

带偏置的选择性神经网络集成构造方法^{*}

王正群 陈世福 陈兆乾

(南京大学计算机软件新技术国家重点实验室 南京210093) (扬州大学信息工程学院 扬州225009)

摘要 训练多个神经网络并将其结果进行合成,能显著地提高神经网络系统的泛化能力。本文提出了一种带偏置的选择性神经网络集成构造方法。对个体网络引入偏置项,增加可选网络的数量。选择部分网络集成,改善网络集成的性能。把个体网络的偏置项统一为集成偏置项,在训练出个体神经网络后,使用遗传算法选择部分网络集成,同时确定集成偏置项。理论分析和实验结果表明,该方法能够取得很好的网络集成效果。

关键词 神经网络,神经网络集成,遗传算法,机器学习,优化

Selective Neural Network Ensemble with Bias

WANG Zheng-Qun CHEN Shi-Fu CHEN Zhao-Qian

(State Key Laboratory for Novel software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093)

(School of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009)

Abstract Neural network ensemble is a learning paradigm, which integrates many neural networks into an ensemble to solve a problem jointly. In this paper, the relationship between the ensemble and its component neural networks is analyzed and a novel approach for the construction of the selective neural network ensemble with bias is proposed. The genetic algorithm is used to select part of the trained individual networks to be integrated and the bias is determined to correct the combination of the ensemble simultaneously. Theoretical analysis and experimental results show that this approach allows one to design effective neural network ensemble.

Keywords Neural networks, Neural network ensembles, Machine learning, Optimization

1 引言

1990年, Hansen 和 Salamon^[1]开创性地提出了神经网络集成(neural network ensemble)方法。他们证明,可以通过训练多个神经网络并将其结果进行合成,显著地提高神经网络系统的泛化能力。由于该方法易于使用且效果明显,即使是缺乏神经计算经验的普通工程技术人员也可以从中受益。因此,神经网络集成已成为目前神经网络界的热点。

典型的神经网络集成构造方法分如下两步实现^[2]:首先训练一批神经网络,然后对这些网络的输出结论以某种方式进行结合,构成神经网络集成。Krogh 等人^[3]通过理论研究发现,组成神经网络集成的各网络差异越大,集成的效果越好。网络的差异由使用的训练集、网络结构、学习算法的差异产生。有可能产生彼此非常相似的神经网络,这些网络对整个神经网络集成泛化能力的提高可能并不起作用。Zhou 等人^[4,5]提出了一种选择性神经网络集成构造方法,从独立训练的一批神经网络中,选择出差异度较大的神经网络,由它们组成神经网络集成。这种方法能够有效地降低神经网络的泛化误差。

由于最初生成的个体神经网络数量有限,对它们加入偏置项,极大地增加了可选择个体神经网络的数量,从而有利于降低神经网络集成的泛化误差。本文提出一种带偏置的神经网络集成构造方法:在独立地训练出一批神经网络后,对它们加入偏置项,通过遗传算法选择出部分差异度较大的神经网络,组成神经网络集成。理论分析与实验结果表明,这种方法比已有的方法更有效。

2 神经网络集成

神经网络集成是用有限个神经网络对同一个问题进行学习,集成在某输入示例下的输出,由构成神经网络集成的各神经网络在此示例下的输出共同决定^[3]。神经网络集成方法可以应用于很多领域,为便于讨论,本文仅考虑神经网络用于回归分析的情况。

回归型神经网络集成的学习目的可视为模拟函数 $f: R^n \rightarrow R^n$ 。假设神经网络集成由 N 个神经网络 f_1, f_2, \dots, f_N 组成,各网络被赋予权值 $\omega_i (i=1, 2, \dots, N)$, 满足 $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$, 采用加权平均法组成神经网络,即

$$Out_{ensemble} = \sum_{i=1}^N \omega_i Out_i \quad (1)$$

式(1)中 $Out_{i,k}$ 为第 i 个网络的第 k 个输出分量。当 $\omega_i = \frac{1}{N} (i=1, 2, \dots, N)$ 时,称这种组成神经网络集成的方法为简单平均法。为了简单起见,本文仅讨论一个输出分量的情况,但是本文的结论也能推广到有多个输出分量的情形。

