

# Bézier 曲线最优参数化研究

郭凤华 杨兴强

(山东大学计算机科学与技术学院 济南250061)

**摘要** 本文采用一种重新参数化方法,计算比 Möbius 变换简单,通用性强。对这种重新参数化方法研究表明,该方法含有单一自由度,重新参数化一条多项式曲线,得到同一条曲线的不同参数化,可以从中找出最接近弧长的参数化,即最优参数化。采用这种重新参数化方法求出的曲线最优参数化与采用 Möbius 变换求出的最优参数化是一样的。实例表明了该方法的有效性。

**关键词** 重新参数化,单位速度,弧长参数化,最优参数化

## Research on Optimal Parametrization of Bézier Curve

GUO Feng-Hua YANG Xing-Qiang

(School of Computer Science and Technology, Shandong University, Jinan 250061)

**Abstract** A rational reparametrization function is used, compared with Möbius transformation, the function is very simple. Rational reparametrization of a polynomial curve is characterized by a single degree of freedom. Like Möbius transformation, further research shows the "optimal" reparametrization in this family (that comes closest under the  $L_2$  norm to arc-length parametrization) can also be identified by solving a quadratic equation. The function is proved to reach the same result with Möbius transformation as identifying the "optimal" parametrization of the same polynomial curve.

**Keywords** Reparametrization, Optimization, Unit speed, Arc-length parametrization

## 1 引言

在计算机辅助设计和辅助制造等实际应用中,往往要求弧长参数化,即参数域内均匀分布的点对应曲线上沿曲线弧长均匀分布的点。然而,CAGD 中常用的参数多项式曲线和有理多项式曲线不能取自身弧长为参数。文[1]给出了参数三次曲线不能取自身弧长为参数的证明。文[2]进一步给出了  $n$  次参数多项式曲线不能取自身弧长为参数的证明。

人们曾经采用多种方法使曲线参数化最接近弧长参数化。在计算机数字控制(CNC)实践中,文[3]实时地修补曲线参数化,使之最接近弧长参数化。文[4~6]提出多种逼近弧长参数化的方案,这些方案多数基于一组离散的位置满足给定的某种约束,这些最优参数化,不是真正意义上的最优参数化,因为缺少最优问题所具备的以下特征:

- 一个参数集合  $P$ ;
- $\forall p \in P$ , 定义一个函数  $\|p - p'\|$  度量  $p$  与弧长参数化  $p'$  的偏差;
- 算法明确表示存在一个  $p^*$ ,  $\forall p \in P$ , 满足  $\|p^* - p'\| \leq \|p - p'\|$ 。

满足以上策略的最优参数化是文[7]提出的,其参数集合  $P$  为重新参数化的集合,度量函数为曲线的参数速度偏离单位速度的  $L_2$  范数。

文[7]采用的重新参数化方法为 Möbius 变换(有理线性变换)。本文采用了一种重新参数化方法<sup>[8]</sup>,这种新方法比 Möbius 变换计算简单,通用性强。研究表明,新方法可以使用

文[7]的策略求出曲线的最优参数化。对最优参数化进一步研究发现,采用新方法求出的曲线最优参数化与采用 Möbius 变换求出的最优参数化是一样的。

文章第2节,回顾文[7]最优参数化方法。第3节给出新方法求曲线最优参数化的推导过程。证明了新方法 with Möbius 变换取得一致的最优参数化。第4节实例表明两种参数化方法得到同样的最优参数化。最后是结论。

## 2 最优参数化方法简介

假设  $r(t), t \in [0, 1]$  为参数曲线,曲线的总弧长

$$S = \int_0^1 \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt$$

其中  $\|dr/dt\|$  描述曲线的参数速度,即弧长  $S$  随着参数  $t$  变化的速度。让弧长  $S$  作为坐标的单位长度,得到曲线  $p(t) = r(t)/S$ 。有:

$$\int_0^1 \left\| \frac{dp}{dt} \right\| dt = 1 \quad (1)$$

给定一条  $n$  次多项式 Bézier 曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i b_i^n(t) \quad (2)$$

其中  $b_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$  for  $k = 0, \dots, n$

式(2)重新参数化后参数  $t = t(u)$ , (其中  $t(u)$  是多项式或者有理函数) 曲线变为  $q(u) = p(t(u))$ 。这里假定曲线式(2)是正则的,亦即至少是  $C^1$  连续,并且  $\|dp/dt\| > 0, t \in [0, 1]$ 。

