逻辑系统 UL 的广义 H-赋值*)

张小红　何华灿
（西北工业大学计算机学院　西安 710072）

摘　要　研究了 Schweizer-Sklar T-范数（本文讨论 $p<0$ 的情况）及其剩余蕴涵的性质。以此为基础，对泛逻辑基本形式系统 UL 中的 H-赋值进行了拓广，引入了广义 H-赋值概念，证明了 UL 在广义 H-赋值之下可靠性定理成立。

关键词　逻辑系统 UL，广义 H-赋值，Schweizer-Sklar T-范数，可靠性

Generalized H-valuation in Logic System UL

ZHANG Xiao-Hong　HE Hua-Can
(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract　The properties of Schweizer-Sklar T-norm (assume $p<0$ in this paper) and its residuated implication are studied. Based on these, the notion of generalized H-valuation in logic system UL is introduced, and the reliability theorem of UL on generalized H-valuation is proved.

Keywords　Logic system UL, Generalized H-valuation, Schweizer-Sklar T-norm, Reliability

1　引言

在模糊逻辑中，选择怎样的蕴涵算子对模糊推理的效果有直接影响。由于 T-范数较好地反映了逻辑“与”的性质，因而模糊逻辑系统中所选择的蕴涵算子基本上都与某种 T-范数相伴，比如 Lukasiewicz 连续值逻辑选用与 Lukasiewicz T-范数相伴的 Lukasiewicz 蕴涵、形式系统 L * 选用与 R_0-T-范数相伴的 R_0 蕴涵算子，而 BL[1]、MTL[2] 则分别是基于连续 T-范数、左连续 T-范数的模糊逻辑系统的形式化描述。泛逻辑学[3]也选择了 T-范数作为构造命题连接词的模型，不过，为了刻画逻辑柔性，泛逻辑学选择了带参数的 T-范数。事实上，美国学者 T. Whalen 在文[9]中研究了由 Schweizer-Sklar T-范数导出的剩余蕴涵簇，并将其中的参数 p 与模糊规则之间交互作用的强度联系起来，这与泛逻辑学中广义相关系数的思想不谋而合。

借鉴王国俊教授建立模糊逻辑形式系统 L*[4] 的经验，我们在文[5,6]中建立了泛逻辑的基本形式系统 UL，并通过引入 H-赋值的概念，证明了 UL 系统的可靠性和弱完备性。近来，在研究 Schweizer-Sklar T-范数及其导出的剩余蕴涵的性质时发现，上述 H-赋值的概念可以进一步拓广，UL 系统在这种更宽广的语义下仍具有可靠性和弱完备性，这说明逻辑系统 UL 具有较强的包容性。本文首先研究了 Schweizer-Sklar T-范数（本文讨论 p<0 的情况）及其剩余蕴涵的性质，以此为基础，引入了广义 H-赋值概念，证明了 UL 在广义 H-赋值之下可靠性定理成立。关于在广义 H-赋值之下的完备性问题，我们将在另文中详细论述。

2　Schweizer-Sklar T-范数及其剩余蕴涵

定义 2.1[4]　T-范数是[0,1]上的二元函数 $\otimes$：$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，满足以下条件

(i) $\otimes$ 是交换的和结合的；

(ii) $\otimes$ 对任意变元均为增函数；

(iii) $1\otimes x=x$，$0\otimes x=0$。

定理 2.2[4]　设 $\otimes$ 是[0,1]上的左连续 T-范数，则存在惟一的算子 $\to$（以下称其为由 $\otimes$ 导出的剩余蕴涵）满足：对任意的 $x, y, z\in[0,1]$，$x\otimes z\leqslant y$ 当且仅当 $z\leqslant x\to y$，且 $x\to y=sup\{z|x\otimes z\leqslant y\}$，同时 $x\otimes z=inf\{z|z\leqslant x\to y\}$。

定义 2.3[4]　设 P 是偏序集，P 上的二元运算 $\otimes$ 与 $\to$ 叫做互为伴随，若以下条件成立：

(M0) $\otimes$：$P\times P\to P$ 是单调递增的，

(R0) $\to$：$P\times P\to P$ 关于第一个变量是不增的，关于第二个变量是不减的，

(A) $a\otimes b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$，$a, b, c\in P$。

