区间值逻辑柔性化的研究*)

薛占熬　何华灿

（西北工业大学计算机学院　西安710072）

摘　要　蕴涵是研究逻辑学的重点和难点，本文运用泛逻辑学的理论，把广义相关性引入到区间值逻辑中，重新定义了区间值逻辑的补、交、并运算，给出一种区间蕴涵的定义形式，使区间值逻辑运算模型连续可变，进一步证明了区间蕴涵的正则性、单调性和伴随性。以全新的观点给出区间值逻辑在 h 几个特殊点处的交、并和蕴涵运算模型。这对深入研究区间值逻辑柔性化，具有重要的意义。

关键词　不确定性推理，广义相关性，柔性逻辑，蕴涵算子，区间值逻辑

Flexibility of the Interval-valued Logics

XUE Zhan-Ao　HE Hua-Can

(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract　The study of implication operator is important and difficult in the study of logic. In this paper, using the principle of the universal logics, generalized correlation is introduced into Interval-valued Logics, the intersection, union and complement operation are redefined, and a new kind definition of the Interval-implication is given. The operation models of the Interval-valued Logics are changeable continuity. Regularity and monotonicity of interval-implication are proved, the property of adjoint pair of interval intersection and implication is also proved. The operation models of the Interval-Logics are firstly given for intersection, union and implication in the special points of h. It is very important to the further study of making Interval-Logics flexible.

Keywords　Uncertain reasoning, Generalized correlation, Flexible logic, Implication operator, Interval-valued logic

1　引言

随着计算机科学技术的飞速发展，人们面临着非常巨大的复杂系统，同时在复杂系统中由于知识的随机性、模糊性、近似性和不完全性，引起了推理的不确定性，因此研究不确定性推理(Uncertain Reasoning)成为当前人工智能研究的热点和难点，Zadeh 于1973年提出 Fuzzy 逻辑[1]，近年来，以王国俊教授为首的一批学者成功地将模糊逻辑(Fuzzy logic)和模糊推理(Fuzzy reasoning)结合起来，提出了三 I[2]方法(trip I method)，建立了模糊逻辑形式演绎系统 L^*，给出了 R_0-代数，取得了可喜的成果，对研究不确定性推理起到了推动作用。另一方面，对研究区间值逻辑(Interval-valued logic)也取得了可喜成果。1992年，为了用公共的框架来模型化不确定信息，Wong 等人提出了区间结构(Interval structure)的概念[8]。在文[8]中，他们论证了 Rough 集的上、下近似[3,4](the lower and upper approximations)，Fuzzy 集的核(Key)（即下近似）、支撑(Support)（即上近似）[1,5]，Bundy 在1985～1986年讨论了命题集合发生率的上、下界[6,7]以及 D-S 理论中的信任函数(belief function)和似然函数[6,7](plausibility function)，等等都符合区间结构，并在领域问题中也给出区间结构的公理体系。以 K. Atanassov[9,10]为代表提出了直觉模糊逻辑(Intuitionistic Fuzzy logic)，用区间结构来表示逻辑体系，对研究区间结构化不确定性推理起到了推动作用。当然，在这一方面的研究中，我国学者也取得了一定的成绩[11~16]。但是，在以上的研究中，逻辑运算仅取某个固定算子，如最大/最小(max-min)算子进行运算，没有考虑命题联结词之间的转换和连续可变性(关系柔性)，使逻辑运算模型仍然具有刚性，这对逻辑运算具有一定的局限性。本文第二作者在长期从事人工智能和实用专家系统的研究中发现，模糊命题之间的关系柔性是不可回避的客观存在，需要用连续可变的逻辑运算模型来描述，即在对立不充分的柔性世界中，不仅要考虑模糊性对命题逻辑真值的影响，而且要考虑关系柔性(Flexible relation)对命题联结词运算模型的影响。事物之间的广义相关性和广义自相关性是引起关系柔性的根本原因。泛逻辑学给出了柔性逻辑(Flexible logic)理论框架[17~19]，建立了泛逻辑学的命题联结词的运算模型。本文根据泛逻辑学的理论，把关系柔性引入到区间值逻辑中，使区间值逻辑运算模型连续可变、具有柔性，并在此基础上证明区间蕴涵的性质，对深入研究区间值逻辑具有重要意义。特别说明：本文是在相同的 h,k 情况来给出命题和定理的。

