

## 用定阈值 Wiener 滤波去除图像噪声\*)

鲁瑞华<sup>1</sup> 杨明<sup>2</sup>(西南师范大学电子信息工程学院 重庆400715)<sup>1</sup> (西南师范大学计算机与信息科学学院 重庆400715)<sup>2</sup>

**摘要** 本文介绍了 Wiener 滤波中的统计误差,提出 Wiener 滤波去噪性能可以通过定阈值对图像作预处理得到提高,用标准 Wiener 滤波法、逆滤波法及定阈值 Wiener 滤波法对退化图像进行处理的结果表明,在进行图像恢复时,标准 Wiener 滤波效果比逆滤波好,定阈值 Wiener 滤波则优于标准 Wiener 滤波和逆滤波。

**关键词** Wiener 滤波,图像去噪,定阈值,均方误差

## Image Denoising Using Prethresholding Wiener Filtering

LU Rui-Hua<sup>1</sup> YANG Ming<sup>2</sup>(School of Electronics and Information Engineering, Southwest China Normal University, Chongqing 400715)<sup>1</sup>(School of Computer and Information Science, Southwest China Normal University, Chongqing 400715)<sup>2</sup>

**Abstract** This paper introduces the statistical errors occurring in Wiener filtering and presents possibility of improving Wiener filtering performance in image denoising using prethresholding as a processing step. The results obtained by standard Wiener filtering, inverse filtering and prethresholding Wiener filtering in degenerated image processing show that in image restoration standard Wiener filtering is better than inverse filtering and prethresholding Wiener is much better than both standard Wiener filtering and inverse filtering.

**Keywords** Wiener filtering, Image denoising, Prethresholding, Mean square error

## 1 引言

滤波的目的是让所需频率的信号顺利通过,而将不需要的频率的信号(噪声)消除掉。当信号和噪声的频谱不相重叠时,可以用带通滤波器分离信号和噪声;当信号和噪声的频谱相互重叠时,就需要采用 Wiener 滤波得到信号线性最小均方误差估计<sup>[1]</sup>。Wiener 滤波是使恢复图像与其原始图像之间的均方误差最小的恢复图像方法。Wiener 滤波恢复图像的思想是在假设图像信号可近似看成平稳随机过程的前提下,按照使复原图像与原图像的均方误差最小准则来恢复图像。一般,若

$\frac{1}{\text{拉格朗日系数}} = 1$ ,为标准 Wiener 滤波,若  $\frac{1}{\text{拉格朗日系数}} \neq 1$ ,为参数 Wiener 滤波。Wiener 滤波法具有如下特点:

(1)当传递函数趋于0或幅值很小时,分母不为0,不会造成严重的运算误差;(2)当噪声的谱密度趋于0时,Wiener 滤波复原方法就是逆滤波复原方法;(3)当估计图像的功率谱密度趋于0时,图像的估计值趋于0,这表示图像无有用信息存在,因而不能从完全是噪音的信号“复原”有用信息<sup>[2]</sup>。

从文[3,6]可知,使用空间自适应统计模型可以获得最佳去噪结果。这些模型通常假定子波系数是与条件无关的高斯随机变量,其参数随空间而变化。噪声通常建模为平稳独立的零均值高斯变量(Zero-mean Gaussian Variables)。因为信号和噪声为高斯信号和高斯噪声,此信号可以用 Wiener 滤波获得最佳估计<sup>[3]</sup>。然而,因为通常由尺寸为 $3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7$ 的方形视窗决定的邻域大小有限,致使估算的准确度不高。信号功率估算误差对出现在局部 Wiener 滤波中的均方误差有一定的影响,此种影响可以用近似阈值预定阈值的办法加以减少。