假设输入 $x \in R^n$ 满足分布 $p(x)$, 若在输入 x 下目标输出为 $d(x)$, 神经网络 $f_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的输出为 $f_i(x)$, 则神经网络集成在输入 x 下的输出定义为 $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i f_i(x)$, 并定义如下各量:

①神经网络集成的泛化误差:

^{*}国家自然科学基金资助项目(No. 620273033)。

$$E = \int p(x)(\bar{f}(x) - d(x))^2 dx \quad (2)$$

② 各神经网络 $f_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的泛化误差:

$$E_i = \int p(x)(f_i(x) - d(x))^2 dx \quad (3)$$

③ 各神经网络泛化误差的加权平均值:

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^N \omega_i E_i \quad (4)$$

④ 神经网络 $f_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的差异度:

$$A_i = \int p(x)(f_i(x) - \bar{f}(x))^2 dx \quad (5)$$

⑤ 神经网络集成的差异度:

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \omega_i A_i \quad (6)$$

Krogh 等人通过理论分析得到如下神经网络集成泛化误差的计算公式:

$$E = \bar{E} - \bar{A} \quad (7)$$

由于各网络的差异度均非负,从式(7)可知,神经网络集成的泛化误差 E 不大于各神经网络的泛化误差的加权平均值 \bar{E} , 增大其差异度 \bar{A} (也就是增大差异度 A_i) 能够有效地降低神经网络集成的泛化误差。

典型的一类构造神经网络集成的方法分两步进行:首先独立地训练多个神经网络,然后用这些神经网络通过加权平均或者简单平均方法进行集成。由于使用加权平均有可能导致过配(overfitting)^[6],因此很多研究者推荐使用简单平均法。由这种方法生成的神经网络集成中,各个神经网络的差异度通常由神经网络使用的训练集、网络结构、学习算法的差异或者学习算法的随机性来保证,所以可能存在彼此相似的个体神经网络,这种网络不一定能够促使集成泛化误差的降低,还有可能起相反的作用^[7]。针对这种情况,Zhou 等^[4,5]提出了一种基于遗传算法的选择性神经网络集成方法。

本文提出一种带偏置的选择性神经网络集成方法。对个体神经网络增加偏置量,一方面改变了它与其它神经网络之间的关系,另一方面,极大地增加了可选择的个体神经网络数量。下面我们给出把参与集成的个体神经网络的偏置项统一为网络集成的偏置项的理论依据。应用遗传算法,从一组神经网络中选择参与集成的部分神经网络,同时确定神经网络集成的偏置量。

3 带偏置的选择性集成

3.1 理论分析

假设已有由 N 个神经网络 f_1, f_2, \dots, f_N , 使用简单平均方法组成的神经网络集成 \bar{f} 。现在考虑剔除神经网络 f_N 后,由 f_1, f_2, \dots, f_{N-1} 用简单平均方法组成的神经网络集成 \bar{f}' , 满足:

$$\bar{f}'(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) / (N-1) \quad (8)$$

定义神经网络 f_i 与 f_j 的相关度为:

$$C_{ij} = \int p(x)(f_i(x) - d(x))(f_j(x) - d(x)) dx \quad (9)$$

注意 $C_{ii} = E_i$, 且 $C_{ij} = C_{ji}$, 由于 $\bar{f}(x) - d(x) = \sum_{i=1}^N (f_i(x) - d(x)) / N$, 因此有

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} / N^2 \quad (10)$$

考虑 \bar{f} 的泛化误差 E 与 \bar{f}' 的泛化误差 E' 的大小关系。根据式(10), \bar{f}' 的泛化误差为:

$$E' = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij} / (N-1)^2 \quad (11)$$

由式(10)、(11), 得:

$$(N-1)^2 N^2 (E' - E) = (2N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij} - 2(N-1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_{iN} + (N-1)^2 C_{NN} \quad (12)$$

$$(2N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij} < 2(N-1)^2 \sum_{i=1}^{N-1} C_{iN} - (N-1)^2 C_{NN} \quad (13)$$

由于有式(12), 因此当式(13)满足时, $E' < E$ 成立, 即剔除神经网络 f_N 后, 神经网络的泛化能力得到了提高^[4,5], 这就证明了:在独立训练生成若干个神经网络后, 首先进行选择操作, 剔除部分神经网络, 然后用剩下的部分神经网络组成神经网络集成, 能够具有比使用所有神经网络构成的神经网络集成更好的泛化能力。