2　柔性逻辑的基本理论

在文[17～20]中，何华灿教授把中国古典哲学的思想(即世间万事万物都是相关的，不是相生(Mutual promotion)就是相克(Mutual restraint)，非此即彼)引入到柔性逻辑学中，提出了柔性逻辑的五要素，即真值柔性、关系柔性、程度柔性、模式柔性和维数柔性，建立了柔性逻辑理论框架，把“广义相关性”(Generalized correlation)引入到运算模型中，建立泛逻辑学的命题联结词的运算模型[17~20]。

2.1　广义相关性的概念及性质[19]

我们在研究柔性世界逻辑规律时发现，不仅命题真值的连续可变性对命题连接词运算模型有影响，而且命题之间关系的连续可变性对命题连接词运算模型也有影响，称前者为真值柔性，称后者为关系柔性。而影响命题之间的关系柔性的

*)国家自然科学基金资助项目(No. 60273087)和北京自然科学基金资助项目(No. 4032009)。薛占熬　博士生，主要研究方向：人工智能和不确定性推理。何华灿　教授，博士生导师，主要研究领域：人工智能原理及应用、泛逻辑学。

因素主要有二种，即命题之间的关联性（广义相关性）和命题真值的测量误差（广义自相关性）。

命题之间的广义相关性可由最大相克到最大相吸连续地变化，需要用连续变化的广义相关系数 $h\in[0,1]$ 来刻画：最大相吸时 $h=1$，最大相斥或最小相克时 $h=0.5$，最大相克时 $h=0$。广义相关性对所有二元命题连接词的运算模型都有影响。为了深入柔性逻辑的性质，在表1中列出了 h 值的几种特殊广义相关性及其对应的逻辑算子对。

表1　h 值的几种特殊广义相关性及其对应的逻辑算子对

h 值	命题之间的广义相关性	对应的逻辑算子对
$h=1$	最大相吸	Zadeh 算子对
$h=0.75$	独立相关	Probability 算子对
$h=0.5$	最大相斥或最小相克	有界算子对
$h=0.25$	僵持状态	介于有界和 Drastic 算子对之间
$h=0$	最大相克	Drastic 算子对

在一个结构化区间中，不仅要把广义相关性引入其中，还要把引入广义自相关性引入其中，使区间柔性化。本文重点研究是对引入广义相关性的区间值逻辑体系进行研究，而对引入广义自相关性的情况将另文研讨。

2.2　一级命题连接词完整簇的运算模型[19]

泛非命题连接词完整簇的运算模型：

$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$ 简写为 $N(x,k)=\neg_k x$

泛与命题连接词完整簇的运算模型：

$T(x,y,h,k)=(\max(0,x^{nm}+y^{nm}-1))^{1/(nm)}$

$T(x,y,h,k)$ 简写为 $x\wedge_{h,k}y$；

泛或命题连接词完整簇的运算模型：

$S(x,y,h,k)=1-(\max(0,(1-x)^{nm}+(1-y)^{nm}-1))^{1/(nm)}$

$S(x,y,h,k)$ 简写为 $x\vee_{h,k}y$；

泛蕴涵命题连接词完整簇的运算模型：

$I(x,y,h,k)=\min(1,(\max(0,1-x^{nm}+y^{nm}))^{1/(nm)})$

$I(x,y,h,k)$ 简写为 $x\rightarrow_{h,k}y$。

其中 $k=2^{-1/n}$，$n\in R^+$ 或 $n=-1/\log_2 k$，$k\in[0,1]$；$m=(3-4h)/(4h(1-h))$，$h\in[0,1]$ 或 $h=((1+m)-((1+m)^2-3m)^{1/2})/(2m)$，$m\in R$。$ite\{a|x;b|y;c\}$ 为条件句：当为 x 时，式子等于 a；当为 y 时，式子等于 b；否则等于 c。以下相同。

