主从 Lur'e 系统混沌同步的时滞输出反馈控制*)

王建根　赵　怡
(中山大学数学与计算科学学院　广州510275)

摘　要　该文讨论了主从 Lur'e 系统之间混沌同步的输出反馈控制问题，利用 Lyapunov 方法和矩阵不等式技巧，得到了一个依赖于时滞的混沌同步的充分条件，该条件易于用 LMI(线性矩阵不等式)方法进行验证，并可对最大允许时滞进行估计，最后结合 Chua's 电路进行了数值模拟。

关键词　Lur'e 系统，混沌同步，Chua's 电路，LMI，时滞输出反馈控制

Time-Delay Output Feedback Control for Master-Slave Synchronization of Lur'e System

WANG Jian-Gen　ZHAO Yi
(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract　In this paper a method for output error feedback with time-delay for master-slave synchronization of Lur'e system is presented. The method wich based on Lyapunov stability theory conclude a sufficient condition for master slave synchronization is convient to be tested use LMI (Linear Matrix lnequality) tools, and the maximum time-delay can be estimated. The theorem is illustrated on a Chua's circuit with the double scroll.

Keywords　Lur'e system, Chaotic synchronization, Chua's circuit, LMI, Output error feedback with time-delay

1　引言

混沌同步在 CDMA 技术、网络安全等方面已经得到应用，因此，这一问题越来越引起人们的研究兴趣。这其中，混沌神经网络、Chua's 电路等一大类问题可归结为对主从 Lur'e 系统的同步问题的研究，参见文[1～5,8]等。

对主从 Lur'e 系统的同步问题的研究已经有不少结果，这些工作大多是围绕无时滞主从系统展开的[1~3]。从实际应用的角度出发，常常需要考虑时滞的存在，有文献考虑了这样的情形，得到了同步的时滞无关充分条件，但关于时滞相关的充分条件尚不多见[4,5]，本文在参考文献的基础上围绕这一问题作了一些尝试，主要参考文[6,7]介绍的方法，得到了一个易于验证的充分条件。考虑以下主从系统

$$M:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)=B\sigma(C^Tx(t)),\\ p=Hx(t),\end{cases}\tag{1}$$

$$S:\begin{cases}\dot{z}(t)=Az(t)+B\sigma(C^Tz(t))+u,\\ q=Hz(t),\end{cases}\tag{2}$$

$$C:u=G[p(t-\tau)-q(t-\tau)]\tag{3}$$

其中 M 和 S 分别为主、从 Lur'e 系统，C: 为控制器。这里 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times n}h$、$C\in R^{n_h\times n}$ 所讨论的 Lur'e 系统的状态向量 x，$z\in R^n$，主从系统的输出向量 p、$q\in R^l$，这里 $l\leqslant n$，$H\in R^{l\times n}$，$G\in R^{n\times l}$，信号 $u\in R^n$ 为控制器的输出，控制器的输入为具时滞 τ 的主从系统之间的输出误差 $p(t-\tau)-q(t-\tau)$。

Lur'e 系统的非线性项 $\sigma(\cdot)$ 相当于具隐层的神经网络的激活函数，n_h 相当于隐层神经元的个数。我们在以下讨论中始终假设 $\sigma(\cdot):R^nh\to R^nh$ 是可分离的且连续的非线性函数，但可能在可数个点处不可微。同时，它满足扇形条件，即 $\sigma_i(\cdot)$ 位于扇形 $[0,k]$，这等价于 $\sigma_i(\xi)[\sigma_i(\xi)-k\xi]\leqslant 0,\forall\ \xi\in R$ for $i=1,\cdots,n_h$。