现在考虑 f_N 给增加一个偏置量 δ_N , 即用 $f_N + \delta_N$ 代替 f_N 。由式(12)有:

$$(N-1)^2 N^2 (E' - E) = (2N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij} - 2(N-1)^2 \sum_{i=1}^{N-1} C_{iN} + (N-1)^2 C_{NN} - 2(N-1)^2 \int p(x)(f_N(x) - d(x)) dx - \int p(x)(f_N(x) - d(x)) dx \delta_N + (N-1)^2 \delta_N^2 \quad (14)$$

在式(14)中, 由于 δ_N^2 的系数 $(N-1)^2$ 是正数, 这就表明, 即使有式(13), 使 $E' < E$ 成立, 但有可能存在 f_N 的偏置量 δ_N , 使得用 $f_N + \delta_N$ 代替 f_N 后, $E' > E$ 成立。

对独立训练生成每个神经网络 $f_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 都增加一个偏置量 δ_i 。由以上分析, 偏置量改变了初始生成的各神经网络之间的关系。对于输入 x , 设 $f_i^{\delta}(x) = f_i(x) + \delta_i$ 。考虑一种极端情形, 当 $\delta_i = 0$ 时, $f_i^{\delta}(x) = f_i(x)$, 因而, 在 $f_i^{\delta} (i = 1, 2, \dots, N)$ 中, 选择部分神经网络组成神经网络集成, 我们有理由相信, 它不仅具有比使用所有神经网络构成的神经网络集成更好的泛化能力, 而且具有比使用 Zhou 等的方法构成的神经网络集成更好的泛化能力。

现在面临两个问题:①对于个体神经网络 f_i 如何选取偏置量 δ_i , 以改变它与其它个体神经网络的关系;②如何选择部分神经网络 $f_i^{\delta} (f_i^{\delta}(x) = f_i(x) + \delta_i)$ 参与集成。

本文考虑使用简单平均法对神经网络进行集成, N 个神经网络 f_i^{δ} 集成在输入 x 下的输出为:

$$\bar{f}^{\delta}(x) = \sum_{i=1}^N f_i^{\delta}(x) / N \quad (15)$$

设 $\delta = \sum_{i=1}^N \delta_i / N$, $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x) / N$, 由式(15):

$$\bar{f}^{\delta}(x) = \sum_{i=1}^N f_i^{\delta}(x) / N = \sum_{i=1}^N f_i(x) / N + \sum_{i=1}^N \delta_i / N = \bar{f}(x) + \delta \quad (16)$$

式(16)把个体神经网络的偏置量 δ_i , 统一为它们集成的偏置量 δ 。

对于 N 个神经网络 f_i^{δ} 的集成, 由式(2)、(16)得神经网络集成的泛化误差为:

$$E^{\delta} = \int p(x)(\bar{f}^{\delta}(x) - d(x))^2 dx = \int p(x)(\bar{f}(x) - d(x) + \delta)^2 dx \quad (17)$$

由式(17),当 $\delta = \delta_0 = \int p(x)(d(x) - \bar{f}(x))dx$ 时,神经网络集成的泛化误差 E^0 取极小值。设:

$$d^0(x) = d(x) - \delta_0 \quad (18)$$

$$C_{ij}^0 = \int p(x)(f_i(x) - d^0(x))(f_j(x) - d^0(x))/N dx \quad (19)$$

由式(10),有:

$$E^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^0 / N^2 \quad (20)$$

式(10)把神经网络的泛化误差用各神经网络之间的相关度 C_{ij} 表示出来^[4,5,8], C_{ij} 体现了两神经网络之间的相关程度。由于 C_{ij} 的计算不涉及 f_i 和 f_j 之外的其它神经网络,在计算神经网络时易于使用。由式(20)可知,在得出集成的偏置 δ_0 后,本文神经网络集成方法在计算集成泛化误差时,同样具有这种优势。

3.2 基于遗传算法的集成实现

实现神经网络的选择方法很多。最基本的方法是:生成 $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ 除空集外的所有子集,计算这些子集对应的神经网络集成在验证集上的平均误差,然后选择平均误差最小的集合。这种方法称为穷举法^[9],它能够得到最优解,但当 N 较大时,计算的复杂度太大,以致于无法实现。