这时，$(\otimes,\to)$ 叫做 P 上的伴随对。

定理 2.4[4]　设 P 是偏序集，$(\otimes,\to)$ 是 P 上的伴随对，$a\in P$，则下列条件成立（当两边出现的并或交都存在时）

(M1) $(\bigvee_i x_i)\otimes a=\bigvee_i(x_i\otimes a)$，

(R1) $a\to\bigwedge_i y_i=\bigwedge_i(a\to y_i)$。

定理 2.5[4]　设 P 是偏序集，$(\otimes,\to)$ 是 P 上的伴随对，则下列条件 (Mi) 与 (Ri) 等价（$i=2,3,\cdots,8$；对于 $i=2$，指当等式两边出现的并或交都存在时等式成立）

(M2) $a\otimes(\bigvee_i x_i)=\bigvee_i(a\otimes x_i)$

(R2) $(\bigvee_i y_i)\to a=\bigwedge_i x_i(y_i\to a)$

(M3) $(a\otimes b)\otimes c\leqslant a\otimes(b\otimes c)$

(R3) $b\to c\leqslant(a\to b)\to(a\to c)$

(M4) $a\otimes 1=a$

(R4) $a=1\to a$

(M5) $1\otimes a=a$

(R5) $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$

(M6) $a\otimes b=b\otimes a$

(R6) $a\leqslant b\to c$ 当且仅当 $b\leqslant a\to c$

*）国家自然科学基金资助项目（批准号：60273087）。宁波大学科研基金资助项目。张小红　教授，博士生，主要研究方向为代数学、人工智能原理及应用。何华灿　教授，博士生导师，主要研究领域为人工智能原理及应用、泛逻辑学。

(M7) $(a\otimes b)\otimes c\geqslant a\otimes(b\otimes c)$

(R7) $a\to b\leqslant(a\otimes c)\to(b\otimes c)$

(M8) $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$

(R8) $(a\otimes b)\to r)c=a\to(b\to c)$

B. Schweizer 与 A. Sklar 在文[7,8]中提出如下 T-范数定义(也可参见文[9,10])

$$T_p^{SS}(x,y)=\begin{cases}(x^{-p}+y^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}} & p\in(0,\infty)\\ \begin{cases}(x^{-p}+y^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}} & x^{-p}+y^{-p}\geqslant 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} & p\in(-\infty,0)\end{cases}$$

注:在 $p>0$ 时$(x^{-p}+y^{-p}-1)$可能无意义,比如出现 0 在分母上($x=0$ 或 $y=0$)。此时令其对应的 T-范数值为 0。对于 $p\to-\infty,p\to 0,p\to\infty$,Schweizer-Sklar T-范数定义为

$$T_p^{SS}(x,y)=\begin{cases}\begin{cases}0 & (x,y)\in[0,1)\times[0,1)\\ \min(x,y) & \text{otherwise}\end{cases} & p=-\infty\\ \min(x,y) & p=\infty\\ xy & p=0\end{cases}$$

容易证明,与 Schweizer-Sklar T-范数相伴的剩余蕴涵为(参见文[9])

$$I_p^{SS}(x,y)=\begin{cases}\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y & \text{otherwise}\end{cases} & p=\infty\\ \begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y/x & \text{otherwise}\end{cases} & p=0\\ \begin{cases}y & x=1\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases} & p=-\infty\\ \min(1,(1-x^{-p}+y^{-p})^{-\frac{1}{p}}) & p\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{cases}$$

需要说明的是,对于 $p\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$时,文[9]中没有对若干特殊点进行讨论,这使得最后的剩余蕴涵表达式出现歧义(比如,当 $p>0$ 时,$(1-x^{-p}+y^{-p})$可能非正;另外,$I_p(x,0)$中有 0 在分母上的子项)。为此,特作以下分析:

(1)当 $p>0$ 时,$I_p(x,0)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$

这是因为,按照剩余蕴涵的定义 $0\to 0=\sup\{z\mid T_p(0,z)\leqslant 0\}=\sup\{z\mid 0\leqslant 0\}=1$。而当 $x\neq 0$ 时,$x\to 0=\sup\{z\mid T_p(x,z)\leqslant 0\}=\sup\{z\mid T_p(x,z)=0\}=0$,因为 $p>0$,$x\neq 0$ 时只有 $z=0$ 满足 $T_p(x,z)=0$。

(2)当 $p>0$ 时,$(1-x^{-p}+y^{-p})$可能非正(比如 $1-0.1^{-2}+0.5^{-2}=-95$,$1-0.2^{-1}+0.25^{-1}=0$)。此时,按照剩余蕴涵的定义易得 $I_p(x,y)=1$(实际上,此时必有 $x<y$)。

当然,也可以仍用一个表达式

$$I_p(x,y)=\min(1,(1-x^{-p}+y^{-p})^{-\frac{1}{p}}),p\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

