

# 基于组增长的小世界 Scale-free 网络模型<sup>\*</sup>

吴艾 刘心松 刘丹 左朝树  
(电子科技大学计算机学院 成都 610054)

**摘要** 小世界和 Scale-free 是很多大规模复杂网络的重要特征,建立体现这些特征的网络模型是研究网络结构和行为的重要基础。针对现有模型不能全面地反映实际网络所具有的特征属性,提出了基于组增长的小世界 Scale-free 网络模型。该模型在小世界和 Scale-free 模型的基础上,结合了节点的本地强连接性、新增连接的度相关性和网络动态的增长方式,把小世界和 Scale-free 联系起来。仿真结果表明,该模型生成的网络图同时具有小世界和 Scale-free 特征。

**关键词** 复杂网络,小世界,Scale-free,组增长,网络模型

## Group Growing Based Small-World Scale-Free Network Model

WU Ai LIU Xin-Song LIU Dan ZUO Chao-Shu  
(School of Computer Science, University of Electronic Science & Technology, Chengdu 610054)

**Abstract** Recent work has shown that small-world and scale-free are both the important characters of many large scale complex networks. Building network models with these characters is essential to study the topology and behavior of networks. Based on the study of existed network models, a GGSS(Group Growing based Small-world Scale-free) network model is presented. Strong local connectivity and network evolving by group and the preferential attachment rule are combined in this model. Networks generated using this model have small-world and scale-free simultaneously. Simulation is done to verify the correctness of GGSS model.

**Keywords** Complex network, Small-world, Scale-free, Group growing, Network model

## 1 引言

小世界(即具有小特征路径长度和高聚集度)和 Scale-free(即具有 power-law 度分布)是许多复杂网络都具有的特征属性<sup>[1-4]</sup>,它们是研究网络结构和行为的关键,网络模型要能正确地反映网络的各种特征。当前被广泛研究的复杂网络模型主要有 3 种,它们是随机、小世界和 Scale-free 网络模型。上世纪 50 年代末,两位数学家 Erdos 和 Renyi<sup>[5]</sup>用随机图来描述复杂网络的拓扑,提出的 ER 模型奠定了随机网络理论的基础,ER 模型是一种理想化的网络模型,其任意两节点以等概率建立连接,Krapivsky 等<sup>[14]</sup>在此基础之上做了进一步的研究工作。随着计算能力的高速发展和大量详细的网络拓扑数据的获得,具备了研究实际网络特征属性的条件。1998 年 Watts 和 Strogatz 提出了 WS 小世界网络模型<sup>[6]</sup>(简称 WS 模型),Newman 和 Watts 发展了 WS 而得到 NW 模型<sup>[7]</sup>,Kleinberg<sup>[8]</sup>和 Albert 等<sup>[2]</sup>也用不同的方法建立了小世界模型。小世界网络的无序程度介于规则和随机网络之间,具有小世界特征,其小特征路径和大聚集系数与实际网络吻合。Barabasi 和 Albert 根据许多大型网络度分布服从 power-law 分布而提出了 Scale-free 模型<sup>[3]</sup>(简称 BA 模型),另外,PLRG<sup>[10]</sup>、Inet<sup>[11]</sup>、从 BA 发展而来的模型<sup>[9,12]</sup>等,它们都建立在度分布基础上,具有 power-law 的度分布。

ER 模型有小的特征路径,但聚集系数也很小<sup>[6]</sup>;小世界模型的度分布与 ER 模型的度分布相似,接近于泊松分布<sup>[3,9]</sup>。Scale-free 模型的聚集系数较小,并且随着网络规模的

增大而趋于零<sup>[13]</sup>。综上所述,以上三种模型都只反映了实际网络的部分特征属性。

提出了基于组增长的小世界 Scale-free 模型(Group Growing based Small-world Scale-free network model,简称 GGSS 模型),该模型在已有模型的基础上,综合考虑了网络的静态结构特征和动态成长过程,采用组增长的网络成长方式,把小世界和 Scale-free 联系起来,同时具有小特征路径、高聚集度和 power-law 的度分布的特征,能较全面地反映实际网络的特征属性。

