基于限制容差关系的集对粗糙集模型*)

刘富春
(广东工业大学应用数学学院 广州510090)

摘 要 粗糙集理论是一种新的处理模糊和不确定性知识的软计算工具，在人工智能及认知科学等众多领域已经得到了广泛的应用。对于不完备信息系统，目前也有了多种扩充方法，如基于容差关系、基于相似关系和基于限制容差关系等的扩充。但是，这些扩充也都存在一些局限性。本文用集对分析的方法，定义了一个集对α相似限制容差关系，提出了一种基于限制容差关系的集对粗糙集模型。这种模型是限制容差关系的扩充粗糙集模型的推广和改进，既保留了原有扩充模型的优点，又可以通过对相似程度α的调节和控制，在保证这种容差类划分的准确性的同时，增加了其灵活性，更适于大型不完备信息系统的处理。

关键词 不完备信息系统，限制容差关系，集对分析方法，集对α相似限制容差关系

Set-pair Rough Set Model Based on Limited Tolerance Relation

LIU Fu-Chun
(Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

Abstract Rough set theory is emerging as a powerful tool for dealing with vagueness and uncertainty of facts, which has important applications to artificial intelligence and cognitive science. In order to process incomplete information systems, the classical rough set theory needs to be extended. Now there are several extensions, such as tolerance relation, similarity relation, and limited tolerance relation. Unfortunately, these extensions have their own limitation. In this paper, set-pair α similarity limited tolerance relation is defined by introducing set-pair analysis ideas. A new extension of rough set based on set-pair α similarity limited tolerance relation is presented. Not only does the extension reserve the advantage of limited tolerance relation, but also its flexibility has been increased by adjusting the value of the similarity α, while its accuracy is also guaranteed. By an example, it is verified that it is more effective than the previous extensions in practice

Keywords Incomplete information system, Limited tolerance relation, Set-pair analysis, Set-pair α similarity limited tolerance relation

1 引言

近年来由 Pawlak 等人提出的经典粗糙集理论，作为一种新的处理模糊和不确定性知识的数学工具，在知识获取方面已经取得了很大的成功[1]。但是，应用这种经典粗糙集理论的一个重要前提就是它的处理对象必须是完备信息系统。而在现实生活中，由于数据测量的误差、数据获取能力不足等原因，使得大量的信息系统都是不完备的，因此，需要对经典粗糙集理论进行适当的扩充[2~4]。

目前，已经有了基于容差关系[2]、基于相似关系[3]和量化容差关系[3]等的扩充粗糙集理论。由于这些扩充也都存在一定的局限性，王国胤提出了一种基于限制容差关系的扩充粗糙集模型[4]。限制容差关系刚好介于容差关系与相似关系这两个极端情况之间，因此基于限制容差关系的扩充粗糙集模型优于基于容差关系和基于相似关系的扩充粗糙集模型[4]。

尽管基于限制容差关系的扩充粗糙集模型与其它扩充粗糙集模型相比较有许多优点，且更加符合实际情况[4]，但是也存在以下局限性：个体对象之间只要有一个属性值不同就认为是完全不同的，必须被划分在不同的容差类中。这种不允许同一容差类的个体之间存在丝毫偏差的模型，会导致容差类的划分太细，个数太多，给不完备信息系统的处理带来极大不便，特别不适于大型不完备信息系统的处理。因为事实上，由于数据测量的误差、数据采集不完整等原因，使得这些信息本身就存在一定的不确定性，因此在实际情况中，特别是在处理大型的不完备信息系统时，允许出现一定程度的偏差，否则如果属于同一个容差类中个体对象的所有属性值都不允许有丝毫不同，那么将导致容差类的划分太细，个数太多，使得不完备信息系统的处理复杂化。例如，对象 $a=(1,2,3,4,\cdots,100)$ 和 $b=(2,2,3,4,\cdots,100)$，在100个属性中仅有一个属性值是不同的，在实际处理时，是可以大致将它们划分在同一个相似类中。