Zhou 等人^[4,5]采用遗传算法解决神经网络选取问题。本文也采用遗传算法进行神经网络选取。遗传算法由美国 Michigan 大学的 John Holland 教授于20世纪70年代提出,它的基本思想是:首先以字符串对问题的解编码,然后在选择、杂交和变异等遗传算子作用下通过对字符串群体的进化,获取对现实世界的较优解。

在遗传算法实现中,种群个体的染色体编码的每一位按等概率在0与1之间产生,选择算子采用轮盘赌选择法(roulette wheel selection),交叉算子(crossover)采用单点交叉。每一代遗传群体中适应度最高的前10%的个体不参加交叉和变异操作,自动保留到下一代。

若某遗传个体与 $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ 的子集 S 相对应,假设验

证集为 V 。由 $\delta = \frac{\sum_{x \in V} [d(x) - \frac{1}{|S|} \sum_{f_i \in S} f_i(x)]}{|V|}$ 计算总体偏置 δ

的估计值;由 $C_{ij}^0 = \frac{\sum_{x \in V} (f_i(x) - d^0(x))(f_j(x) - d^0(x))}{|V|}$ 计算

f_i 与 f_j 的相关度的估计值。根据式(20),与 S 对应的神经网络集成在设验证集为 V 上的平均误差为 $\frac{\sum_{f_i, f_j \in S} C_{ij}^0}{|S|^2}$,以该误差的倒数作为遗传个体的适应值。

3.3 实验结果

实验中,参与选择的神经网络的规模为20,因此,每个遗传个体的编码长度为20,其中每个网络用一位二进制位表示,若某位为1,则表示与其对应的网络参与神经网络集成。设定遗传算法的种群大小为40,交叉概率为0.8,变异概率为0.05,最大进化代数数为100。

对每个参与实验的数据集,首先独立地训练出20个BP网络(1个隐含层,有6个神经元),然后利用验证集,根据本文提出的方法,选择部分神经网络集成。为进行比较,本文给出了根据传统方法(简单平均法)和 Zhou 等人^[4,5]的选择性方法集成神经网络的实验结果,同时给出了每组实验中,个体神经网络在测试集上最好的实验结果(即最佳网络的测试结

果)。

实验1:

采用 freidman #1数据集^[11],根据式(21)产生:

$$t = 10\sin(\pi x_1 x_2) + 20(x_3 - 0.5)^2 + 10x_4 + 5x_5 \quad (21)$$

其中, $x_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。数据集共包含1600个示例。训练集大小为800,以其中400个示例作为验证集。测试集大小为800。实验结果如图1所示。

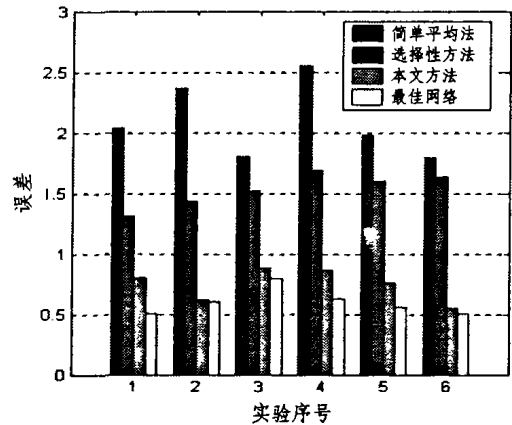


图1 Freidman #1 数据集误差比较

实验2:

采用 Mexican Hat 数据集,根据墨西哥草帽函数生成。由式(22)所示:

$$t = \frac{10\sin x}{x} \quad (21)$$

其中, x 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布。数据集包含480个示例,训练集大小为80,以其中40个示例作为验证集,测试集大小为400。实验结果如图2所示。