假定有一个被零均值高斯噪声污染的高散图像。噪声图像系数由下式求得:

$$y_{i,j} = s_{i,j} + n_{i,j} \quad (1)$$

在此方程中, $s_{i,j}$ 表示“未污染”图像系数, $n_{i,j}$ 指噪声各成份,为简便起见,标度和方向的下标将予以省略。

子波变换具有正交性。所谓正交性是指,如果噪声序列是用具有零均值和方差 $\sigma_n^2$ 的独立正交变量建模的,则子波域中的序列 $n_{i,j}$ 也是具有零均值和方差 $\sigma_n^2$ 的。由于正交子波变换的去相关特性,可以假定原始图像信号的成份 $s_{i,j}$ 是不相关的,则可把 $s_{i,j}$ 建模为具有空间变化方差的零均值条件下的高斯随机变量。

## 2 Wiener 滤波中的统计误差分析

既然假定子波空间的信号成份是不相关的,而噪声是与信号不相关的独立高斯变量,那么 Wiener 滤波的范式则简化为标量关系式:

$$a_{i,j} = \frac{E\{s_{i,j}^2\}}{E\{y_{i,j}^2\}} \quad (2)$$

$$\hat{s}_{i,j} = a_{i,j} y_{i,j} \quad (3)$$

式中 $\hat{s}_{i,j}$ 为信号成份 $s_{i,j}$ 的最佳线性估算。考虑到信号和噪声的不相关性,可以得到

$$E\{s_{i,j}^2\} = E\{y_{i,j}^2\} - \sigma_n^2 \quad (4)$$

期望值 $E\{y_{i,j}^2\}$ 可以从系数 $y_{i,j}$ 的邻域估算获得,也可以从包括下一个粗略标度同一位置和方向上各系数的广义邻域估算获得<sup>[3]</sup>。在不失去通用性的情况下,可以假设这些估算是通过求 $(i,j)$ 上中心视窗中 $y_{i,j}$ 的平方值的平均值获得的,但应满足以下要求:

$$Q_{i,j} = \sum_{k=-R}^R \sum_{l=-R}^R y_{i-k,j-l}^2, M = (2R+1)^2 \quad (5)$$

$$q_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{M} \quad (6)$$

\*)基金项目:西南师范大学科技基金资助项目(编号SWNUF2004006)。鲁瑞华 教授,硕士生导师,主要研究方向为信号与信息处理及数字通信。杨明 博士研究生,主要研究人工智能与智能信息处理。

获得期望平均值的近似值  $E\{y_{i,j}^2\} \approx q_{i,j}$  之后,可以把期望值  $E\{s_{i,j}^2\}$  表示为:

$$E\{s_{i,j}^2\} = q_{i,j} - \sigma_n^2 \quad (7)$$

其结果是, Wiener 滤波系数可以表示为

$$a_{i,j} = \frac{q_{i,j} - \sigma_n^2}{q_{i,j}} \quad (8)$$

约束  $E\{s_{i,j}^2\} \geq 0$  导致式(8)分母取最大  $(q_{i,j} - \sigma_n^2, 0)$  的形式。

将局部期望平方误差 (local expected square error, LESE) 定义为:

$$LESE = E\{[s_{i,j} - a_{i,j}y_{i,j}]^2\} \quad (9)$$

表达式(9)的期望值是使用从  $y_{i,j}$  的邻域估算所得参数计算出来的。将  $b_{i,j} = \sigma_n^2 / (q_{i,j})$  代入,求期望误差的表达式可改写为:

$$LESE = E\{[s_{i,j} - (1 - b_{i,j})(s_{i,j} + n_{i,j})]^2\} \quad (10)$$

简化为:

$$LESE = E\{[b(s+n) - n]^2\} \quad (11)$$

在此,再作一个假设,这就是变量  $b$  与  $s$  和  $n$  都不相关。如果求平均值的视窗的尺寸不是太小的话,这个假设是可以成立的。

用式(7)并代入  $q = E\{s^2\} + \sigma_n^2$ ,可将式(11)改写为:

$$LESE = E\{b^2\}q + \sigma_n^2[1 - 2E\{b\}] \quad (12)$$

需要计算  $E\{b^2\} = \text{var}\{b\} + [E\{b\}]^2$ , 式中的  $\text{var}\{b\} = M^2\sigma_n^4 \text{var}\{1/Q\}$