正是出于这种考虑，本文在限制容差关系的扩充粗糙集模型[4]的基础上，提出了一种基于限制容差关系的集对粗糙集模型。其主要思想是用集对分析的方法[5]，根据两个个体之间的集对联系度，定义了一个具有自反性和对称性的集对α相似限制容差关系，由此得到了不完备信息系统的集对α相似限制容差类和相应的上、下近似集。这种模型既保留了限制容差关系的扩充粗糙集模型的优点，又可以通过对相似

*)本文得到广东省自然科学基金项目(020146,031541)的资助。刘富春 讲师，主要研究领域为粗糙理论、数理逻辑及其在计算机科学中的应用。

程度α的调节和控制，在保证这种容差类划分的准确性的同时，增加其灵活性，从而克服了原有扩充模型的局限性，降低了处理不完备信息系统的复杂性。因此，它是限制容差关系的扩充粗糙集模型的推广和改进（当$\alpha=1$时，基于限制容差关系的集对粗糙集模型就退化为基于限制容差关系的扩充粗糙集模型），更适于对大型不完备信息系统的处理。文章还进一步讨论了限制容差关系的集对粗糙集模型中上、下近似集的性质。最后，用一个不完备信息系统的实例，分析比较了基于限制容差关系的扩充粗糙集模型和基于限制容差关系的集对粗糙集模型（$\alpha=0.9$，$\alpha=0.8$）之间的性能，说明了基于限制容差关系的集对粗糙集模型优于基于限制容差关系的扩充粗糙集模型。

本文用L_D表示限制容差关系，S_D^α表示集对α相似限制容差关系，分别用$I_D^L(x)$、$\underline{R}_D^L(X)$、$\overline{R}_D^L(X)$表示x在D下的限制容差类和相应的X的下近似集、上近似集，分别用$I_D^S(x)^\alpha$、$\underline{R}_D^S(X)^\alpha$、$\overline{R}_D^S(X)^\alpha$表示$x$在$D$下的集对$\alpha$相似限制容差类和相应的$X$的下近似集、上近似集。

2 基于限制容差关系的集对粗糙集模型

容差关系和相似关系是对不可分辨关系的扩充的两个极端情况，而限制容差关系刚好介于容差关系与相似关系之间[4]。

定义1[4] 设(U,A)是一个不完备信息系统，U是对象的非空有限集，A是属性的非空有限集，$D\subseteq A$。令$P_D(x)=\{d|d\in D\wedge d(x)\neq *\}$。则$U$上的二元关系$L_D$称为限制容差关系是指：对$\forall (x,y)\in U\times U$，有$(x,y)\in L_D$当且仅当

$$\forall d\in D(d(x)=d(y)=*)\vee((P_D(x)\cap P_D(y)\neq\varnothing)\wedge \forall d\in D((d(x)\neq *)\wedge(d(y)\neq *)\rightarrow(d(x)=d(y))))$$

显然限制容差关系L_D具有自反性和对称性，但不具有传递性。

定义2 设(U,A)是一个不完备信息系统。若$D\subseteq A$，$X\subseteq U$且$x\in U$，则x在D下的限制容差类$I_D^L(x)$和相应的X的下近似集$\underline{R}_D^L(X)$、上近似集$\overline{R}_D^L(X)$定义为：

$$I_D^L(x)=\{y|y\in U\wedge(x,y)\in L_D\};$$

$$\underline{R}_D^L(X)=\{x|x\in U\wedge I_D^L(x)\subseteq X\};$$

$$\overline{R}_D^L(X)=\{x|x\in U\wedge I_D^L(x)\cap X\neq\varnothing\}。$$

尽管基于限制容差关系的扩充粗糙集模型与基于容差关系[2]和基于相似关系[3]的扩充粗糙集模型相比较有许多优点，且更加符合实际情况[4]，但是也存在一定的不足：个体对象之间只要有一个属性值不同就认为是完全不同的，必须被划分在不同的容差类中。这种不允许同一容差类的个体之间存在丝毫偏差的模型，将导致系统容差类的划分太细、个数太多，给不完备信息系统的处理带来极大的不便。事实上，考虑到数据的测量误差、采集不完整等原因，使得这些信息本身就存在一定的不确定性，因此在实际情况中，处理不完备信息系统，特别是大型不完备信息系统，是允许出现一定程度的误差的。例如，对象$a=(1,2,3,4,\cdots,100)$和$b=(2,2,3,4,\cdots,100)$，在100个属性中仅有一个属性值是不同的，因此在实际处理时，是可以把它们近似看成是不可分辨的，而将它们划分在同一个相似容差类中，它的准确性仍然可高达0.99。

