $[x]_R \subseteq Y$ 成立, 因此 $[x]_R \subseteq X \cup Y$, $x \in \underline{R}(X \cup Y)$, 即 $\underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY}$.

3) 设 $X - Y$ 是可定义的, 则对 $\forall x \in U$, 若 $x \in \overline{RX} \cap \overline{RY}$, 则 $[x]_R \cap X \neq \phi$, 并且 $[x]_R \cap Y \neq \phi$. 因为 $[x]_R \cap X = [x]_R \cap [(X - Y) \cup (X \cap Y)] \neq \phi$, 即或者 $[x]_R \cap (X - Y) \neq \phi$, 或者 $[x]_R \cap (X \cap Y) \neq \phi$. 由于 $X - Y$ 是可定义的, 若 $[x]_R \cap (X - Y) \neq \phi$, 则 $[x]_R \subseteq (X - Y)$, 即 $[x]_R \cap Y = \phi$, 矛盾. 因此 $[x]_R \cap (X \cap Y) \neq \phi$, 即 $x \in \overline{R}(X \cap Y)$. 又因为 $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{RX} \cap \overline{RY}$, 这样 $\overline{R}(X \cap Y) = \overline{RX} \cap \overline{RY}$.

对 $\forall x \in U$, 若 $x \in \underline{R}(X \cup Y)$, 则 $[x]_R \subseteq X \cup Y$. 由于 $X - Y$ 可定义, 因此或者 $[x]_R \subseteq X - Y$, 或者 $[x]_R \cap (X - Y) = \phi$. 若 $[x]_R \cap (X - Y) = \phi$, 则 $[x]_R \subseteq Y$, 即 $x \in \underline{RY}$. 若 $[x]_R \subseteq X - Y$, 则 $[x]_R \subseteq X - Y$, 即 $x \in \underline{RX}$. 因此都有 $x \in \underline{RX} \cup \underline{RY}$. 又因为 $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{RX} \cup \underline{RY}$, 所以 $\underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY}$.

对于 $Y - X$ 可定义, 可以同理证明.

3 模糊粗糙集粗糙度

设 U 是一个非空有限论域, R 是 U 上的模糊关系, $P(U)$ 是 U 的古典子集构成的幂集. 对任意 $X \in P(U)$, 则 X 关于模糊关系 R 的下近似 $\underline{RX}$ 和上近似 $\overline{RX}$ 是 U 上的模糊集, 其隶属函数分别是:

$$\forall x \in U, \underline{RX}(x) = \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X\}, \overline{RX}(x) = \max\{R(x, y) \mid y \in X\}$$

称 $(\underline{RX}, \overline{RX})$ 是集合 X 在模糊关系 R 下的模糊粗糙集.

引理 1 U 是非空有限论域, R 是 U 上的模糊关系, 任意 $X, Y \in P(U)$, 若 $X \subseteq Y$, 则 $\underline{RX} \subseteq \underline{RY}$, $\overline{RX} \subseteq \overline{RY}$.

证明: 对任意 $x \in U$,

$$\underline{RX}(x) = \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X\} \leq \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin Y\} = \underline{RY}(x),$$

$$\overline{RX}(x) = \max\{R(x, y) \mid y \in X\} \leq \max\{R(x, y) \mid y \in Y\} = \overline{RY}(x),$$

即 $\underline{RX} \subseteq \underline{RY}$, $\overline{RX} \subseteq \overline{RY}$.

引理 2 U 是非空有限论域, R 是 U 上的模糊关系, 任意 $X, Y \in P(U)$, 对上式所定义的上、下近似有下面的关系成立.

- 1) $\underline{RX} \cap \underline{RY} = \underline{R}(X \cap Y)$, 2) $\overline{RX} \cup \overline{RY} = \overline{R}(X \cup Y)$
- 3) $\underline{RX} \cup \underline{RY} \subseteq \underline{R}(X \cup Y)$, 4) $\overline{RX} \cap \overline{RY} \supseteq \overline{R}(X \cap Y)$