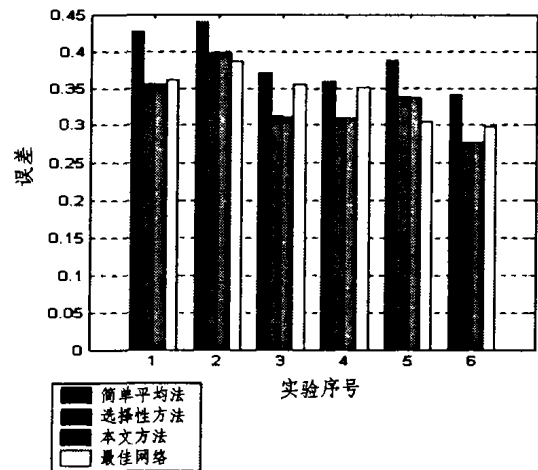


图2 Mexican Hat 数据集误差比较

在实验1中,简单平均法、Zhou 等人的选择性方法、本文方法的神经网络集成均方误差的平均值分别为2.0900、1.5320、0.7452;在实验2中,简单平均法、Zhou 等人的选择性方法、本文方法的神经网络集成均方误差的平均值分别为0.3873、0.3343、0.3321。在两组实验中,本文提出的带偏置的神经网络集成方法产生的均方误差平均值最小,这表明,我们提出的方法是有效的。

在实验1中,最佳网络的均方误差平均值为0.5992。基于本文方法的神经网络集成均方误差平均值高于最佳网络的均方误差,但较之于基于简单平均法的神经网络集成的均方误

差平均值和 Zhou 等人的选择性神经网络集成的均方误差平均值分别下降了 64.34%、51.36%。在实验 2 中,最佳网络的均方误差平均值为 0.3426。基于本文方法的神经网络集成均方误差平均值低于最佳网络的均方误差,更低于基于简单平均法的神经网络集成的均方误差平均值和 Zhou 等人的选择性神经网络集成的均方误差平均值。一方面,在实际应用神经网络和神经网络集成时,我们不能预先知道哪个网络误差最小(即哪个网络是最佳网络),另一方面,在实验中我们发现,对于同一组训练数据,生成不同的个体神经网络集,应用本文方法生成的各神经网络集成之间的误差比较接近,这说明本文的神经网络集成方法性能是稳定的。因此,我们提出的神经网络集成方法有实际应用价值。

结论 对单个神经网络 f_i 增加偏置量 δ_i 。偏置量 δ_i 不同, $f_i + \delta_i$ 不同。偏置量的增加,一方面改变了单个神经网络 f_i 与其它神经网络之间的关系,另一方面,大大增加了可选择的个体神经网络数量。

本文提出的神经网络集成方法,对参与集成的个体神经网络增加偏置项,给出了把参与集成的个体神经网络的偏置项统一为网络集成的偏置项的理论依据。应用遗传算法在选择部分神经网络集成的同时,估计网络集成的偏置项。理论分析和数据实验都表明,本文提出的神经网络集成方法能有效地降低神经网络集成的泛化误差。

参考文献

1 Hansen L K, Salamon P. Neural network ensembles. IEEE Trans

on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(10): 993~1001

- Sharkey A J C. On combining artificial neural networks. Connection Science, 1996, 8(3-4): 299~313
- Krogh A, Vedelsby J. Neural network ensembles, cross validation, and active learning. In: Tesauro G, Touretzky D, Lee T, eds. Advances in Neural Information Processing Systems, Cambridge, MA: MIT Press, 1995, 7: 231~238
- Zhou Z H, Wu J X, Tang W. Ensembling neural networks: many could be better than all. Artificial Intelligence, 2002, 137(1-2): 239~263
- 吴建鑫, 周志华, 沈学华, 陈兆乾. 一种选择性神经网络集成构造方法. 计算机研究与发展, 2000, 37(9): 1039~1044
- Opitz D, Shavlik J. Actively searching for an effective neural network ensemble. Connection Science, 1996, 8(3-4): 337~353
- Liu Y, Yao X. Simultaneous training of negatively correlated neural networks in an ensemble. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics, 1999, 29(6): 716~725
- Perrone M P, Cooper L N. When networks disagree: Ensemble method for neural networks. In: Mammone R J, ed. Artificial Neural Networks for Speech and Vision. London: Chapman-Hall, 1993. 126~142
- 边肇祺, 张学工. 模式识别. 北京: 清华大学出版社, 2000
- Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975
- Freidman J. Multivariate adaptive regression splines. Annals of Statistics, 1991, 19(1): 1~141

(上接第 144 页)