2.3　"交"、"并"算子的性质

定理2.1　"交"、"并"算子满足下列性质：

(1)边界条件　$0\wedge_{h,k}y=0, 0\vee_{h,k}y=0$

(2)单调性　$x\wedge_{h,k}y, x\vee_{h,k}y$ 是关于 x,y 单调递增的；

(3)连续性　$x\wedge_{h,k}y, x\vee_{h,k}y$ 是关于 x,y 连续的；

(4)交换律　$x\wedge_{h,k}y=y\wedge_{h,k}x, x\vee_{h,k}y=y\vee_{h,k}x$；

(5)幂等律　$x\wedge_{h,k}x=x, x\vee_{h,k}x=x$；

(6)结合律　$(x\wedge_{h,k}y)\wedge_{h,k}z=x\wedge_{h,k}(y\wedge_{h,k}z), (x\vee_{h,k}y)\vee_{h,k}z=x\vee_{h,k}(y\vee_{h,k}z)$；

(7)上、下界性　$\min(x,y)\geqslant x\wedge_{h,k}y, \max(x,y)\leqslant x\vee_{h,k}y$。

2.4　泛逻辑学中蕴涵的性质

定理2.2　设 $x\in[0,1]$，则蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$ 满足蕴涵的正则性(Regularity)：

$x\rightarrow_{h,k}1=1$；$0\rightarrow_{h,k}x=1$；

$1\rightarrow_{h,k}x=1$；$x\rightarrow_{h,k}x=1$。

证明略。参见文[19]中定理10.3.1(I_1)和193页或文[20]。

定理2.3　设 $x,y,z\in[0,1]$，则蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$ 满足单调性(Monotonicity)：

若 $x\leqslant y$，则 $y\rightarrow_{h,k}z\leqslant x\rightarrow_{h,k}z$；

若 $y\leqslant z$，则 $x\rightarrow_{h,k}y\leqslant x\rightarrow_{h,k}z$。

证明略。参见文[19]中定理10.3.1(I_2)或文[20]。

定理2.4　设 $x,y,z\in[0,1]$，交 $\wedge_{h,k}$ 和蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$ 满足性质：$x\wedge_{h,k}y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\rightarrow_{h,k}z$。

证明略。参见文[20]。

所以，根据定理2.1(2)、2.2、2.3、2.4，且 $\langle\leqslant,[0,1]\rangle$ 是偏序集，可知交 $\wedge_{h,k}$ 和蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$ 是伴随对(Adjoint pair)。

定理2.5　设 $x,y,z\in[0,1]$，则蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$ 满足如下代数性质(Algebraic properties)：

(1)$x\rightarrow_{h,k}(y\rightarrow_{h,k}z)=y\rightarrow_{h,k}(x\rightarrow_{h,k}z)$；

(2)$x\rightarrow_{h,k}y=1$ 当且仅当 $x\leqslant y$；

(3)$y\rightarrow_{h,k}(x\rightarrow_{h,k}y)=1$；

(4)$y\leqslant x\rightarrow_{h,k}y$；

(5)$x\rightarrow_{0.5,k}0=\neg_k x$。

证明略。参见文[20]。

3　柔性区间逻辑

3.1　区间逻辑(Interval Logic)的概念

Wong 等人在文[8]中给出了区间结构的概念，提出了表示不确定信息的一个框架"区间结构"，给出区间结构的公理体系，并证明了存在一个基本集合赋值与区间结果等价。本文从集合到赋值的观点，来定义区间值逻辑运算。

定义3.1[8]　如果 $X=\langle\underline{X},\overline{X}\rangle$ 是一个区间结构，则对任意的子集合 $X\in\mathscr{R}(U)$，称 $\underline{X}$ 为 X 的下界，$\overline{X}$ 为 X 的上界。

定义3.2　设 $A,B,\in\mathscr{R}(U)$，则它们的区间包含关系"$A\subseteq B$"和区间相等关系"$A=B$"定义如下：

(1)$A\subseteq B$ 当且仅当 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$ 和 $\underline{A}\subseteq\underline{B}$ 同时成立；(2)$A=B$ 当且仅当 $\overline{A}=\overline{B}$ 和 $\underline{A}=\underline{B}$ 同时成立。