2　主要结论及证明

首先计算主从系统间的误差方程。定义主从系统间的误差为：$e(t)=x(t)-z(t)$，则有误差方程为：

$$\dot{e}(t)=Ae(t)+B\eta(C^Te(t);z(t))-GHe(t-\tau)\tag{4}$$

其中，$\eta(Ce(t);z(r))=\sigma(C^Tx(t))-\sigma(C^Tz(t))=\sigma(C^T(e(t)+z(t)))-\sigma(C^Tz(t))$，假定其仍然满足前述扇形条件，即 $\eta_i(C_i^Te(t);z(t))[\eta_i(C_i^Te(t);z(t))-kC_i^Te(t)]\leqslant 0,\forall\ e,z\in R$ for $i=1,\cdots,n_h$。

取 Lyapunov 函数为：$V=V_1+V_2+V_3$，其中：

$$V_1=e^T(t)Pe(t)\tag{5}$$

$$V_2=\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{e}^T(\alpha)Z\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\tag{6}$$

$$V_3=\int_{t-\tau}^{t}e^T(\alpha)Qe(\alpha)\mathrm{d}\alpha\tag{7}$$

由 $e(t)-e(t-\tau)=\int_{t-\tau}^{t}\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 得

$$e(t-\tau)=e(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\tag{8}$$

于是，

$$\dot{e}(t)=Ae(t)+B\eta(C^Te(t);z(t))-GH(e(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha)$$

$$\dot{e}(t)=(A-GH)e(t)+B\eta(C^Te(t);z(t))+GH\int_{t-\tau}^{t}\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_1&=\dot{e}^T(t)Pe(t)+e^T(t)P\dot{e}(t)\\&=[e^T(t)(A-GH)^T+\eta^T(C^Te(t);z(t))B^T+(\int_{t-\tau}^{t}\dot{e}(\alpha)\mathrm{d}\alpha)^TH^TG^T]Pe(t)\end{aligned}$$

*)本文受国家自然科学基金项目(10371136)以及广东省自然科学基金项目(021765)资助。王建根　博士生，主要研究方向：混沌控制与混沌同步。赵　怡　博导，主要研究方向：动力系统与控制系统。

$$+ e^T(t)P[(A-GH)e(t) + B\eta(C^Te(t);z(t)) + GH\int_{-\tau}^{t}\dot e(\alpha)d\alpha]$$

$$= e^T(t)[(A-GH)^TP + P(A-GH)]e(t) + 2e^T(t)PB\eta(Ce(t);z(t)) + 2\int_{-\tau}^{t} e^T(t)PGH\dot e(\alpha)d\alpha$$

引理 1 对任意适当维数的向量 a、b 和矩阵 N、X、Y、Z，其中 X、Z 是对称的，若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geqslant 0$，则

$$-2a^TNb \leqslant \inf_{X,Y,Z} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

证明：见文[7]。

由以上引理，若取 $a = e(t)$，$b = \dot e(\alpha)$，$N = -PGH$，则有

$$-2e^T(t)(-PGH)\dot e(\alpha) \leqslant \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot e(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y+PGH \\ Y^T+H^TG^TP^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot e(\alpha) \end{bmatrix}$$

从而得到

$$V_1 \leqslant e^T(t)[(A-GH)^TP + P(A-GH)]e(t) + 2e^T(t)PB\eta(Ce(t);z(t)) + \int_{-\tau}^{t} \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot e(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y+PGH \\ Y^T+H^TG^TP^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot e(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

$$= e^T(t)[(A-GH)^TP + P(A-GH)]e(t) + 2e^T(t)PB\eta(Ce(t);z(t)) + \tau e^T(t)Xe(t) + e^T(t)(Y+PGH)\int_{-\tau}^{t}\dot e(\alpha)d\alpha + (\int_{-\tau}^{t}\dot e^T(\alpha)d\alpha)(Y^T + H^TG^TP^T)e(t) + \int_{-\tau}^{t}\dot e^T(\alpha)Z\dot e(\alpha)d\alpha$$

$$= \dot e^T(t)[A^TP + PA + Y + Y^T + \tau X]e(t) - 2e^T(t)(Y + PGH)e(t-T) + 2e^T(t)PB\eta(Ce(t);z(t)) + \int_{-\tau}^{t}\dot e^T(\alpha)Z\dot e(\alpha)d\alpha$$