1].文[7] 衡量曲线参数速度与弧长参数化接近程度的度量函数如下:

$$I = \int_0^1 \left( \left\| \frac{dq}{du} \right\| - 1 \right)^2 du \quad (3)$$

由(1)式,(3)式重写为:

$$I = \int_0^1 \left\| \frac{dq}{du} \right\|^2 du - 1$$

因此,最接近弧长的参数化是使下面算式取得最小值的参数化:

$$J = \int_0^1 \left\| \frac{dq}{du} \right\|^2 du \quad (4)$$

这里  $J \geq 1$   $J = 1$  是弧长参数化。

### 3 新方法的最优参数化

我们的新方法<sup>[8]</sup>:

$$t_a(u) = \frac{(1+a)u}{1+au} \quad a \in (-1, +\infty) \quad u \in [0,1] \quad (5)$$

式(5)的逆映射:

$$u_a(t) = \frac{t}{1+a-at} \quad a \in (-1, +\infty) \quad t \in [0,1] \quad (6)$$

把式(5)代入式(2)得到  $q(u) = p(t_a(u))$

由式(4)知,曲线式(2)取得最优参数化当且仅当新方法中的  $a$  使下面算式取得最小值:

$$J(a) = \int_0^1 \left\| \frac{dq}{du} \right\|^2 du = \int_0^1 \left\| \frac{d}{du} p(t_a(u)) \right\|^2 du$$

$$a \in (-1, +\infty)$$

接下来分析存在  $a \in (-1, +\infty)$  使得  $J(a)$  取最小值。根据链原则

$$J(a) = \int_0^1 \left\| \frac{d}{du} p(t_a(u)) \right\|^2 du = \int_0^1 \left( \left\| \frac{d}{du} t_a(u) \right\|^2 \left\| \frac{d}{dt} p(t_a(u)) \right\|^2 du \right)$$

因为  $u = u_a(t)$ , 用  $t$  替换上式  $u$  得到原先的参数  $t$ :

$$J(a) = \int_0^1 \left( \left\| \frac{d}{du} t_a(u) \right\| \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt \right) \quad (7)$$

又因为  $\frac{d}{du} t_a(u) = \left( \frac{d}{dt} u_a(t) \right)^{-1}$

由式(6),  $\left\| \frac{d}{dt} u_a(t) \right\|^{-1} = \frac{(1+a-at)^2}{1+a}$

把上式代入式(7)得到

$$J(a) = \int_0^1 \frac{(1+a-at)^2}{1+a} \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt \quad (8)$$

曲线式(2)是正则曲线,  $(d/dt)p(t) \neq 0$ , 因而存在两个常数  $C_1, C_2$ , 满足

$$0 < C_1 < \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\| < C_2 \quad t \in [0,1] \quad (9)$$

$$\text{又因为} \int_0^1 \frac{(1+a-at)^2}{1+a} dt = \frac{a^2 + 3a + 3}{3(1+a)} \quad (10)$$

由式(8)(9)(10):

$$C_1 \frac{(a + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}{3(1+a)} < J(a) < C_2 \frac{(a + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}{3(1+a)}$$

注意到:

$$\lim_{a \rightarrow -1} \frac{(a + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}{3(1+a)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(a + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}{3(1+a)} = +\infty$$

因此,存在  $a \in (-1, +\infty)$  使  $J(a)$  取得最小值, 这时  $a$

满足下面等式:

$$0 = \frac{d}{da} J(a) = \int_0^1 \left( 1 - 2t + \frac{at^2(a+2)}{(1+a)^2} \right) \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt$$

解上面等式得

$$a = -1 + \sqrt{\frac{W[2]}{W[0] - 2W[1] + W[2]}} \quad (11)$$

其中  $W[r] = \int_0^1 t^r \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt \quad r = 0, 1, 2$  的计算如下:

$$W[r] = \int_0^1 t^r \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt = \frac{1}{2n-1+r} \sum_{i=r}^{2n-2+r} \binom{2n-2}{i-r} \binom{2n-2+r}{i} C_{i-r}$$

$$C_k = \sum_{l=\max(0, k-n+1)}^{\min(n-1, k)} n^2 \frac{\binom{n-1}{l} \binom{n-1}{k-l}}{\binom{2n-2}{k}} \Delta p_l \cdot \Delta p_{k-l} \quad k =$$

$0, \dots, 2n-2$ , 其中  $\Delta p_k = p_{k+1} - p_k$

到此为止, 求出了新方法的最优参数化。对曲线的最优参数化进一步研究有下面的结论:

**定理1** 利用新方法取得的最优参数化与 Möbius 变换是一致的。

证明: 给定一条  $n$  次正则多项式 Bézier 曲线。(1) 新方法取得最优参数化。

曲线取得最优参数化时,

$$a = -1 + \sqrt{\frac{W[2]}{W[0] - 2W[1] + W[2]}} \quad (11)$$

令  $V = W[0] - 2W[1] + W[2]$ , 把式(11)代入式(5), 得到重新参数化函数为:

$$t_a(u) = \frac{(1+a)u}{1+au} = \frac{u \sqrt{W[2]}}{\sqrt{V} + (-\sqrt{V} + \sqrt{W[2]})u} \quad (12)$$

(2) Möbius 变换取得的最优参数化。Möbius 变换:

$$t_a(u) = \frac{(1-a)u}{a(1-u) + (1-a)u} \quad (13)$$

曲线取得最优参数化时,  $a$  满足下面关系式<sup>[9]</sup>:

$$0 = P(1-a)^2 + Qa^2 \quad (14)$$

其中  $P = \int_0^1 -B_0^2(t) \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt \quad Q = \int_0^1 B_2^2(t) \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt$

把  $P$  展开  $P = \int_0^1 -B_0^2(t) \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt = \int_0^1 -(1-t)^2 \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt = -V$

把  $Q$  展开  $Q = \int_0^1 B_2^2(t) \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt = \int_0^1 t^2 \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\|^2 dt = W[2]$

把  $P, Q$  代入式(14)求得:

$$a = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{V} + \sqrt{W[2]}} \quad (15)$$

把式(15)代入式(13)得到重新参数化函数:

$$t_a(u) = \frac{(1-a)u}{a(1-u) + (1-a)u} = \frac{u \sqrt{W[2]}}{\sqrt{V} + (-\sqrt{V} + \sqrt{W[2]})u} \quad (16)$$

视觉的编译选项管理,定义参数化模块的参数等工作。该可视化配置工具能够控制操作系统配置中的复杂性,极大地增加了系统的应用范围,减轻了开发的复杂度。

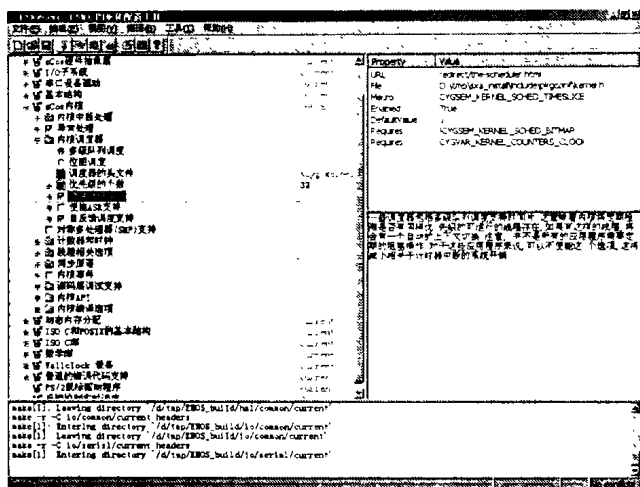


图6 可配置的嵌入实时操作系统

### 3.3 配置工具的基准测试

我们在配置工具内嵌入一个基准测试程序,验证所选构件的正确性以及检验所选构件是否能满足实际应用的需要。在构件设计时,由设计者提供相应的基准测试,与构件同时封装。在构件配置完成后,通过设置不同的基准参数,模拟嵌入

(上接第196页)