定义3.3　设 $A,B\in\mathscr{R}(U)$，即 $A=\langle\underline{A},\overline{A}\rangle$，$B=\langle\underline{B},\overline{B}\rangle$，则它们的区间交"$A\cap B$"，区间并"$A\cup B$"，$A$ 的区间补"A^c"，A 的区间伪补"A^*"：(1)$A\cap B=\langle\underline{A}\cap\underline{B},\overline{A}\cap\overline{B}\rangle$；(2)$A\cup B=\langle\underline{A}\cup\underline{B},\overline{A}\cup\overline{B}\rangle$；(3)$A^c=\{-\overline{A},-\underline{A}\}$；(4)$A^*=\langle-\underline{A},-\underline{A}\rangle$。

其中，$-\overline{A}$ 和 $-\underline{A}$ 分别是 $\overline{A}$ 和 $\underline{A}$ 在 U 中的补，以下相同。

从集合-赋值的观点，对 $\forall A,B\in I[0,1]$ 进行赋值。

定义3.4　函数 $v:F(S)\rightarrow[0,1]$ 叫做 $F(S)$ 的 H-赋值，如果 v 满足：

$v(A)=v(\langle\underline{A},\overline{A}\rangle)=\langle a^-,a^+\rangle$；

$v(B)=v(\langle\underline{B},\overline{B}\rangle)=\langle b^-,b^+\rangle$，

$v(A^c)=v(\langle U-\overline{A},U-\underline{A}\rangle)=\langle 1-a^+,1-a^-\rangle=(\overline{a})^c$；

$v(A^*)=v(\langle U-\overline{A},U-\overline{A}\rangle)=\langle 1-a^+,1-a^+\rangle$。

根据文[24]中 $I[0,1]$ 的基本运算和性质，本文设 $I[0,1]=\{\overline{a}=[a^-,a^+]|0\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant 1\}$ 为区间值。且当 $\forall\overline{a},\overline{b}\in I[0,1]$ 时，

$v(A)=\overline{a}=[a^-,a^+]$，$v(B)=\overline{b}=[b^-,b^+]$，

$v(A^c)=(\overline{a})^c=[1-a^+,1-a^-]$。

注：在文[23,24]中，已经证明了 $I[0,1]$ 到 $[0,1]$ 是上半同态、下上半同态的，并以上半同态、下上半同态为工具揭示了区间值模糊命题逻辑系统与对应的模糊命题逻辑系统在广义恒真式方面的相互关系，并进一步证明了$(I[0,1],\vee,\wedge,c,\overline{0},\overline{1})$组成完备 De Morgan 代数。

但是在文[23,24]中，交、并运算具有刚性，即它交、并运算仅取最大/最小运算(max-min)。为此，我们把广义相关性

和广义自相关性引入到区间值逻辑中，然后定义两个区间集的“交”、“并”、“补”运算。再根据文[16]，本文就给出一种区间蕴涵的定义形式，并证明了蕴涵算子的一些性质。且本文定义交、并运算是连续可变的，具有柔性[16~20]。

定义3.5 设$\bar{a},\bar{b}\in I[0,1]$，则 A 和 B 的“交”、“并”、“补”和“蕴涵”对应的区间值运算为：

$v(A\cap B)=\langle a^-\wedge_{h,k}b^-,a^+\wedge_{h,k}b^+\rangle$，

即为$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\langle a^-\wedge_{h,k}b^-,a^+\wedge_{h,k}b^+\rangle$；

$v(A\cup B)=\langle a^-\vee_{h,k}b^-,a^+\vee_{h,k}b^+\rangle$，

即为$\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\langle a^-\vee_{h,k}b^-,a^+\vee_{h,k}b^+\rangle$；

$v(A^c)=\langle 1-a^+,1-a^-\rangle$，

即为$(\bar{a})^c=\langle 1-a^+,1-a^-\rangle$；

$v(A^*)=[1-a^-,1-a^-]$，

即为$(\bar{a})^*=1-a^-,1-a^-]$；

$v(A\to B)=v(((-\underline{A}\cup\underline{B})\cap(-\overline{A}\cup\overline{B}),-\underline{A}\cup\overline{B}))=\langle(a^-\to_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}b^+),(a^+\to_{h,k}b^+)\rangle$