考虑到  $s$  和  $n$  是不相关的零均值高斯变量,变量  $Q$  有  $x^2$  的分布并且有  $M$  度的自由度,方差等于  $2Mq^2$ ,为了确定  $f(Q) = 1/Q$  的方差,使用以  $Q$  的期望值为中心的函数  $f(Q)$  的 Taylor 级数展开的第1和第2两项,从这个级数展开可以获得期望值的近似值如下:

$$E\{b\} = \frac{\sigma_n^2}{q} \quad (13)$$

$$E\{b^2\} = \frac{2\sigma_n^4}{Mq^2} + \frac{\sigma_n^4}{q^2} \quad (14)$$

最后,将式(13)和(14)代入(12)可得:

$$LESE = \frac{2\sigma_n^4}{Mq} + \sigma_n^2 - \frac{\sigma_n^4}{q} \quad (15)$$

假设,如果

$$LESE > E\{s^2\} \quad (16)$$

则线性估算很不好,比较好的解决办法是设  $S=0$ 。这可以看作是具体环境的定阈值。

用式(7)并代入  $E\{s^2\} = q - \sigma_n^2$ ,可以将式(16)改写为

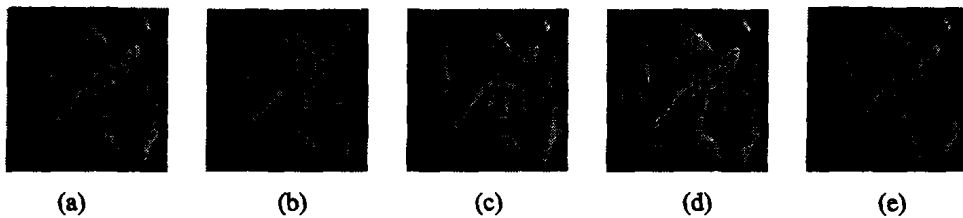


图1 几种滤波法效果比较

(a)为原始图像,(b)为加噪图像,(c)、(d)、(e)分别为用标准 Wiener 滤波法、逆滤波法及定阈值 Wiener 滤波法处理后的结果。

标准 Wiener 滤波法指的是不用预定阈值的 Wiener 滤波;逆滤波法指由退化图像的傅里叶变换确定原图像傅里叶变换的估计方法;定阈值 Wiener 滤波法指的是本文提出的以定阈值作为 Wiener 滤波预处理步骤的方法。分别用三种方法对退化图像进行处理的结果表明,在进行图像恢复时,标准 Wiener 滤波效果比逆滤波要好,尤其是退化图像的噪声干扰较强时,效果更为明显。利用逆滤波复原时,若噪声为零,则能

$$\frac{2\sigma_n^4}{Mq} + 2\sigma_n^2 - \frac{\sigma_n^4}{q} > q \quad (17)$$

解(17),得

$$q < k\sigma_n^2 \quad (18)$$

式中

$$k = 1 + \sqrt{\frac{2}{M}} \quad (19)$$

例如,  $M=9, 25, 49$  时,则  $k$  分别为 1.47, 1.28, 1.20。

### 3 定阈值 Wiener 滤波算法

假设噪声变量  $\sigma_n^2$  为已知。即使  $\sigma_n^2$  不是已知,它也可以用健壮中值估算器从最佳分辨率子带估算出<sup>[7]</sup>。

定阈值 Wiener 滤波算法如下:

1) 通过核心大小为  $M$  的卷积  $\{y_{i,j}^2\}$  计算  $\{q_{i,j}\}$ 。此核心的大小将随分解级不同而变化,本文中使用的值在第1(最佳标度)级为  $M=49$ ,在其他级则  $M=9$ 。此外,还计算常量  $k$  的合适值。

2) 根据改进的规则应用定阈值。

如果  $q_{i,j} > k\sigma_n^2$ , 则  $\hat{s}_{i,j} = y_{i,j}$ , 否则  $\hat{s}_{i,j} = 0$