比较(12)和(16),对于同一条曲线利用新方法和 Möbius 变换取得最优参数化时,二者采用的变换是一致的,因而取得一致的最优参数化。

## 4 实例

一条二次多项式 Bézier 曲线(图1),我们的新方法取得了改进的参数速度曲线(图2)和改进的参数流(图3)。

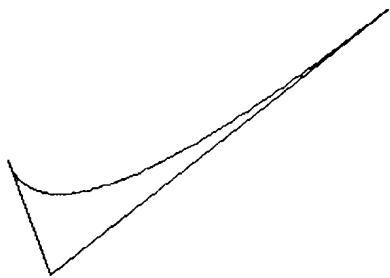


图1 一条二次多项式 Bézier 曲线段

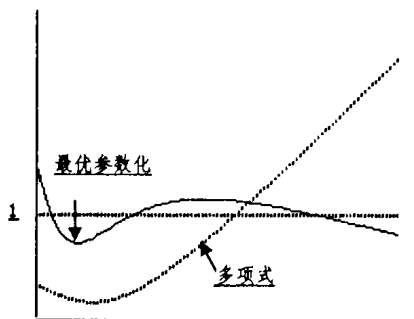


图2 参数速度比较

式应用的实际应用环境,测试构件状态,从而分析配置的合理性。

**结论** 我们研制的基于构件的可配置嵌入式操作系统具有自主知识产权,同时研制的构件定义语言和操作系统配置测试工具具有一定的创新性。可广泛用于实时嵌入式(如信息家电、掌上电脑、远程传感器等)计算机系统中,根据应用和环境的需要构造嵌入式系统,充分发挥嵌入式系统的功能,并最终降低嵌入式系统的开发和使用代价。

## 参考文献

- 1 Ciancarini P, Cimato S. Specifying Component-Based Software Architectures. In: Proc. of the ESEC/FSE Workshop on Foundations of Component-Based Systems (FoCBS), Zürich, Sep. 1999. 60~70
- 2 Cygnus eCos - Embedded Cygnus Operating System. Technical White Paper. <http://www.cygnus.com/ecos>, 2003
- 3 Szyperski C. Component Software Beyond Object-Oriented Programming. Addison-Wesley, ACM Press, New York, 2001
- 4 Takada H. ITRON: A Standard Real-Time Kernel Specification for Small-Scale Embedded Systems. Real-Time Magazine, 2000
- 5 Microsoft Corporation. Building the Componentized Operating System in Microsoft Windows CE 2.1. <http://www.microsoft.com/>
- 6 Stewart D B, Volpe R A, Khosla P K. Design of Dynamically Reconfigurable Real-Time Software Using Port-Based Objects. IEEE Transactions on Software Engineering, 1997, 23(12)
- 7 Ford B, Back G, Benson G, Lepreau J, Lin A, Shivers O. The Flux OSKit: A Substrate for Kernel and Language Research. In: Proc. of the 16th ACM Symposium on Operating Systems Principles, Saint-Malo, France, 1997
- 8 Gabber E, Small C, Bruno J, Brustoloni J, Silberschatz A. The Pebble Component-Based Operating System. In: Proc. of the USENIX Annual Technical Conf. Monterey, California, USA, 1999

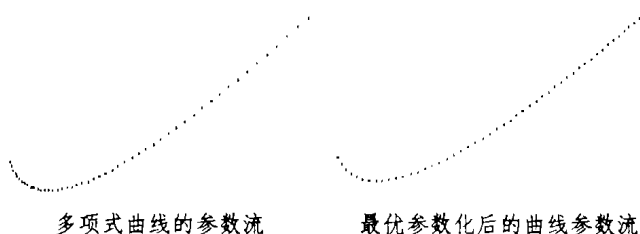


图3 参数流比较

$J$  从多项式曲线的 1.22 降为最优参数化后的 1.007 ( $J=1$  是弧长参数化)这个结果与 Möbius 变换取得的最优参数化一致。在实际应用的多数情况下,这个参数化与弧长参数化已经很难区分。

**结论** 利用我们的新方法可以求出多项式 Bézier 曲线的最优参数化。对于同一条曲线新方法求出的最优参数化和 Möbius 变换取得的最优参数化是一致的,且计算比 Möbius 变换简单,通用性强。

## 参考文献

- 1 Farouki R T, Sakkalis T. Real rational curves are not "unit Speed". Computer Aided Geometric Design, 1991, 8: 151~157
- 2 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 高等教育出版社, 2001
- 3 Farouki R T, Feldman B. Performance analysis of CNC interpolators for time dependent federates along PH curves. CAGD, 2001, 18: 245~265
- 4 Ong B H. An extraction of almost arc-length parameterization for parametric curves. Ann. Number. Math, 1996, 3: 305~316
- 5 Wang F C, Wright P K. Open architecture controllers for machine tools, Part 2: A real time quintic spline interpolator. ASME J. Manufacturing Science and Engineering, 1998, 120: 415~432
- 6 Wang F C, et al. Approximately arc-length parameterized quintic interpolating splines. ASME J. Mech. Design, 1999, 121: 430~439
- 7 Farouki R T. Optimal parameterizations. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14: 153~168
- 8 梁锡坤. Bernstein Bézier 类曲线和 Bézier 曲线的重新参数化方法. 计算机研究与发展, 2004, 41(6): 1016~1021
- 9 Jüttler B. A vegetarian approach to optimal parameterizations. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14: 887~890