集对分析[5]是由赵克勤教授近年来提出的用于研究集合之间相互关系的一种新理论，其核心思想是把被研究的客观事物之确定性联系和不确定性联系作为一个系统来分析处理，现在已经得到了广泛的应用[5]。

下面用集对分析的思想方法，引入两个个体之间的集对联系度的概念，将基于限制容差关系的扩充粗糙集模型[4]进行推广和改进。

定义3 设(U,A)是一个不完备信息系统。若$D\subseteq A$且$x,y\in U$，则x与y在D下的集对联系度$U_D(x,y)$定义为：

$$U_D(x,y)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k,$$

这里$s_1=k_1/n$，$s_2=k_2/n$，$s_3=k_3/n$，$s_4=k_4/n$，其中$n=|D|$，

$$k_1=|\{d|d\in D\wedge d(x)=d(y)=*\}|,$$

即k_1为x和y在D下取值都不明确的属性个数，

$$k_2=|\{d|d\in D\wedge d(x)=d(y)\wedge d(x)\neq *\wedge d(y)\neq *\}|$$

即k_2为x和y在D下取值明确且相等的属性个数，

$$k_3=|\{d|d\in D\wedge((d(x)=*\wedge d(y)\neq *)\vee(d(x)\neq *\wedge d(y)=*))\}|$$

即k_3为x和y在D下取值有且仅有一个明确的属性个数，

$$k_4=|\{d|d\in D\wedge d(x)\neq d(y)\wedge d(x)\neq *\wedge d(y)\neq *\}|$$

即k_4为x和y在D下取值明确但不相等的属性个数，

显然，$s_1+s_2+s_3+s_4=1$。

定义4 设(U,A)是一个不完备信息系统。若$D\subseteq A$且$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则$U$上的二元关系$S_D^\alpha$称为集对$\alpha$相似限制容差关系是指：对$\forall (x,y)\in U\times U$，有$(x,y)\in S_D^\alpha$当且仅当

$$(U_D(x,y)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k)\wedge(s_1=1\vee(s_2>0\wedge(s_1+s_2+s_3\geqslant\alpha)))。$$

定理1 (1)二元关系S_D^α具有自反性和对称性；(2)当$\alpha=1$时，$S_D^\alpha=L_D$。

证明：(1) 对任意$x\in U$，有$U_D(x,y)=U_D(x,x)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k$。

情形1 如果x在D下的所有属性值都为$*$，则$s_1=1$，所以$(x,x)\in S_D^\alpha$。

情形2 如果存在x在D下的某个属性值不是$*$，则

$$\{d|d\in D\wedge d(x)=d(y)\wedge d(x)\neq *\wedge d(y)\neq *\}$$
$$=\{d|d\in D\wedge d(x)=d(x)\wedge d(x)\neq *\}\neq\varnothing。$$
$$\{d|d\in D\wedge d(x)\neq d(y)\wedge d(x)\neq *\wedge d(y)\neq *\}$$
$$=\{d|d\in D\wedge d(x)\neq d(x)\wedge d(x)\neq *\}=\varnothing。$$

所以有$s_2>0$，$s_4=0$。即$s_2>0$且$s_1+s_2+s_3=1\geqslant\alpha$成立，因此，$(x,x)\in S_D^\alpha$。

这两种情形都说明S_D^α是自反的。再由定义4易知，S_D^α是对称的。

(2)当$\alpha=1$时，对任意$(x,y)\in S_D^\alpha$，有$U_D(x,y)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k$，且$s_1=1$，或$s_2>0$且$s_1+s_2+s_3\geqslant\alpha=1$。