来表示与 Schweizer-Sklar T-范数相伴的剩余蕴涵,但需要作如下约定:$I_p(0,0)=1$;$x\neq 0$ 时 $I_p(x,0)=0$;如果$(1-x^{-p}+y^{-p})$非正,则项$(1-x^{-p}+y^{-p})^{-\frac{1}{p}}$消失(此时 $I_p(x,y)=1$)。

以下用$\otimes_p$ 表示 Schweizer-Sklar T-范数,$\to_p$ 是其对应的剩余蕴涵。

应用定理 2.4,2.5 及$(\otimes_p,\to_p)$为伴随对易得

定理 2.6 对于任何实数 $p<0$ 有$(\forall x,y,z\in[0,1])$

(SS6) $x\otimes_p y=y\otimes_p x$,

(SS7) $(x\otimes_p y)\otimes_p z=x\otimes_p(y\otimes_p z)$,

(SS8) $I\to_p x=x,1\otimes_p x=x$,

(SS9) $x\leqslant y$ iff $x\to_p y=1$,

(SS10) $x\to_p y\leqslant(z\to_p x)\to_p(z\to_p y)$,

(SS11) $(x\otimes_p y)\to_p z=x\to_p(y\to_p z)$,

(SS12) $a\otimes_p(\bigvee_i x_i)=\bigvee_i(a\otimes_p x_i)$,

$a\to_p\bigwedge_i y_i=\bigwedge_i(a\to_p y_i)$,$(\bigvee_i y_i)\to_p a=\bigwedge_i(y_i\to_p a)$,

(SS13) $x\to_p y\leqslant(x\otimes_p z)\to_p(y\otimes_p z)$。

实际上,可以直接验证以上各式成立。下面以(SS13)为例说明验证的方法:

分以下几种情况讨论(令 $\lambda=-p$,因为 $p<0$,故 $\lambda>0$):

(i)当 $1-x^\lambda+y^\lambda<1$ 时,易得 $x\to_p y(1-x^\lambda+y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$。

如果 $x^\lambda+z^\lambda-1>0,y^\lambda+z^\lambda-1>0$,则

$(x\otimes_p z)\to_p(y\otimes_p z)=(\min(1,1-(x^\lambda+z^\lambda-1)+(y^\lambda+z^\lambda-1)))^{\frac{1}{\lambda}}=(\min(1,1-x^\lambda+y^\lambda))^{\frac{1}{\lambda}}=(1-x^\lambda+y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$

即此时(SS13)成立。

如果 $x^\lambda+z^\lambda-1\leqslant 0$,则

$(x\otimes_p z)\to_p(y\otimes_p z)=0\to_p(y\otimes_p z)=(\min(1,1+(y\otimes_p z)^\lambda))^{\frac{1}{\lambda}}=1$

即此时(SS13)成立。

如果 $x^\lambda+z^\lambda-1>0,y^\lambda+z^\lambda-1\leqslant 0$,则

$(x\otimes_p z)\to_p(y\otimes_p z)=(x^\lambda+z^\lambda-1)^{\frac{1}{\lambda}}\to_p 0=(\min(1,1-(x^\lambda+z^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}=(1-(x^\lambda+z^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}$

由 $y^\lambda+z^\lambda-1\leqslant 0$ 可得 $y^\lambda\leqslant-(z^\lambda-1)$,从而

$(1-(x^\lambda+z^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}\geqslant(1-x^\lambda+y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}=x\to_p y$

即此时(SS13)成立。

(ii)当 $1-x^\lambda+y^\lambda\geqslant 1$ 时(即 $x^\lambda\leqslant y^\lambda$),易得 $x\to_p y=1$,而由 $x^\lambda\leqslant y^\lambda$ 可得

$x^\lambda+z^\lambda-1\leqslant y^\lambda+z^\lambda-1$,

$(\max(0,x^\lambda+z^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}\leqslant(\max(0,y^\lambda+z^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}$

即$(x\otimes_p z)\leqslant(y\otimes_p z)$,容易验证此时有$(x\otimes_p z)\to_p(y\otimes_p z)=1$,这说明(SS13)成立。