定阈值之后得到立即集  $\{\hat{s}_{i,j}\}$ , 此立即集是集  $\{y_{i,j}\}$  部分去噪子集。信号能量的改进估算将在集  $\{\hat{s}_{i,j}\}$  上得出,此集是稀疏的,由此能够看到子波分解的好处。从  $\hat{s}_{i,j}$  的空间分布可以看到相应于信号(加噪声)的成份的大群聚和噪声的小群聚。信号群聚区域内的信噪比只有轻微的变化,而信号功率估算的公式仍然是高效的。由于在 Wiener 滤波系数分母中实现的是正约束,即最大  $(q_{i,j} - \sigma_n^2, 0)$ , 它作为显式定阈值起作用,通过在立即集  $\{\hat{s}_{i,j}\}$  上执行的求平均值能够使噪声群聚变稀疏。因此,在应用 Wiener 滤波之前先使用第二遍卷积。

3) 通过应用具有步骤2)中同样核心的立即集  $\{\hat{s}_{i,j}\}$  的第二遍卷积再计算。

4) 使用下式应用 Wiener 滤波

$$\hat{s} = \frac{\max(q_{i,j} - \sigma_n^2, 0)}{q_{i,j}} \hat{s}_{i,j} = \hat{a}_{i,j} \hat{s}_{i,j}$$

在此表达式中也可以用  $y_{i,j}$  取代  $\hat{s}_{i,j}$ , 因为定阈值的效果在  $\hat{a}$  的计算中是不相同的。

### 4 实验结果和结论

实验是用三种不同方法进行的,结果如图1所示。

完全再现原图像;若噪声存在而系统的传递函数很小或为零时,则噪声被放大。这意味着退化图像中小噪声的干扰在传递函数较小时会对逆滤波恢复的图像产生很大的影响,有可能使恢复的图像和原图像相差很大,甚至面目全非。标准 Wiener 滤波的去噪性能可以通过定阈值对图像作预处理得到提高,即采用定阈值 Wiener 滤波法在进行图像恢复时效果要优于标准 Wiener 滤波和逆滤波。与标准 Wiener 滤波相比,定阈值会增大峰值信噪比,噪声标准偏差  $SD=50$  时可达 1dB。用定阈值 Wiener 滤波技术取得的结果优于标准 Wiener 滤波。

# 小波多尺度模糊竞争边缘检测

尚 晋<sup>1</sup> 施成湘<sup>2</sup>

(重庆电子职业技术学院计算机二系 重庆400021)<sup>1</sup> (重庆大学数理学院 重庆400044)<sup>2</sup>

**摘要** 本文提出了一种小波多尺度模糊竞争边缘检测方法(WFCE)。凭借小波多尺度理论去噪和准确定位的优势,算法有效地利用了多尺度的滤波以及模糊竞争分类法则,较好地保留了图像的细节部分,提高了抗噪性。实验结果表明,与传统的边缘提取算法和模糊竞争算法相比,小波多尺度模糊竞争边缘检测方法(WFCE)能得到更满意的效果,尤其在抗噪性能上的结果是相当的理想。

**关键词** 小波变换,多尺度,模糊竞争法则,边缘检测

## Wavelet Multi-scale Fuzzy Competitive Edge Detection

SHANG Jin<sup>1</sup> SHI Cheng-Xiang<sup>2</sup>

(The Second Department of Computer, Chongqing Electronic Profession College, Chongqing 400021)<sup>1</sup>

(Department of Mathematics & Physics, Chongqing University, Chongqing 400044)<sup>2</sup>

**Abstract** This paper proposes a new Wavelet Multi-scale Fuzzy Competitive Edge Detection algorithm (WFCE). Based on the advantages of less noise and pinpoint in the multi-scale field, the novel algorithm applies multi-scale filter and competitive fuzzy rules to edge detection effectively, holds the image details and improves the noise proof feature. Compared with traditional edges and competitive fuzzy edge detection, WFCE achieves better results, especially on the noise proof feature facet.