## 2 定义

文中用到的网络图表示为  $G = \{V, E\}$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示网络  $G$  中的节点集合,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  表示  $G$  中边的集合,节点  $v_i$  的度  $d(v_i)$  是与该节点相连的边的数量,节点  $v_i$  的邻居节点之间存在的边数用  $f(v_i)$  表示。本文讨论的都是无向网络图。

**定义 1** 网络特征路径长度  $L$  是所有节点对之间的最短路径值的平均值,其中  $d_{i,j}$  表示节点  $v_i$  和  $v_j$  之间的最短路径值,  $L = \frac{1}{n \times (n-1)} \sum_{i \neq j} d_{i,j}$

**定义 2** 节点  $v_i$  的聚集度定义为  $v_i$  的所有邻居节点之间实际存在的连接数与理论存在的最大连接数之比,表示为:  $c_{v_i} = \frac{2 \times f(v_i)}{d(v_i) \times (d(v_i) - 1)}$

**定义 3** 聚集系数  $C$  定义为所有节点的聚集度的平均值,  $C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{v_i}$

<sup>\*</sup> 本课题得到四川省科技攻关项目(02GG006-018)基金资助。吴艾 博士生,研究方向为分布式系统,宽带网络。刘心松 教授,博士生导师,研究方向为宽带网络、分布并行处理、操作系统和数据库等。

**定义 4** 节点度分布  $p(k)$  定义为在网络中任选一个节点  $v_i$ , 其度为  $k$  的概率, 表示为:  $p(k) = p\{d(v_i) = k\}$

### 3 GGSS 网络模型

该模型的提出基于以下 3 点:

- (1) 复杂网络的形成是一个动态成长变化的过程;
- (2) 除了新增单个节点, 多节点成组加入网络也是网络规模增长的重要方式;
- (3) 新增节点除了易与度较大的节点连接之外, 也要与本地的一些节点建立连接。

对网络作下述规定: 每个节点对之间的连接边数不超过 1, 节点没有自环。

#### 3.1 生成组

每次添加的一组  $n$  个节点组成网络  $G'$ , 模型中  $G'$  由两步得到。首先生成不同  $d(v_i)$  的规则连接图,  $d(v_i)$  的值等于每个节点与邻居相连的边数  $k_0$  (模型中  $k_0 \geq 3$ ), 根据需要决定  $d(v_i)$  的多少。然后重连上述规则网络图的一些边, 对每一个节点  $v_i$  都进行一次重连操作, 在  $G'$  中随机选择一个节点  $v_j$ , 且  $v_j \neq v_i$ , 按概率  $p$  在  $v_i$  和  $v_j$  之间建立一条连接  $\langle v_i, v_j \rangle$ ,  $0 \leq p \leq 1$ 。  $p=0$  时,  $G'$  为规则网络, 随着  $p$  的增加,  $G'$  的无序程度逐渐增加, 逐渐接近随机网络。所有节点执行重连操作后,  $G'$  的总边数增加了  $pn$ , 详细过程见文 [6, 7]。在  $0 < p < 1$  的较大范围内,  $G'$  有小特征路径和大聚集系数, 是小世界网络 [6]。

#### 3.2 加入组

$G'$  和  $G$  用  $e$  条边相连接, 每条边连接节点的选择与节点度相关。在  $G'$  中随机选择一节点  $v_i$ , 然后计算  $d(v_i)$  与  $G'$  中所有节点度的和之比, 如果该比值大于一个介于 0 和 1 之间的随机数, 则该节点被选定。然后在  $G$  中随机选择一节点  $v_j$ , 如果  $v_i$  和  $v_j$  之间还没有连接, 则用选定  $v_i$  的方法确定是否选定  $v_j$ 。选出  $v_i$  和  $v_j$  后, 在这两个节点之间建立一条连接边。重复上述过程, 直到  $e$  条连接边都建立为止。