证明: 对任意 $x \in U$,

$$1) (\underline{RX} \cap \underline{RY})(x) = \min\{\underline{RX}(x), \underline{RY}(x)\} = \min\{\min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X\}, \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin Y\}\} = \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X \cap Y\} = \underline{R}(X \cap Y)(x)$$

$$2) (\overline{RX} \cup \overline{RY})(x) = \max\{\overline{RX}(x), \overline{RY}(x)\} = \max\{\max\{R(x, y) \mid y \in X\}, \max\{R(x, y) \mid y \in Y\}\} = \max\{R(x, y) \mid y \in X \cup Y\} = \overline{R}(X \cup Y)(x)$$

$$3) (\underline{RX} \cup \underline{RY})(x) = \max\{\underline{RX}(x), \underline{RY}(x)\} = \max\{\min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X\}, \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin Y\}\} \leq \min\{1 - R(x, y) \mid y \notin X \cup Y\} = \underline{R}(X \cup Y)(x)$$

$$4) (\overline{RX} \cap \overline{RY})(x) = \min\{\overline{RX}(x), \overline{RY}(x)\} = \min\{\max\{R(x, y) \mid y \in X\}, \max\{R(x, y) \mid y \in Y\}\} \geq \max\{R(x, y) \mid y \in X \cap Y\} = \overline{R}(X \cap Y)(x)$$

定义 2 集合 X 在模糊关系 R 下关于参数 α, β 的模糊粗糙度定义为:

$$\rho^{\alpha, \beta}(X) = 1 - \frac{|\underline{RX}_\alpha|}{|\overline{RX}_\beta|}$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数, 参数 $\alpha, \beta, 0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, 当 $(\overline{RX})_\alpha = \phi$ 时, $\rho^{\alpha, \beta}(X) = 0$.

引理 3 设 (U, R) 是模糊近似空间, $A, B \in F(U)$ 是 U 上的模糊集合, 则 $A = B$ 当且仅当对任意的实数 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有 $A_\lambda = B_\lambda$.

定理 3 设 U 是非空有限论域, R 是 U 上模糊等价关系, $X, Y \in P(U)$, α, β 是满足 $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ 的任意实数, 则下面两组等式等价.

- 1)
$$\begin{cases} \rho^{\alpha, \beta}(X \cup Y) \mid (\overline{R}(X \cup Y))_\beta \mid + \rho^{\alpha, \beta}(X \cap Y) \mid (\overline{R}(X \cap Y))_\beta \mid \\ = \rho^{\alpha, \beta}(X) \mid (\overline{RX})_\beta \mid + \rho^{\alpha, \beta}(Y) \mid (\overline{RY})_\beta \mid \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} (\overline{R}(X \cap Y))_\beta = (\overline{RX})_\beta \cap (\overline{RY})_\beta, \\ (\underline{R}(X \cup Y))_\alpha = (\underline{RX})_\alpha \cup (\underline{RY})_\alpha. \end{cases}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overline{R}(X \cap Y) = \overline{RX} \cap \overline{RY} \\ \underline{R}(X \cup Y) = \underline{RX} \cup \underline{RY} \end{cases} \Leftrightarrow \forall 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \\ & \begin{cases} (\overline{R}(X \cap Y))_\beta = (\overline{RX} \cap \overline{RY})_\beta \\ (\underline{R}(X \cup Y))_\alpha = (\underline{RX})_\alpha \cup (\underline{RY})_\alpha \end{cases} \\ & \begin{cases} \rho^{\alpha, \beta}(X \cup Y) \mid (\overline{R}(X \cup Y))_\beta \mid + \\ \rho^{\alpha, \beta}(X \cap Y) \mid (\overline{R}(X \cap Y))_\beta \mid \\ = \rho^{\alpha, \beta}(X) \mid (\overline{RX})_\beta \mid + \rho^{\alpha, \beta}(Y) \mid (\overline{RY})_\beta \mid \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mid (\overline{R}(X \cup Y))_\beta \mid - \mid (\underline{R}(X \cup Y))_\alpha \mid + \mid (\overline{R}(X \cap Y))_\beta \mid \\ - \mid (\underline{R}(X \cap Y))_\alpha \mid \\ = \mid (\overline{RX})_\beta \mid - \mid (\underline{RX})_\alpha \mid + \mid (\overline{RY})_\beta \mid - \mid (\underline{RY})_\alpha \mid \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mid (\overline{RX})_\beta \cup (\overline{RY})_\beta \mid - \mid (\underline{R}(X \cup Y))_\alpha \mid \\ + \mid (\overline{R}(X \cap Y))_\beta \mid - \mid (\underline{R}(X \cap Y))_\alpha \mid \\ = \mid (\overline{RX})_\beta \mid - \mid (\underline{RX})_\alpha \mid + \mid (\overline{RY})_\beta \mid - \mid (\underline{RY})_\alpha \mid \end{cases} \end{aligned}$$

三种差别矩阵的比较

刘启和 李凡 颜俊华 杨国伟

(电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 610054)

摘要 差别矩阵是 Rough 集理论中重要概念之一,使用差别矩阵可以计算决策表的核和约简。当前有多种定义差别矩阵的方法,导致差别矩阵有多种定义的原因是决策表的不一致性。本文分析一致决策表和不一致决策表关系,给出将不一致决策表转换为一致决策表的方法,并给出差别矩阵的等价性定义。在此基础上,讨论并证明三种差别矩阵的关系,结果表明利用这种转换方法和等价性定义可以将三种差别矩阵统一起来,从而保证在实际应用中可以用统一方法来构造差别矩阵。