即为

$$\bar{a}\to_{h,k}\bar{b}=\langle(a^-\to_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}b^+),(a^+\to_{h,k}b^+)\rangle \quad (1)$$

在定义3.5中“交”、“并”、“补”和“蕴涵”的运算模型是随参数 h,k 的变化而变化的，即定义3.5中的运算模型是连续可变的(柔性)。在文[22]中已经证明了连续的，所以(1)式是连续可变的。

3.2 “交”、“并”算子的性质

定理3.6 “交”、“并”算子满足下列性质：

(1)边界条件　$\bar{0}\wedge_{h,k}\bar{a}=\bar{0},\bar{0}\vee_{h,k}\bar{a}=\bar{a}$；

(2)单调性　$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b},\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}$是关于$\bar{a},\bar{b}$单调递增的；

(3)连续性　$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b},\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}$是关于$\bar{a},\bar{b}$连续的；

(4)交换律　$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\bar{b}\wedge_{h,k}\bar{a},\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\bar{b}\vee_{h,k}\bar{a}$；

(5)幂等律　$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{a}=\bar{a},\bar{a}\vee_{h,k}\bar{a}=\bar{a}$；

(6)结合律　$(\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b})\wedge_{h,k}\bar{c}=\bar{a}\wedge_{h,k}(\bar{b}\wedge_{h,k}\bar{c}),(\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b})\vee_{h,k}\bar{c}=\bar{a}\vee_{h,k}(\bar{b}\vee_{h,k}\bar{c})$。

3.3 “交”、“并”算子的特殊点

下面仅给出当 $h=1$、0.75、0.5和0时，区间的交和并运算特殊情况。

当 $h=1$时，即最大相吸情况

$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\langle\min(a^-,b^-),\min(a^+,b^+)\rangle$；

$\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\langle\max(a^-,b^-),\max(a^+,b^+)\rangle$。

当 $h=0.75$时，即独立相关情况

$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\{a^-b^-,a^+b^+\rangle$；

$\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\langle a^-+b^--a^-b^-,a^++b^+-a^+b^+\rangle$。

当 $h=0.5$时，即最大相斥或最小相克情况

$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\langle\max(0,a^-+b^--1),\max(0,a^++b^+-1)\rangle$；

$\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\langle\min(1,a^-+b^-),\min(1,a^+b^+)\rangle$。

当 $h=0$时，即最大相克情况

$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}=\langle ite\{\min(a^-,b^-)|\max(a^-,b^-)=1;0\}$,
$ite\{\min(a^+,b^+)|\max(a^+,b^+)=1;0\}\rangle$

$\bar{a}\vee_{h,k}\bar{b}=\langle ite\{\max(a^-,b^-)|\min(a^-,b^-)=0;1\}$,
$ite\{\max(a^+,b^+)|\min(a^+,b^+)=0;1\}\rangle$

3.4 蕴涵算子的性质

定理3.6 $\to_{h,k}$称为$I^{[0,1]}$上的正则性。

证明：

$\bar{1}\to\bar{0}=[1\to_{h,k}0)\wedge_{h,k}(1\to_{h,k}0),(1\to_{h,k}0)]=[0,0]=\bar{0}$，

$\bar{1}\to\bar{1}=[(1\to_{h,k}1)\wedge_{h,k}(1\to_{h,k}1),(1\to_{h,k}1)]=[1,1]=\bar{1}$。

同理得，$\bar{0}\to\bar{1}=\bar{0}\to\bar{0}=\bar{1}$。证毕。

定理3.7 $\to_{h,k}$单调性质，即$\to_{h,k}$关于第一个变元是单调递减，关于第二个变元是单调递增。设，$\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in I[0,1]$，则

(1)$\bar{a}\leqslant\bar{b}$，则$\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}\leqslant\bar{a}\to_{h,k}\bar{c}$；

(2) $\bar{b}\leqslant\bar{c}$，则$\bar{a}\to_{h,k}\bar{b}\leqslant\bar{a}\to_{h,k}\bar{c}$；

证明：(1)因为$\bar{a}\leqslant\bar{b}$，且$\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}=[(b^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(b^+\to_{h,k}c^+),(b^+\to_{h,k}c^+)]$，