定理 2.7 对于任何实数 $p<0$ 有$(\forall x,y\in[0,1])$

(SS14) $(x\to_p y)\to_p y=(y\to_p x)\to_p x$,

(SS15) $\neg_p(\neg_p x)=x,x''=x$,

(SS16) $(x\otimes_p y)'=x'\otimes_p y'$,

(SS17) $(x\otimes_p y)'=x'\otimes_p y'$,

(SS18) $x\leqslant y$ iff $x'\geqslant y'$,

(SS19) $x\otimes_p y=\neg_p(x\to_p(\neg_p y))$,

其中$\neg_p x=x\to_p 0,x'=1-x,\otimes_p$ 为 Schweizer- Sklar T-余范数,即

$$x\otimes_p y=1-(\max(0,(1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1))^{-\frac{1}{p}}$$

证明:令 $\lambda=-p$,因为 $p<0$,故 $\lambda>0$。

先证(SS14)。如果 $x\geqslant y$,则

$$x\to_p y=(\min(1,1-x^\lambda+y^\lambda))^{\frac{1}{\lambda}}=(1-x^\lambda+y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$$

从而

$(x\to_p y)\to_p y=(\min(1,1-(1-x^\lambda+y^\lambda))^{\frac{1}{\lambda}}=(\min(1,x^\lambda))^{\frac{1}{\lambda}}=x$,

$(y\to_p x)\to_p x=1\to_p x=x$

即$(x\to_p y)\to_p y=(y\to_p x)\to_p x$。如果 $y\geqslant x$,据对称性知

$(x\to_p y)\to_p y=(y\to_p x)\to_p x=y$

总之,(SS14)成立。

在(SS14)中取 $y=0$ 易得$\neg_p(\neg_p x)=x$。而 $x''=x$ 则是显然的。

下证(SS16)成立:对任意 x,$y\in[0,1]$有

$(x\otimes_p y)'=1-(x\otimes_p y)=1-(\max(0,x^\lambda+y^\lambda-1))^{\frac{1}{\lambda}}$,

$x'\otimes_p y'=(1-x)\oplus_p(1-y)=1-(\max(0,(1-(1-x))^\lambda$

$+(1-(1-y))^{\lambda}-1))^{\frac{1}{\lambda}}$

显然$(x\otimes_p y)'=x'\oplus_p y'$。即(SS16)成立。应用 $x''=x$ 及(SS16)可得(SS17)。而(SS18)显然成立。

最后证明(SS19):$x\otimes_p y=\neg_p(x\rightarrow_p(\neg_p y))$。这是因为

$\neg_p(x\rightarrow_p(\neg_p y))=\neg_p(x\rightarrow_p(1-y^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}})=\neg_p(\min(1,1-x^{\lambda}+(1-y^{\lambda})))^{\frac{1}{\lambda}}=(1-\min(1,1-x^{\lambda}+(1-y^{\lambda})))^{\frac{1}{\lambda}}=(\max(0,x^{\lambda}+y^{\lambda}-1))^{\frac{1}{\lambda}}=x\otimes_p y$

3 逻辑系统 UL 在广义 H-赋值下的可靠性定理

定义 3.1[5] 设 S 是无穷集,$\neg$是 S 上的一元运算,$\vee$,$\rightarrow$ 是 S 上的二元运算。$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\vee,\rightarrow)$型自由代数。称 $F(S)$中具有以下各种形式的公式为公理:

(UL1)$A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL2)$A\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow B)$

(UL3)$(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(UL4)$A\rightarrow\neg\neg A$

(UL5)$A\rightarrow(A\vee B)$

(UL6)$(A\wedge B)\rightarrow A$

(UL7)$(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$

(UL8)$A\vee(B\vee C)\rightarrow(A\vee B)\vee C$

(UL9)$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

(UL10)$((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$

(UL11)$(B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow A\vee C)$

其中,$P\wedge Q$是$\neg(\neg P\vee\neg Q)$的简写。

UL 中有下述推理规则:MP 规则(分离规则)——由 A 和 $A\rightarrow B$ 推得 B。

由公式集 F(S)、公理(UL1)～(UL11)以及 MP 规则组成的系统称为系统 UL。

注:根据文[5,6]中的讨论,UL 系统中的$\wedge$、$\vee$是逻辑与、逻辑或的抽象,并不是最小、最大的抽象。

定义 3.2 函数 $v:F(S)\rightarrow[0,1]$叫做 $F(S)$的广义 H-赋值,如果 v 满足(其中 p 是某一确定的负数)

(i)$v(A\vee B)=1-(\max(0,(1-v(A))^{-p}+(1-v(B))^{-p}-1))^{-\frac{1}{p}}$;

(ii)$v(A\rightarrow B)=(\min(1-v(A)^{-p}+v(B)^{-p},1))^{-\frac{1}{p}}$;