$$V_2 = (\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot e^T(\alpha)d\alpha d\beta)'_t = \int_{-\tau}^{0}\dot e^T(t)Z\dot e(t)d\beta - \int_{-\tau}^{0}\dot e^T(t+\beta)Z\dot e(t+\beta)d\beta$$

$$= \tau\dot e^T(t)Z\dot e(t) - \int_{-T}^{t}\dot e^T(\alpha)Z\dot e(\alpha)d\alpha$$

$$V_3 = (\int_{-\tau}^{t} e^T(\alpha)Qe(\alpha)d\alpha)' = e^T(t)Qe(t) - e^T(t-T)Qe(t-T)$$

$$V(t) = V_1 + V_2 + V_3 \leqslant e^T(t)Me(t) - 2e^T(t)(Y + PGH)e(\tau-\tau) + 2e^T(t)PB\eta(Ce(t);z(t)) + \tau\dot e^T(t)Z\dot e(t) + e^T(t)Qe(t) - e^T(t-\tau)Qe(t-\tau) - \sum_{i=1}^{n_h} 2\lambda_i\eta_i(\eta_i - kC_ie)$$

于是，有

$$V(t) \leqslant \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \\ \eta(Ce;z(t)) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} M & Y+PGH & PB+kC^T\Lambda \\ -Y^T-H^TG^TP^T & -Q & 0 \\ B^TP+k\Lambda^TC & 0 & -2\Lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \\ \eta(Ce;z(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \\ \eta(Ce;z(t)) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A^T \\ -H^TG^T \\ B^T \end{bmatrix} \cdot \tau \cdot Z[A-GH\ B] \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \\ \eta(Ce;z(t)) \end{bmatrix}$$

其中，$M = A^TP + PA + Y + Y^T + Q + \tau X$，应用矩阵的 Schur 补性质，如果下述矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M & Y+PGH & PB+kC^T\Lambda & \tau A^TZ \\ -Y^T-H^TG^TP^T & -Q & 0 & -\tau H^TG^TZ \\ B^TP+k\Lambda^TC & 0 & -2\Lambda & \tau B^TZ \\ \tau ZA & -\tau ZGH & \tau ZB & -\tau Z \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

则 $V < 0$ 成立，从而误差系统绝对稳定。于是有下述定理：

定理 1 对于主从系统(1)～(3)如果存在正定矩阵 P、Q、Z，以及对称矩阵 X 和矩阵 G、Y，使得上述矩阵不等式以及引理 1 条件中的矩阵不等式成立，则满足扇形区条件 $[0,k]$ 的该主从混沌系统可以达到同步。

注 1：定理中的两个矩阵不等式是关于矩阵变量 ZG、P、Q、PG、X、Y、Z 的线性矩阵不等式系统，它可以借助于 MATLAB 的 LMI 工具箱求解，从而可以方便地判断主从系统的同步。

注 2：保证同步的最大时滞 T 是以下优化问题的解：

$$\max_{G,P,Q,X,Y,Z} \tau$$

$$s.t.\ P > 0, Q > 0, Z > 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10}$$

该问题经适当处理后可以用 LMI 工具箱中的求解器 gevp 来求解。

注 3：从方便计算的角度考虑，该定理只具有理论意义，为了能应用 MATLAB 的 gevp 来求解问题，根据 gevp 的要求可以用下述定理：

定理 2 定理 1 中的矩阵变量若能使下述线性矩阵不等式成立，则混沌主从系统(1)～(3)可以达到同步。

$$\begin{bmatrix} M_1 & Y+PGH & PB+kC^T\Lambda \\ -Y^T-H^TG^TP^T & -Q & 0 \\ B^TP+k\Lambda^TC & 0 & -2\Lambda \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} A^TZA+X & -A^TZGH & A^TZB \\ -H^TG^TZA & H^TG^TGH & -H^TG^TZB \\ B^TZA & -B^TZGH & B^TZB \end{bmatrix} < 0$$