$\bar{a}\to_{h,k}\bar{c}=[(a^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}c^+),(a^+\to_{h,k}c^+)]$。

根据定理2.3知，$b^-\to_{h,k}c^-\leqslant a^-\to_{h,k},c^-,b^+\to_{h,k}c^+\leqslant a^+\to_{h,k}c^+$

所以$\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}\leqslant\bar{a}\to_{h,k}\bar{c}$。

同理可证(2)，证毕。

这个定理说明了新的区间蕴涵满足单调性。

定理3.8 设$\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in I[0,1]$，在 $I[0,1]$上的交运算$\wedge_{h,k}$和蕴涵$\to_{h,k}$满足如下性质：

$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}\leqslant\bar{c}$当且仅当$\bar{a}\leqslant\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}$。

证明：设$\wedge_{h,k}$为 $I[0,1]$上的交运算。若$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}\leqslant\bar{c}$，即$[a^-\wedge_{h,k}b^-,a^+\wedge_{h,k}b^+]\leqslant[c^-,c^+]$，为 $a^-\wedge_{h,k}b^-\leqslant c^-$且 $a^+\wedge_{h,k}b^+\leqslant c^+$。根据定理2.4知，$a^-\leqslant b^-\to_{h,k}c^-,a^+\leqslant b^+\to_{h,k}c^+$，又由 $a^-\leqslant a^+\leqslant b^+\to_{h,k}c^+$，从而 $a^-\leqslant(b^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(b^+\to_{h,k}c^+)$。

故，$[a^-,a^+]\leqslant[(b^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(b^+\to_{h,k}c^+),(b^+\to_{h,k}c^+)]$，即$\bar{a}\leqslant\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}$。

反之，若$\bar{a}\leqslant\bar{b}\to_{h,k}\bar{c}$，则$[a^-,a^+]\leqslant[(b^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(b^+\to_{h,k}c^+),(b^+\to_{h,k}c^+)]$，即 $a^-\leqslant(b^-\to_{h,k}c^-)\wedge_{h,k}(b^+\to_{h,k}c^+)\leqslant(b^-\to_{h,k}c^-)$，且 $a^+\leqslant b^+\to_{h,k}c^+$，由定理2.4可知 $a^-\leqslant b^-\to_{h,k}c^-,a^+\leqslant b^+\to_{h,k}c^+$，从而$\bar{a}\wedge_{h,k}\bar{b}\leqslant\bar{c}$。证毕。

定义3.9[25] 设 P 是偏序集，P 上的二元运算$\otimes$与$\to$叫做互为伴随，若以下条件成立：

(1) $\otimes:P\times P\to P$ 是单调递增的；

(2) $\to:P\times P\to P$ 关于第一个变元是单调递减，关于第二个变元是单调递增；

(3) $x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\to z,x,y,z\in P$。

这是$(\otimes,\to)$叫做 P 上的伴随对(Adjoint pair)。

所以，根据定义3.9和定理2.1(2)、3.7、3.8，且$\langle\leqslant,I[0,1]\rangle$是偏序集，可知交$\wedge_{h,k}$和蕴涵$\to_{h,k}$是伴随对。这对我们今后深入研究区间值逻辑的形式系统和代数结构是非常重要的。下面就给出当 $h=1$、0.75、0.5和0时，区间蕴涵的运算模型。

3.5 “蕴涵”算子的几个特殊点

下面给出当 $h=1$、0.75、0.5和0时，区间蕴涵的运算模型。

当 $h=1$时，即最大相吸情况

$$\bar{a}\to_{h,k}\bar{b}=\langle(a^-\to_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}b^+),(a^+\to_{h,k}b^+)\rangle=\begin{cases}\langle b^-,b^+\rangle & b^+<a^-\\ \langle 1,1\rangle & a^-<b^-<a^+<b^+\end{cases}$$

当 $h=0.75$时，即独立相关情况

$$\bar{a}\to_{h,k}\bar{b}=\langle(a^-\to_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}b^+),(a^+\to_{h,k}b^+)\rangle=\begin{cases}\langle(b^-b^+)/(a^-a^+)\rangle & b^+<a^-\\ \langle 1,1\rangle & a^-<b^-<a^+<b^+\end{cases}$$