(iii)$v(\neg A)=v(A\rightarrow 0)$。

可以在集合[0, 1]上引入运算$\oplus$, $\rightarrow$,$\neg$。对任意 x, $y\in[0,1]$规定

(i)$x\oplus y=1-(\max(0,(1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1))^{-\frac{1}{p}}$;

(ii)$x\rightarrow y=(\min(1-x^{-p}+y^{-p},1))^{-\frac{1}{p}}$;

(iii)$\neg x=x\rightarrow 0$

于是定义 3.2 中的条件可表述为:

$v(A\vee B)=v(A)\oplus v(B)$

$v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B)$

$v(\neg A)=\neg v(A)$

这就是说 $F(S)$的广义 H-赋值是从 $F(S)$到[0, 1]的同态。

容易知道,文[5]中的 H-赋值是 $p=-1$ 的广义 H-赋值。用 Ω 表示 $F(S)$的全体广义 H-赋值之集。

定义 3.3 设 A 是 $F(S)$中的公式,如果对任意的 $v\in\Omega$ 均有 $v(A)=1$,则称 A 为重言式(永真式),记为 $\vdash A$。如果 $A\rightarrow B$ 与 $B\rightarrow A$ 都是重言式,则称 A 与 B 逻辑等价。

容易验证 A 与 B 逻辑等价当且仅当对任意的 $v\in\Omega$ 均有 $v(A)=v(B)$。

定理 3.4(可靠性定理) UL 中的定理一定是重言式,即若 $A\in F(S)$且$\vdash A$,则$\vdash A$。

证明:为证明本定理,只需证明 UL 中的公理(UL1)～(UL11)都是重言式,并且 UL 中的 MP 推理规则保持重言式。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 是 $F(S)$中的公式,$E=g(A_1,A_2,\cdots,A_t)$是用$\neg$,$\rightarrow$,$\vee$把以上公式联结而得的公式,$v\in\Omega$,则由 v 为同态知

$v(E)=g'(v(A_1),v(A_2),\cdots,v(A_t))$

这里 $v(A_1),v(A_2),\cdots,v(A_t)$为[0,1]上的实数,$g'$作用于这些实数的方式恰如 g 作用于公式 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 的方式。对公式 A,B,C,分别以 p,q,r 记 $v(A),v(B),v(C)$,则易见 UL 中的各公理的赋值分别为

(1)$p\rightarrow(q\rightarrow p)$

(2)$p\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow q)$

(3)$(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$

(4)$p\rightarrow\neg\neg p$

(5)$p\rightarrow(p\vee q)$

(6)$(p\wedge q)\rightarrow p$

(7)$(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$

(8)$p\vee(q\vee r)\rightarrow(p\vee q)\vee r$

(9)$(\neg p\rightarrow\neg q)\rightarrow(q\rightarrow p)$

(10)$((p\rightarrow q)\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow p)\rightarrow p)$

(11)$(q\rightarrow r)\rightarrow(p\vee q\rightarrow p\vee r)$

应用定理 2.6、2.7 可以直接验证以上各式的值均为 1,比如(7)、(8)、(11)的值为 1 可分别由定理 2.6 的(SS6)、(SS7)、(SS13)得到,而(10)的值为 1 可由定理 2.7 的(SS14)得到。

以上证明了 UL 的 11 条公理都是重言式。以下证明 MP 推理规则保持重言式。事实上,设 A 和 $A\rightarrow B$ 都是重言式,则对任意赋值 v 均有 $v(A)=v(A\rightarrow B)=1$,从而

$v(B)=1\rightarrow v(B)=v(A)\rightarrow v(B)=v(A\rightarrow B)=1$

所以 B 为重言式,这说明 MP 规则保持重言式。定理证毕。

参考文献

1 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, 1998

2 Esteva F, Godo L. Monoidal t-normbased logic: towards a logic for left-continous t- norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271～288

3 何华灿,等. 泛逻辑学原理. 北京:科学出版社, 2001

4 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京:科学出版社, 2000

5 张小红,何华灿,李伟华. 泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 及其可靠性. 计算机科学, 2003,30 (11):21～24

6 张小红,何华灿,李伟华. 形式系统 UL 的弱完备. 计算机科学, 2003,30 (12):103～107

7 Schweizar B, Sklar A. Associative functions and abstract semigroups. Pub. Math. Debrecen, 1963, 10: 69～81

8 Schweizar B, Sklar A. Associative functions and statistical triangle inequalities. Pub. Math. Debrecen, 1961, 8: 169～186

9 Whalen T. Parameterized R-implications. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134:231～281

10 Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms. Volume 8 of Trends in Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000