情形1 如果$s_1=1$，则对任意$d\in D$，都有$d(x)=d(y)=*$成立，所以$(x,y)\in L_D$。

情形2 如果$s_2>0$且$s_1+s_2+s_3\geqslant\alpha=1$，则$P_D(x)\cap P_D(y)\neq\varnothing$。再由$s_1+s_2+s_3+s_4=1$得$s_4=0$。即对任意$d\in D$，由$d(x)\neq *$和$d(y)\neq *$可以推出$d(x)=d(y)$，所以$(x,y)\in L_D$。

这两种情形都说明$L_D\subseteq S_D^1$同理可证，对任意$(x,y)\in L_D$，都有$(x,y)\in S_D^1$，因此$S_D^1=L_D$。

注1 定理1表明限制容差关系是集对α相似限制容差关系当$\alpha=1$时的特殊情况。因此，集对α相似限制容差关系是限制容差关系的推广。

定义5 设(U,A)是一个不完备信息系统。若$D\subseteq A$，$X\subseteq$

U 且 $x\subseteq U$，则 x 在 D 下的集对 α 相似限制容差类 $I_D^S(x)^\alpha$ 和相应的 X 的下近似集 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha$、上近似集 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha$ 定义为：

$I_D^S(x)^\alpha=\{y \mid y\in U\wedge(x,y)\in S_D^\alpha\}$；

$\underline{R}_D^S(X)^\alpha=\{x \mid x\in U\wedge I_D^S(x)^\alpha\subseteq X\}$；

$\overline{R}_D^S(x)^\alpha=\{x \mid x\in U\wedge I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing\}$。

注2 由定理1可知，当 $\alpha=1$ 时，集对 α 相似限制容差类和相应的上、下近似集就分别退化为限制容差类和相应的上、下近似集，即

$I_D^S(x)^1=I_D^L(x)$；$\underline{R}_D^S(X)^1=\underline{R}_D^L(X)$；$\overline{R}_D^S(X)^1=\overline{R}_D^L(X)$。

因此，基于限制容差关系的集对粗糙集模型是基于限制容差关系的扩充粗糙集模型的推广和改进。它既保留了原有扩充模型的优点，同时又可以通过对 α 的调节，确保这种相似容差类划分的灵活性和准确性，克服了原有扩充模型的不足之处，更适于处理大型不完备信息系统。另一方面，由于文[6,7]建立的集对粗糙集模型实际上是基于容差关系的模型，它会使两个个体在没有明确相同的已知属性的情况下就被误判定在同一个容差类中[4]。而限制容差关系则丢弃了这个不足[4]，因此，基于限制容差关系的集对粗糙集模型也是对文[6,7]模型的改进。

3 基于限制容差关系的集对粗糙集模型的上、下近似的性质

下面再进一步讨论基于限制容差关系的集对粗糙集模型的上、下近似集的性质。

定理2 设 (U,A) 是一个不完备信息系统。若 $D\subseteq A$，$X\subseteq U$，则对任意 $\alpha\in[0,1]$，都有：(1) $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^1=\underline{R}_D^L(X)$；(2) $\overline{R}_D^S(X)^1=\overline{R}_D^L(X)\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。

证明：(1) 对任意 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\in X$。注意到 $I_D^S(x)^\alpha=\{y \mid y\in U\wedge(U_D(x,y)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k)\wedge(s_1=1\vee(s_2>0\wedge(s_1+s_2+s_3\geqslant\alpha)))\}$，$I_D^S(x)^1=\{y \mid y\in U\wedge(U_D(x,y)=s_1+s_2i+s_3j+s_4k)\wedge(s_1=1\vee(s_2>0\wedge(s_1+s_2+s_3\geqslant 1)))\}$，所以 $I_D^S(x)^1\subseteq I_D^S(x)^\alpha$。这样由 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$ 就有 $I_D^S(x)^1\subseteq X$，即 $x\in\underline{R}_D^S(X)^1$。所以 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^1$。再由注2得，$\underline{R}_D^S(X)^1=\underline{R}_D^L(X)$。