当 $h=0$ 时, 即最大相克情况

$$\begin{aligned} \bar{a} \rightarrow_{h,k} \bar{b} &= ((a^- \rightarrow_{h,k} b^-) \wedge_{h,k} (a^+ \rightarrow_{h,k} b^+), (a^+ \rightarrow_{h,k} b^+)) \\ &= \begin{cases} (b^-, b^+) & a^- = 1, a^+ = 1 \\ (b^+, b^+) & a^- < 1, a^+ = 1 \\ (1, 1) & a^- < 1, a^+ < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $ite\{\alpha|\beta;\gamma\}$ 是条件式, 即如果 β , 则 α ; 否则 γ 。

这是全新的观点给出当 $h=1, 0.75, 0.5$ 和 0 时, 区间值逻辑的交、并和蕴涵的运算模型, 当然, 其具体的应用还需要进一步研究。

结论 蕴涵是研究逻辑学的重点和难点, 本文用泛逻辑学的观点, 把广义相关性引入到区间值逻辑中, 重新定义了区间值逻辑的交、并、补运算和蕴涵, 使得区间值逻辑运算模型连续可变, 即区间值逻辑联结词具有柔性化, 还证明区间蕴涵具有的正则性、单调性和伴随对性的良好性质。并在此基础上以全新的观点给出当 $h=1, 0.75, 0.5$ 和 0 时, 区间值逻辑的交、并和蕴涵的运算模型, 当然, 其具体的应用还需要进一步研究。这对深入研究区间值逻辑柔性化, 具有重要的意义。

参考文献

- Zadeh L A. Outline of a New Approach to the Analysis of Systems and Decision Processes. IEEE Trans Systems Man Cybernet, 1973, 3: 28~44
- Wang G J. On the Logic Foundation of Fuzzy Reasoning. Information Sciences, 1999, 117: 47~88
- Pawley Z. Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341~356
- Pawlak Z. Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1991
- Zadeh L A. Fuzzy sets. Information Control, 1965, 8: 338~353
- Bundy A. Incidence calculus: a mechanism for probabilistic reasoning. Journal of Automated Reasoning, 1985, 1: 263~283

- Bundy A. Correctness criteria of some algorithms for uncertain reasoning using incidence calculus. Journal of Automated Reasoning, 1986, 2: 109~126
- Wong S K M, Wang L S, Yao Y Y. On Modeling Uncertainty with Interval Structures. Intl. Journal of Computational Intelligence, 1995, 11(2): 406~426
- Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 86~96
- Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 343~351
- 吴望名. 模糊推理的原理和方法[M]. 贵阳: 贵州科学技术出版社, 1994
- 王国俊. 三 I 方法与区间值模糊推理[J]. 中国科学(E 辑), 2000, 30(4): 331~340
- 陈图云, 张宇卓. 有限区间值模糊逻辑代数及其广义重言式[J]. 辽宁师范大学学报, 2002, 25(1): 12~14
- 何颖瑜, 王国俊. 关于 Fuzzy 格的若干注记——兼评直觉主义模糊集[J]. 模糊系统与数学, 1997, 11(4): 1~3
- 王艳平, 陈图云. 直觉模糊逻辑蕴涵算子的研究[J]. 辽宁师范大学学报, 1994(4)
- 薛占熬, 何华灿. 粗糙蕴涵[J]. 计算机科学, 2003, 30(11): 18~20
- 何华灿, 刘永怀, 何大庆. 经验性思维中的泛逻辑[J]. 中国科学(E 辑), 1996, 26(1): 72~78
- He Hua-can, Liu Yong-huai, He Da-qing. Generalized Logic in Experience Thinking [J]. Science in China (Series), 1996, 39(2): 225~234
- 何华灿, 王华, 等. 泛逻辑学原理[M]. 科学出版社, 2001, 8
- 薛占熬, 何华灿. 何泛逻辑学的蕴涵性质[J]. 计算机科学, 2005
- Wong S K M, Wang L S, Yao Y Y. Interval Structures: a framework for representing uncertain information [C]. In: Proc. of the Eighth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, California, 1992. 336~343
- 薛占熬, 张小红, 何华灿. 论广义相关性在柔性逻辑中的重要性[J]. 计算机科学, 2004, 31(2): 113~116
- 陆秋君, 吴望名. 区间值命题逻辑系统的广义恒真式[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(2): 21~24
- 吴望名. 区间值模糊集的区间值模糊推理[J]. 模糊系统与数学, 1992, 6(2): 38~49
- 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 科学出版社, 2000