加入组的方法既保证每个节点都有机会被选择, 又使度较大的节点被选择的几率大, 同时, 网络的动态增长也使在网络中存在时间较长的节点得到连接的机会更多一些。如果  $|V'| = 1$ , 该算法就与 Scale-free 模型的算法类似。

#### 3.3 GGSS 模型算法

在 3.1 和 3.2 节的基础上, 得到 GGSS 模型算法, 如下:

- 1 初始化网络  $G = NULL$ ;
- 2 生成新组  $G' = (V', E')$ ;
- 3 如果  $G = NULL, G = G'$ , 转到 2;
- 4 随机选择一节点  $v_i \in V'$ ;
- 5 计算  $y(v_i) = d(v_i) / (2|E'|)$ ;
- 6 生成随机数  $y_{rand} \in [0, 1]$ ;
- 7 如果  $y_{rand} > y(v_i)$ , 转到 4;
- 8 随机选择一节点  $v_j \in V$ ;
- 9 如果  $\exists \langle v_i, v_j \rangle$ , 转到 8;
- 10 计算  $y(v_j) = d(v_j) / (2|E|)$ ;
- 11 生成随机数  $y_{rand} \in [0, 1]$ ;
- 12 如果  $y_{rand} > y(v_j)$ , 转到 8;
- 13 连接  $v_i$  和  $v_j$ ;
- 14 如果  $G'$  和  $G$  之间的连接边小于  $e$ , 转到 4;
- 15 如果  $|V| < N_0$ , 转到 2;
- 16 结束

加入了  $m$  个组之后,  $|V| = mn, |E| = |E'| + e(m-1), \langle k \rangle = \frac{2(|E'| + e(m-1))}{mn}$ 。下面从理论上分析计算度分布表达式和聚集系数  $C$  的最小值, 特征路径长度不易由理论计算而得, 将通过仿真得到。

### 4 GGSS 模型分析

#### 4.1 GGSS 度分布

下面用 continuum 理论 [3] 来分析计算 GGSS 模型度分布的近似值。

因为通常  $p$  的取值都较小, 所以认为  $G'$  加入  $G$  之前每个节点的度为  $k_0$ , 忽略重连对  $G'$  中节点度的影响。把每个组  $G'$  的加入近似看成是  $n$  个节点逐个加入的, 每个单位时间  $t$  加入一个节点, 每一个节点在加入时与  $G$  有  $e/n$  条边相连, 用  $\Pi d(v_i)$  表示  $d(v_i)$  与  $G$  中所有节点度之和的比值, 则  $G$  中节点  $v_i$  的度  $d(v_i)$  随时间  $t$  的变化而变化, 并满足:

$$\frac{\partial d(v_i)}{\partial t} = \frac{e}{n} \Pi d(v_i) = \frac{e}{n} \frac{d(v_i)}{\sum_{j=1}^{N-1} d(v_j)} \quad (1)$$

在  $t$  时刻,  $G$  中所有节点度之和为:

$$\sum_{j=1}^{N-1} d(v_j) \approx (k_0 + 2 \times \frac{e}{n})(t-1) \quad (2)$$

这里用“ $\approx$ ”是因为第一个组加入时,  $G'$  和  $G$  之间没有加入  $e$  条连接, 当  $n$  较小,  $m$  较大时, 其对计算结果的影响可以忽略。将 (2) 式代入 (1) 式得:

$$\frac{\partial d(v_i)}{\partial t} = \frac{e}{n(k_0 + 2 \times \frac{e}{n})(t-1)} d(v_i) \quad (3)$$

令  $\frac{e}{n(k_0 + 2 \times \frac{e}{n})} = F$ , 并利用边界条件  $d(v_i)$  在  $t_i$  时刻的