当 $h=0.5$时，即最大相斥或最小相克情况

$$\bar{a}\to_{h,k}\bar{b}=\langle(a^-\to_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\to_{h,k}b^+),(a^+\to_{h,k}b^+)=\begin{cases}\langle 1,1\rangle & a^-\leqslant b^-\leqslant a^+\leqslant b^+\\ \langle 1-a^++b^+,1-a^++b^+\rangle & a^-\leqslant b^-\text{ and }a^+\geqslant b^+\\ \langle 1+a^--b^-,1\rangle,a^-\geqslant b^- & a^+\leqslant b^+\\ \langle 1+a^--a^++b^--b^+,1-a^++b^+\rangle & a^-\geqslant b^-\text{ and }a^+\geqslant b^+\end{cases}$$

（下转第155页）

差平均值和 Zhou 等人的选择性神经网络集成的均方误差平均值分别下降了64.34%、51.36%。在实验2中，最佳网络的均方误差平均值为0.3426。基于本文方法的神经网络集成均方误差平均值低于最佳网络的均方误差，更低于基于简单平均法的神经网络集成的均方误差平均值和 Zhou 等人的选择性神经网络集成的均方误差平均值。一方面，在实际应用神经网络和神经网络集成时，我们不能够预先知道哪个网络误差最小（即哪个网络是最佳网络），另一方面，在实验中我们发现，对于同一组训练数据，生成不同的个体神经网络集，应用本文方法生成的各神经网络集成之间的误差比较接近，这说明本文的神经网络集成方法性能是稳定的。因此，我们提出的神经网络集成方法有实际应用价值。

结论 对单个神经网络 f_i 增加偏置量 δ_i。偏置量 δ_i 不同，$f_i+\delta_i$ 不同。偏置量的增加，一方面改变了单个神经网络 f_i 与其它神经网络之间的关系，另一方面，大大增加了可选择的个体神经网络数量。

本文提出的神经网络集成方法，对参与集成的个体神经网络增加偏置项，给出了把参与集成的个体神经网络的偏置项统一为网络集成的偏置项的理论依据。应用遗传算法在选择部分神经网络集成的同时，估计网络集成的偏置项。理论分析和数据实验都表明，本文提出的神经网络集成方法能有效地降低神经网络集成的泛化误差。

参 考 文 献

1 Hansen L K, Salamon P. Neural nerwork ensembles. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(10): 993～1001

2 Sharkey A J C. On combining artificial neural networks. Connection Science, 1996, 8(3-4): 299～313

3 Krogh A, Vedelsby J. Neural network ensembles, cross validation, and active learning. In: Tesauro G, Touretzky D, Lee T, eds. Advances in Neural Information Processing Systems, Cambridge, MA: MIT Press, 1995, 7: 231～238

4 Zhou Z H, Wu J X, Tang W. Ensembling neural networks: many could be better than all. Artificial Intelligence, 2002, 137(1-2): 239～263

5 吴建鑫，周志华，沈学华，陈兆乾. 一种选择性神经网络集成构造方法. 计算机研究与发展，2000，37(9)：1039～1044

6 Opitz D, Shavlik J. Actively searching for an effective neural network ensemble. Connection Science, 1996, 8(3-4): 337～353

7 Liu Y, Yao X. Simultaneous training of negatively correlated neural networks in an ensemble. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics, 1999, 29(6): 716～725

8 Perrone M P, Cooper L N. When networks disagree: Ensemble method for neural networks. In: Mammone R J, ed. Artificial Neural Networks for Speech and Vision. London: Chapman-Hall, 1993. 126～142

9 边肇祺，张学工. 模式识别. 北京：清华大学出版社，2000

10 Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975

11 Freidman J. Multivariate adaptive regression splines. Annals of Statistics, 1991, 19(1): 1～141

（上接第144页）

当 $h=0$时，即最大相克情况

$$\bar{a}\rightarrow_{h,k}\bar{b}=\langle(a^-\rightarrow_{h,k}b^-)\wedge_{h,k}(a^+\rightarrow_{h,k}b^+),(a^+\rightarrow_{h,k}b^+)\rangle$$

$$=\begin{cases}\langle b^-,b^+\rangle & a^-=1,a^+=1\\ \langle b^+,b^+\rangle & a^-<1,a^+=1\\ \langle 1,1\rangle & a^-<1,a^+<1\end{cases}$$