其中，$M_1 = A^TP + PA + Y + Y^T + Q$。

3 数值模拟与允许时滞的估计

考虑 Chua's 电路

$$\dot x_1 = a[x_2 - h(x_1)]$$

$$\dot x_2 = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\dot x_3 = -bx_2$$

$$p_1(t) = x_1 \quad p_2(t) = x_2 \quad p_3(t) = x_3$$

其中非线性项

$$h(x_1) = m_1x_1 + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1 + c| - |x_1 - c|) \tag{11}$$

其中取参数 $a = 9$，$b = 14.286$，$c = 1$，$m_0 = -1/7$，$m_1 = 2/7$ 则出现混沌，见文[4]，非线性项 $\phi(x_1 = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1 + c| - |x_1 - c|))$ 属于扇区 $[0,1]$。则 Chua's 电路可看作是下述混沌 Lur'e 系统：

$$\dot x = Ax + B\phi(Cx)$$

$$p(t) = Hx(t)$$

$$A=\begin{bmatrix}-am_1 & a & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -b & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-a(m_0-m_1)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C=[1\quad 0\quad 0]\quad H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

取从系统为：

$$\dot{z}=Az+B\phi(Cz)+u$$

$$q(t)=Hz(t)$$

其中，$u=G[p(t-\tau)-q(t-\tau)]$，τ 为时滞。

对于给定的时滞，应用上述定理，可以验证是否能找到使得主从系统同步的控制矩阵 G，进一步，应用定理 2，可以估计到保证同步的最大时滞。为方便，在实验中取，$P=Q=Z=I$，为了利用 LMI 求解，先把定理 2 矩阵中的 G^TZG 用单位阵代替，经用 MATLAB 计算，得 $\tau=0.0912$，

$$X=1.0e+007\begin{pmatrix}-4.5558 & -0.0017 & -0.4109\\ -0.0017 & -4.9450 & -0.0026\\ -0.4109 & -0.0026 & -4.5425\end{pmatrix}$$

$$Y=1.0e+003\begin{pmatrix}-0.0032 & -0.0100 & -0.0000\\ -0.0054 & -8.8985 & 0.5847\\ 0.0003 & 0.5575 & -0.9626\end{pmatrix}$$

$$G=1.0e+003\begin{pmatrix}0.0022 & 0.0100 & 0.0000\\ -0.0000 & 8.8983 & -0.5774\\ -0.0000 & -0.5581 & 0.9612\end{pmatrix}$$

经过验证，此矩阵满足定理 2 中的不等式。需要指出的是，由于 τ 的计算依赖于定理中几个矩阵的选择，因此这里的最大时滞估计是有一定保守性的。

结论 本文讨论了主从 Lur'e 系统混沌同步的输出反馈控制问题，利用 Lyapunov 方法和矩阵不等式技巧，得到了一个依赖于时滞的混沌同步的充分条件，该条件可借助于 LMI 方法进行验证。同时，应用优化问题分求解，对同步的最大允许时滞做了一个保守的估计。最后进行了数值验证。

进一步的讨论可以考虑

$$C: u=G[p(t-\tau)-q(t)] \tag{11}$$

的情况，从实际应用的角度来看，这应该更合理。

参考文献

1 Wu C W, Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems. Int. J. Bifurcation and Chaos, 1994, 4: 979～998

2 Curran P F, Chua L O. Absolute stability theory and the synchronization problem. Int. J. Bifurcation and Chaos, 1997, 6(7): 1375～1383

3 Suykens J A K, Curran P F, Chua L O. Master-slave synchronization using dynamic output feedback[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 1997, 3(7): 671～679

4 Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J. Master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2001, 11: 1707～1722

5 Liao Xiaoxin, Chen Guanrong. Chaos synchronization of general LUR'E systems via time-delay feedback control. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 207～213