值为  $k_0 + \frac{e}{n}$ , 解偏微分方程 (3) 式可得节点  $v_i$  在  $t$  时刻的度:

$$d(v_i) = (k_0 + \frac{e}{n}) (\frac{t-1}{t_i-1})^F \quad (4)$$

令,  $(k_0 + \frac{e}{n}) = H, d(v_i)$  在  $t$  时刻小于  $k$  的概率可以表示为:

$$P\{d(v_i) < k\} = P\{t_i > (\frac{H}{k})^{\frac{1}{F}}(t-1) + 1\} \quad (5)$$

因为增加节点的时间间隔是相同的, 所以时间  $t$  服从均匀分布, 其概率密度为:

$$P(t_i) = \frac{1}{t} \quad (6)$$

根据 (5)、(6) 式可得:

$$P\{t_i > (\frac{H}{k})^{\frac{1}{F}}(t-1) + 1\} = 1 - \frac{1}{t} ((\frac{H}{k})^{\frac{1}{F}}(t-1) + 1) \quad (7)$$

(7) 式为度分布的分布函数, 度分布概率密度函数  $p(k)$  可以对分布函数求一阶偏导数得到:

$$p(k) = \frac{\partial P(d(v_i) < k)}{\partial k} = \frac{t-1}{t} \times \frac{1}{F} \times H^{\frac{1}{F}} \times k^{-(1+\frac{1}{F})} \quad (8)$$

当网络规模很大时, 认为  $t \rightarrow +\infty$ , 对 (8) 式求极限, 得到了度分布  $p(k)$  的表达式:

$$p(k) = \frac{1}{F} H^{\frac{1}{F}} k^{-(1+\frac{1}{F})} \quad (9)$$

由 (9) 式可以看到,  $p(k)$  服从 power-law 分布, 令  $\gamma = 1 + \frac{1}{F}$ , 而  $\frac{1}{F} = 2 + \frac{nk_0}{e}$ , 所以

$$\gamma = 3 + \frac{nk_0}{e} \quad (10)$$

由 (10) 式可以看到,  $\gamma$  是  $n, k_0, e$  的函数, 随  $e$  增加而减

小,随  $n, k_0$  的增加而增加,  $e$  越大,  $n, k_0$  越小, 度分布越接近于 BA 模型的度分布<sup>[3]</sup>:  $\gamma=3$ , 当  $G'$  中的节点之间没有连接时,  $k_0=0$ , 这时 GGSS 模型退化为 BA 模型。

### 4.2 聚集系数

聚集系数  $C$  是本地连接强度的体现, 下面分析计算  $C$  的最小值  $C_{min}$ 。

在  $G'$  中, 重连之前任一节点  $v_i$  与附近的  $k_0$  个邻居节点相连, 邻居节点之间共存在  $e_0$  条边, 由定义 2 和定义 3 可得重连前的聚集系数:

$$C = \frac{2e_0}{k_0(k_0-1)}$$

重连后, 节点  $v_i$  增加了  $2p$  个邻居节点, 假设这  $2p$  个节点与  $v_i$  的原来  $k_0$  个邻居节点有  $e'$  条连接边, 这时:

$$C = \frac{2(e_0+e')}{(k_0+2p)(k_0+2p-1)}$$

所有  $m$  个组加入完成后, 组之间的连接边数总共增加  $e(m-1)$  条, 任一节点  $v_i$  的邻居节点数为  $k_0+2p+\frac{2e(m-1)}{mn}$ ,

在  $m$  较大时该值近似为  $k_0+2p+\frac{2e}{n}$ , 假设在加入组的过程中,  $v_i$  的邻居之间增加了  $e''$  条边, 所以最后  $G$  的聚集系数:

$$C = \frac{2(e_0+e'+e'')}{(k_0+2p+\frac{2e}{n})(k_0+2p+\frac{2e}{n}-1)}$$

因为  $e'$  和  $e''$  都大于零, 根据上式可得  $C_{min}$ :

$$C_{min} = \frac{2e_0}{(k_0+2p+\frac{2e}{n})(k_0+2p+\frac{2e}{n}-1)} \quad (11)$$

由于  $e'$  和  $e''$  都比  $e_0$  得多, 因此  $C_{min}$  和  $C$  相差不会太大。下面, 用仿真实验来验证模型的小世界和 Scale-free 特征属性。