其中 $ite\{\alpha|\beta;\gamma\}$是条件式，即如果 β，则 α；否则 γ。

这是全新的观点给出当 $h=1$、0.75、0.5和0时，区间值逻辑的交、并和蕴涵的运算模型，当然，其具体的应用还需要进一步研究。

结论 蕴涵是研究逻辑学的重点和难点，本文用泛逻辑学的观点，把广义相关性引入到区间值逻辑中，重新定义了区间值逻辑的交、并、补运算和蕴涵，使得区间值逻辑运算模型连续可变，即区间值逻辑联结词具有柔性化，还证明区间蕴涵具有的正则性、单调性和伴随对性的良好性质。并在此基础上以全新的观点给出当 h=1、0.75、0.5和0时，区间值逻辑的交、并和蕴涵的运算模型，当然，其具体的应用还需要进一步研究。这对深入研究区间值逻辑柔性化，具有重要的意义。

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Outline of a New Approach to the Analysis of Systems and Decision Processes. IEEE Trans Systems Man Cybernet, 1973, 3: 28～44

2 Wang G J. On the Logic Foundation of Fuzzy Reasoning. Information Sciences, 1999, 117: 47～88

3 Pawley Z. Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341～356

4 Pawlak Z. Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1991

5 Zadeh L A. Fuzzy sets. Information Control, 1965, 8: 338～353

6 Bundy A. Incidence calculus: a mechanism for probabilistic reasoning. Journal of Automated Reasoning, 1985, 1: 263～283

7 Bundy A. Correctness criteria of some algorithms for uncertain reasoning using incidence calculus. Journal of Automated Reasoning, 1986, 2: 109～126

8 Wong S K M, Wang L S, Yao Y Y. On Modeling Uncertainty with Interval Structures. Intl. Journal of Computational Intelligence, 1995, 11(2): 406～426

9 Atanassov K. Intuitionstic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 86～96

10 Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 343～351

11 吴望名. 模糊推理的原理和方法[M]. 贵阳：贵州科学技术出版社，1994

12 王国俊. 三I方法与区间值模糊推理[J]. 中国科学(E辑)，2000，30(4)：331～340

13 陈图云，张宇卓. 有限区间值模糊逻辑代数及其广义重言式[J]. 辽宁师范大学学报，2002，25(1)：12～14

14 何颖瑜，王国俊. 关于 Fuzzy 格的若干注记——兼评直觉主义模糊集[J]. 模糊系统与数学，1997，11(4)：1～3

15 王艳平，陈图云. 直觉模糊逻辑蕴涵算子的研究[J]. 辽宁师范大学学报，1994(4)

16 薛占熬，何华灿. 粗糙蕴涵[J]. 计算机科学，2003，30(11)：18～20

17 何华灿，刘永怀，何大庆. 经验性思维中的泛逻辑[J]. 中国科学(E辑)，1996，26(1)：72～78

18 He Hua-can, Liu Yong-huai, He Da-qing. Generalized Logic in Experience Thinking [J]. Science in China (Series), 1996, 39(2): 225～234

19 何华灿，王华，等. 泛逻辑学原理[M]. 科学出版社，2001，8

20 薛占熬，何华灿. 何泛逻辑学的蕴涵性质[J]. 计算机科学，2005

21 Wong S K M, Wang L S, Yao Y Y. Interval Structures: a framework for representing uncertain Information [C]. In: Proc. of the Eighth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, California, 1992. 336～343

22 薛占熬，张小红，何华灿. 论广义相关性在柔性逻辑中的重要性[J]. 计算机科学，2004，31(2)：113～116

23 陆秋君，吴望名. 区间值命题逻辑系统的广义恒真式[J]. 模糊系统与数学，2001，15(2)：21～24

24 吴望名. 区间值模糊集的区间值模糊推理[J]. 模糊系统与数学，1992，6(2)：38～49

25 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 科学出版社，2000