**Keywords** Wavelet transforms, Multi-scale, Fuzzy competitive rules, Edge detection

## 1 引言

边缘检测是图像处理和分析中非常重要的过程。作为图像目标最基本的特征之一的边缘含有图像中的重要信息,如用以标记间断点或灰度起伏变化显著点的图像边缘,提供目标轮廓的位置信息等等。因此边缘检测对于图像分析具有重要的作用。到目前为止,人们已经提出了许多经典的边缘检测算法,如微分算子、拉普拉斯高斯算子、广义 Hough 变换法<sup>[1]</sup>、canny 最优滤波器<sup>[2]</sup>、小波边缘检测算法<sup>[3]</sup>、基于小波多尺度积的边缘检测算法<sup>[4]</sup>等等。

近年来,模糊理论已成功地应用到自动控制、图像处理、模式识别、机器视觉等领域。边缘信息在图像分析中被部分隐藏(不完全性)或歪曲(模糊性),这是由多种因素引起的:(1)三维目标投影为二维图像时有信息丢失;(2)边缘、边界、区域、纹理等定义存在模糊性;(3)因为对图像低层处理结果的解释带有模糊性,所以在图像处理中经常采用模糊数学方法。如今模糊技术现已广泛用于图像的边缘检测。2003年 Siwei Lu, Ziqing Wang 和 Jun Shen 谈到利用模糊神经网络来提取边缘<sup>[5]</sup>。Lily Rui Liang 和 Carl G. Looney 提出一种模糊竞争边缘检测算法<sup>[6]</sup>。根据像素8邻域上灰度值的变化,竞争算法(CFED)引入四维特征向量,利用模糊隶属度函数(Extended

Epanechnikov Function)对像素点进行竞争分类。算法优点就在于其有别于传统的检测方法,非常巧妙地借助边缘突变点灰度的变化引入四维特征向量,融合模糊竞争的思想,将模糊定位的优势充分地体现出来。但值得一提的是,图像细节地方的提取仍不是特别的理想,而且,抗噪性能也不是非常的高。本文针对这些不足进行了深层次的研究。竞争算法只将模糊竞争思想应用在了一个尺度下面,我们考虑在多个尺度下面共同检测图像。这无疑会使边缘的准确性得以提高,弥补算法的不足。我们知道,小波变换在不同尺度上都提供了一定的图像边缘信息。分辨率高(小尺度)时,图像的边缘细节较为丰富,边缘定位精度较高,但易受到噪声干扰;分辨率低(大尺度)时,图像的边缘稳定,抗噪性好,但定位精度差。小波多尺度模糊竞争边缘检测算法(WFCE)就是在多尺度下结合模糊竞争法则实现边缘的精定位和低噪声。实验证明,WFCE 能够准确地检测图像的边缘,提高抗噪性能。

## 2 概念与原理

### 2.1 特征向量 $x$ 的定义

对一个坐标为  $(x, y)$  的像素  $p$ , 它有两个水平和两个垂直的近邻像素。如图1所示,在以  $p_5$  为中心的四个不同方向上,  $p_5$  及其邻域像素之间存在着灰度值的差异。正是利用这一

尚 晋 硕士研究生,讲师,主要研究方向是图像处理和信息安全。施成湘 硕士研究生,主要研究方向是小波分析与计算机图像处理。

## 参考文献

- 1 王欣,王德勇. 离散信号的滤波. 北京:电子工业出版社,2002. 28~37
- 2 容观澳. 计算机图像处理. 北京:清华大学出版社,2000. 181~183
- 3 Portilla J, Strela V, Wainwright M J, Simocelli E P. Adaptive Wiener denoising using a Gaussian scale mixture model in the wavelet domain. In: Proc. 8th Int. Conf. Image processing, Thessaloniki, Greece, Oct. 2001
- 4 Mihcak M K, Kozinsev I, Ramchandran K, Moulin P. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients. IEEE Signal Processing Lett., 1999, 6: 300~303
- 5 Chang S A G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. IEEE Trans. Image Processing, 2000, 9: 1332~1546
- 6 Li X, Orchard M T. Spatially adaptive image denoising under over-complete expansion. In: Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing, Sept. 2000
- 7 Donoho D L, Johnston I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. Biometrika, 1994, 81: 425~455