## 5 仿真

用 GGSS 模型来生成网络图, 建立以下实验:

初始化  $G$  的节点和边为 0;  $G'$  的节点数目为  $n=10, k_0$  为 4, 重连概率  $p=0.15, G'$  和  $G$  之间建立连接边数  $e=20$ , 总共加入  $m$  个组,  $m$  分别取值 50、100、200、500、1000, 相应地生成节点数为 500、1000、2000、5000 和 10000 的网络图, 把这些图分别叫做 GGSS500、GGSS1000、GGSS2000、GGSS5000 和 GGSS10000 网络图。为了对照, 生成了对应的相同规模的随机网络图 RANDOM500、RANDOM1000、RANDOM2000、RANDOM5000 和 RANDOM10000。

如果变化  $m, n, e$  和  $p$ , 就可以得到具有不同网络特征值  $\langle k \rangle, L, C, p(k)$  的网络图。

### 5.1 小世界特征

利用各网络特征值的定义计算可求得平均度  $\langle k \rangle$ 、特征路径长度  $L$ 、聚集系数  $C$ , 把这些值放在表 1 中进行比较, 其中  $C_{min}$  为用 (11) 式计算得到的最小聚集系数。

从表 1 中可以看出, 和相同规模的随机网络图相比, GGSS 网络图的  $L$  略大于随机网络图的  $L$ , 但都在同一数量级; 而 GGSS 网络图的  $C$  却比随机网络图的  $C$  大几个数量级; 随着网络规模的增大, GGSS 网络的聚集系数  $C$  几乎不发生变化, 而 Scale-free 网络的聚集系数随着网络规模的增大而趋于零<sup>[13]</sup>。

由以上仿真及分析可知, GGSS 网络图具有较小的  $L$  和较大的  $C$ , 具有小世界特征, 属于小世界网络, GGSS 网络模型是小世界网络模型。

表 1 GGSS 网络和随机网络网络特征值的比较

网络图	N	$\langle k \rangle$	L	C	$C_{min}$	M	n	p	E
GGSS500	500	5.516	6.183	0.13260	0.1	50	10	0.15000	20
RANDOM500	500	5.540	4.892	0.00997				0.01100	
GGSS1000	1000	5.490	6.968	0.12922	0.1	100	10	0.15000	20
RANDOM1000	1000	5.510	5.518	0.00372				0.00530	
GGSS2000	2000	5.499	7.745	0.13140	0.1	200	10	0.15000	20
RANDOM2000	2000	5.533	6.097	0.00266				0.00266	
GGSS5000	5000	5.503	8.809	0.13153	0.1	500	10	0.15000	20
RANDOM5000	5000	5.554	6.920	0.00087				0.00106	
GGSS10000	10000	5.516	9.467	0.13122	0.1	1000	10	0.15000	20
RANDOM10000	10000	5.509	7.518	0.00056				0.00050	

### 5.2 Scale-free 特征

生成了不同规模的 GGSS 网络图之后, 计算各网络中的度分布  $P(k)$ , 表示在图 1 和图 2 中。图 1 中的三角形点线图为随机网络 RANDOM10000 的度分布, 其他 5 条点线图分别为 GGSS500、GGSS1000、GGSS2000、GGSS5000 和 GGSS10000 的度分布, 可以看到, 随机网络的度分布很接近于 Poisson 分布, 这与 GGSS 图的度分布明显不同。图 2 中直线段为  $\gamma=4.1$  的 power-law 对数坐标图, 雪花形点图图 GGSS10000 度分布的对数坐标视图, GGSS10000 的  $P(k)$  变化图接近于直线段, 说明其度分布近似服从 power-law 分布, 即  $P(k) \sim k^{-\gamma}, \gamma \approx 4.1$ 。用 (10) 式计算得到 GGSS10000 度分布的  $\gamma$  理论值为 5.0, 这与仿真结果有一定的差距, 有两个原因: 其一是在 (10) 式的推算过程中作了一些近似处理, 其二是 (10) 式的结论是假设网络规模无穷大的情况下得出的。