关键词 Rough 集理论,差别矩阵,决策表

Comparison with the Three Types of Discernibility Matrix

LIU Qi-He LI Fan YAN Jun-Hua YANG Guo-Wei

(College of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract The discernibility matrix is an important concept in the rough set theory and is the basis of computing the core and reducts of decision tables. Inconsistent data in decision tables results in the different definitions of discernibility matrix. In this paper, the relationship between inconsistent decision tables and consistent decision tables is analyzed, and the method which can convert inconsistent decision tables into consistent decision tables is presented. The equivalent definition about any two types of discernibility matrix is proposed. Based on these results above, the relationship of three types of discernibility matrix is discussed and some properties are proved. The properties show that the three types of discernibility matrix can be unified based on the converting method and the equivalent definition, so one can use only method to construct the discernibility matrix in practice.

Keywords Rough set theory, Discernibility matrix, Decision tables

1 引言

Rough 集是一种新的处理不精确、不确定和模糊信息的数学工具,其主要思想是在保持信息系统分类能力不变的前提下,通过知识约简来获得问题的分类或决策规则。自波兰学者 Pawlak 于 1982 年提出 Rough 集理论以来,它已经在机器学习、知识发现等领域取得了较大的成功^[1,2]。

刘启和 讲师,博士研究生,主要研究方向:Rough 集理论,自然语言处理。

差别矩阵是 Rough 集理论中重要概念之一,使用差别矩阵可以计算决策表的核和约简^[2,5]。Hu Xiao-hua 提出了利用差别矩阵求核的方法^[3],而叶东毅指出^[6],利用这种差别矩阵求不一致决策表的核是错误的,并给出了一种新的差别矩阵。利用新的差别矩阵可以正确计算决策表的核。张文修在文^[5]中给出差别矩阵的另一定义,并指出它能够计算决策表的核和约简。由此可见,有三种定义差别矩阵的方法,即 Hu

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} |(\overline{R}X)_\beta| + |(\overline{R}Y)_\beta| - |(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta| - |(R(XUY))_\alpha| + \\ |(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| - |(RX)_\alpha \cap (RY)_\alpha| \\ = |(\overline{R}X)_\beta| - |(RX)_\alpha| + |(\overline{R}Y)_\beta| - |(RY)_\alpha| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -|(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta| - |(R(XUY))_\alpha| + |(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| \\ - |(RX)_\alpha \cap (RY)_\alpha| \\ = -(|(RX)_\alpha \cup (RY)_\alpha| + |(RX)_\alpha \cap (RY)_\alpha|) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -|(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta| - |(R(XUY))_\alpha| + |(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| \\ &= -|(RX)_\alpha \cup (RY)_\alpha| \\ &\Leftrightarrow |(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| - |(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta| = |(R(XUY))_\alpha| \\ &- |(RX)_\alpha \cup (RY)_\alpha| \end{aligned}$$

由引理 1, $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}X \cap \overline{R}Y$ 和 $R(XUY) \supseteq RX \cup RY$ 成立。对 $\forall 1 \geq \alpha, \beta \geq 0$, 必有 $|(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| \leq |(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta|$, 以及 $|(\overline{R}(X \cap Y))_\beta| \geq |(RX)_\alpha \cup (RY)_\alpha|$ 成立, 这样

上式等价于

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{R}(X \cap Y))_\beta = (\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta, \\ (R(XUY))_\alpha = (RX)_\alpha \cup (RY)_\alpha. \end{cases}$$

结论 将经典粗糙集理论拓广到模糊关系领域是粗集理论发展及其应用研究的一个重要方向。本文首先讨论经典的等价关系下粗糙集粗糙度问题,证明其中的一个充分必要条件,然后将其推广到模糊关系下的模糊粗糙集情形,得到了相同的结论。

参考文献

- 1 王珏, 苗夺谦, 周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述. 模式识别与人工智能, 1998, 11: 34~40
- 2 刘贵龙. 粗糙集的粗糙度. 计算机科学, 2004, 31(3): 140~141
- 3 闫德勤, 迟忠先. 粗糙集与 Vague 集. 计算机科学, 2004, 31(8): 133~135
- 4 Chan C-C. A rough set approach to attribute generalization in data mining. Journal of Information Sciences 107, 1998. 169~176
- 5 王基一, 顾沈明. 一种基于模糊粗糙集知识获取方法. 计算机科学, 2004, 31(6): 169~170