6 PooGyeon P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. IEEE Trans. Automat. Contr., 1999, 4(44): 876～877

7 俞立. 鲁棒控制线性矩阵不等式处理方法. 清华大学出版社，2002. 158～168

8 Chen G. http://www. ee. cityu. edu. hk/～gchen/chaos-bifur. html

（上接第123页）

5 实验结果

本文仅对入侵检测过程中的时空一致性进行了分析和设计。由其体系结构可知，作为一个完整的检测过程，还应包括最终融合和决策等工作。为此 DFIDM 设计了基于空间因素[5]、时序因素、历史记录、人工加权等因素的最终融合决策模块。限于篇幅，这些工作将在其它文章中加以阐述。

为验证检测过程中的时空一致性，本文对 DFIDM 进行了一系列实验，实验环境为1个融合中心 FC(Intel 服务器 1G)，5个节点(PC 赛扬666)，全部置于同一局域网中，并通过集线器连接，保证所有数据均同样流入5个节点，攻击数据由1台 PC 赛扬666提供。根据 DFIDM 的需要，设计并实现了 DR、OR 所对应的数据库和功能模块。开发环境为 Red Hat linux8.0，用 ANSI C 编写代码，数据库为 My SQL 4.0。入侵类型选择了 TCP Flood、UDP Flood、ICMP Flood、后门攻击、缓冲区溢出攻击等5种，通过下载相关攻击工具实现。分别对同时攻击类型为1、3、5的情况进行3组实验，每组实验分别进行了300次，共900次。实验结果表明，DFIDM 能完整、准确地记录攻击过程中入侵行为的空间标志，时序的准确性达到了98.56%，从而较好地满足了设计需要。

结论 本文通过对时间和空间一致性的专门处理，保证了系统在最终融合和决策时，入侵数据来源在时序和空间定位上的精确性。而传统的 IDS 在这方面往往有所忽略，从而导致数据来源的混乱。两相比较，提高数据来源的精确性从源头上保证了 DFIDM 的精确性。普通多机系统通常采用系统初始化时统一设定起始时间，其后不再校准的策略。而 DFIDM 中使用标准系统时间周期 SSTC 对此作了一定改进，保证在各节点时间按一定周期循环校准，从而进一步提高了时空精确性。

值得注意的是，本文中所提到的时间校准仍然难以确保系统各节点时间的绝对一致性，这是因为系统时间校准的工作也需要在目标系统内各节点间进行计算和传输，难保不出现因延迟等情况造成的误差。也就是说，可能系统中负责时间校准的控制部件进行了时间周期校准后，认定时间一致性已得到保证，但实际上个别节点上仍可能有误差存在。由于 DFIDM 中对时间一致性要求较高，以 ms 作为时间刻度，这一可能的、个别的、较小的误差仍可能对最终决策性能带来影响。在这样的情况下，DFIDM 所处理的看似达到时间一致性的目标系统，实际上可能是一个目标系统个别节点误差固定的情况，这使 DFIDM 在该时间周期内进行的时间校准、融合决策可能因时间一致性被破坏而出现性能降低。综上所述，对全网内各节点时间一致性的更好保证还需要进一步研究。

参考文献

1 Bass T. Multisensor Data Fusion for Next Generation Distributed Intrusion Detection Systems. In: 1999 IRIS National Symposium on Sensor and Data Fusion, May 1999

2 Bass T. Cyberspace Situational Awareness Demands Mimic Traditional Command Requirements. Signal Magazine, AFCEA, Feb. 2000

3 罗光春，卢显良，张骏，李炯. 一种基于多传感器数据融合的入侵检测机制. 电子科技大学学报(自然版)，2004(1)

4 Bass T. Intrusion Detection Systems & Multisensor Data Fusion. Communications of the ACM, 2000, 43(4)

5 Bass T. Intrusion Detection Systems and Multisensor Data Fusion: Creating Cyberspace Situational Awareness. Communications of the ACM, 1999