从以上仿真及分析可得出结论: GGSS 网络图具有 power-law 的度分布, GGSS 网络模型是 Scale-free 网络模型。

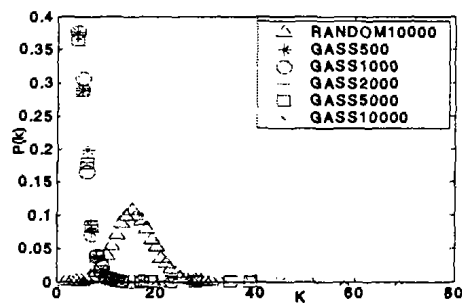


图 1 节点度分布  $P(k)$

3.1 和 3.2 节的仿真模拟计算证明, GGSS 模型能同时体现小世界特征和 Scale-free 特征, 符合实际网络的特征属性, 验证了 GGSS 模型的正确性。

结论 认为成组动态增长、较强的本地连接和新增连结对度相关性是很多复杂网络表现出小世界和 power-law 度分

量,9、19号 TCP 数据流的则维持较低数据吞吐量;然而,无论各个数据流的 RTT 是否相同,XCP 数据流均保持较高的数据吞吐量。因此,在 BDP 较大的网络环境中,XCP 数据流能够公平地获得网络带宽资源。

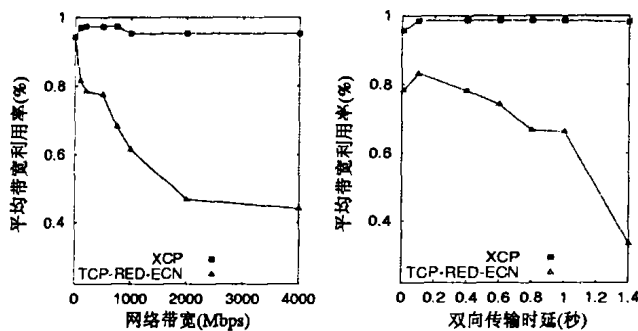


图4 XCP与TCP的带宽利用率比较

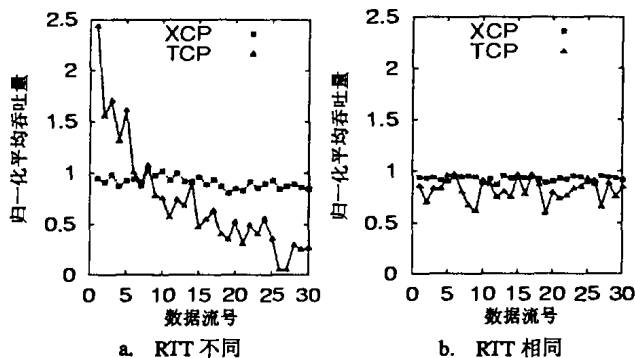


图5 XCP与TCP数据吞吐量比较

结束语 XCP 通过数据包携带数据流状态信息和流量

控制信息,提高了可扩展性;带宽利用率控制和带宽分配公平性控制的分别实施,保证了网络带宽资源的高效利用和公平分配,同时还增加了灵活性,可以很容易地支持区分服务,为网络运营商为不同业务提供区分服务而获取更多利润提供了技术手段;效率控制模块和公平控模块只需要少量代码即可实现,非常适合应用在核心路由器中。因此,XCP 极有希望成为下一代互联网的主流网络流量控制协议。

参考文献

- Jacobson V. Congestion Avoidance and Control. In: Proc. ACM SigComm'88, Aug. 988
- Lakshman T V, et al. The Performance of TCP/IP for Networks with High Bandwidth-Delay Products and Random Loss. IEEE Trans. on Network, June 1997
- Allman M, et al. TCP Performance over Satellite Links. In: Proc. 5th ICTS, Mar. 1997
- Caceres R, et al. Improving the Performance of Reliable Transport Protocols in Mobile Computing Environments. IEEE Journal of Selected Areas in Communications, 1995, 13(5)
- Low S H, et al. Dynamics of TCP/ARM and A Scalable Control. In: Proc. InfoCom'02, Jun. 2002
- Katabi D, et al. Internet Congestion Control for Future High Bandwidth-Delay Product Environments. In: Proc. ACM SigComm'02, August 2002
- Partridge C. Gigabit Networking, Reading, Massachusetts. Addison-Wesley, 1994
- Low S H, et al. Internet Congestion Control: An Analytical Perspective. IEEE Control Systems Magazine, Feb. 2002
- Henderson T, et al. On Improving the Fairness of TCP Congestion Avoidance. In: Proc. IEEE Globecom'98, Nov. 1998
- Dawkins S, et al. End-to-end Performance Implications of Links with Errors. IETF RFC3155, Aug. 2001
- Falk A, et al. Specification for the Explicit Control Protocol (XCP). Internet-draft, Oct. 2004
- Katabi D, et al. Congestion Control for High Bandwidth-Delay Products Networks. In: Proc. ACM SigComm'02, Aug. 2002

(上接第 25 页)

布的原因。针对已有模型不能全面体现网络的特征属性,提出了基于组增长的小世界 Scale-free 模型。该模型既考虑到了网络节点具有很强的本地连接,又考虑到了网络成长的动态性和新增加连接边与节点度的关联性,把小世界网络和 Scale-free 网络联系起来。使用该模型生成的网络图既具有小世界特征,又具有 Scale-free 特征,能较全面地反映实际网络的特征属性。该模型有助于建立更接近实际的网络拓扑结构和网络的动态成长过程,从而能更准确地分析、设计和评测与网络结构和行为相关的工作。下一步的工作是对 GGSS 模型结构特征和性质作进一步的分析,如容错、抗攻击能力等,并和其他网络模型的相应内容进行比较。

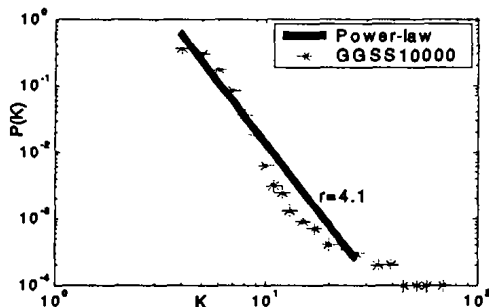


图2 节点度分布 P(k)对数曲线

参考文献

- Adamic L. The Small-world web. In: Proc. Eur. Conf. on Digital

- Libraries(ECDL), Sept. 1999. 443~452
- Albert R, Jeong H, Barabasi A. Diameter of the world wide web. Nature, 1999, 401: 130~131
- Albert R, Barabasi A. Topology of evolving networks: Local events and universality. Physical Review Letters, 2000, 85: 5234~5237
- Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C. On power-law relationships of the Internet topology. In: Proc. of ACM SIGCOMM, 1999
- Erdos P, Renyi A. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. 1960, Sci. Ser. A 5, 17
- Watts D, Strogatz S. Collective dynamics of 'Small-world' networks. Nature, 1998, 393: 440~442
- Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the Small-world network model. Phys. Lett, 1999, 263: 341~346
- Kleinberg J. The Small-world phenomenon: An algorithm perspective. In: ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 2000, 5: 163~170
- Barab'asi A, Albert R. Emergence of scaling in random networks. Science, 1999, 286: 509~512
- Aiello W, Chung F, Lu L. A random graph model for massive graphs. In: proc. of the 32rd Annu/ ACM Synpo. sium on Theory of Computing. 2000
- Jm C, Chen Q, Jamm S. Inet: Internet Topology Generator. [Technique Report CSE TR 433 00]. University of Michigan, EECS dept. 2000
- Medina A, Matta I, Byers J. On the origin of power laws in Internet topologies. ACM SIGCOMM Computer Communication Review, April 2000
- Bu T, Towsley D. On distinguishing between Internet power law topology generators. In: Proc. of IEEE INFOCOM, 2002
- Krapivsky P L, Redner S. Theory Probab. and its Appl. Phys. Rev. E, 2000, arXiv: cond-mat/0011094