(2) 对任意 $x\in\overline{R}_D^S(X)^1$，都有 $I_D^S(x)^1\cap X\neq\varnothing$。类似(1)可得 $I_D^S(x)^1\subseteq I_D^S(x)^\alpha$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，即 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，所以 $\overline{R}_D^S(X)^1\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。由注2得 $\overline{R}_D^S(X)^1=\overline{R}_D^L(X)$。

注3 定理2表明对任意 $\alpha\in[0,1]$，集对 α 相似限制容差关系的下近似集 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha$ 包含于限制容差关系的相应的下近似集 $\underline{R}_D^L(X)$；而限制容差关系的上近似集 $\overline{R}_D^L(X)$ 包含于集对 α 相似限制容差关系的相应的上近似集 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。

定理3 设 (U,A) 是一个不完备信息系统。若 $D\subseteq A$ 且 $X,Y\subseteq U$ 且 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$。则 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$ 的充分必要条件是 $\overline{R}_D^L(X)^\alpha\subseteq Y$。

证明(必要性)：设 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。对任意 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，都有 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，所以存在 $y\in X$ 且 $y\in I_D^S(x)^\alpha$，即 $(x,y)\in S_D^\alpha$。再由定理1(1)得 $(y,x)\in S_D^\alpha$，所以 $x\in I_D^S(y)^\alpha$。再注意到 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$，而 $y\in X$，因此 $y\in R_D^S(Y)^\alpha$，即 $I_D^S(y)^\alpha\subseteq Y$，于是有 $x\in Y$。所以 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq Y$。

(充分性)设 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq Y$，反证法证明 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

如果 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$ 不成立，则存在 $x\in X$ 但 $x\notin\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$，即 $I_D^S(x)^\alpha\not\subset Y$ 由 $I_D^S(x)^\alpha\not\subset Y$ 可得，又存在 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 但是 $y\notin Y$。再根据定理1(1)及 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 得 $x\in I_D^S(y)^\alpha$，这样有 $x\in I_D^S(y)^\alpha\cap X$，即 $I_D^S(y)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，所以 $y\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。再注意到 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq Y$，因此 $y\in Y$，这与 $y\notin Y$ 矛盾。故 $X\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

注4 由定理3可知，X 包含于 Y 的集对 α 相似下近似集 $\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$ 当且仅当 X 的集对 α 相似上近似集 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha$ 包含于 Y。

定理4 设 (U,A) 是一个不完备信息系统。若 $D\subseteq A$，$X\subseteq U$ 且 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则：(1) $\overline{R}_D^S(X)^\alpha=U-\overline{R}_D^S(U-X)^\alpha$；(2) $\overline{R}_D^S(X)^\alpha=U-\underline{R}_D^S(U-X)^\alpha$。

证明：(1) 对任意 $x\in U-\overline{R}_D^S(U-X)^\alpha$，即 $x\notin\overline{R}_D^S(U-X)^\alpha$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\cap(U-X)=\varnothing$，即 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$，从而 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$。

反之，对任意 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$，都有 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\cap(U-X)=\varnothing$，即 $x\in U-\overline{R}_D^S(U-x)^\alpha$。所以 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha=U-\overline{R}_D^S(U-X)^\alpha$。

(2) 对任意 $x\in U-\underline{R}_D^S(U-X)^\alpha$，即 $x\notin\underline{R}_D^S(U-X)^\alpha$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\not\subset U-X$。这样有 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，$x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。

反之，对任意 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，即 $I_D^S(x)^\alpha\not\subset U-X$，所以 $x\in U-\underline{R}_D^S(U-X)^\alpha$。从而 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha=U-\underline{R}_D^S(U-X)^\alpha$。

定理5 设 (U,A) 是一个不完备信息系统。若 $D\subseteq A$，$X\subseteq U$ 且 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$。则：(1) $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq X\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha$；(2) $\underline{R}_D^S(\varnothing)^\alpha=\overline{R}_D^S(\varnothing)^\alpha=\varnothing$；(3) $\underline{R}_D^S(U)^\alpha=\overline{R}_D^S(U)^\alpha=U$。

证明：(1) 一方面，对任意 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$，根据定理1(1) S_D^α 的自反性得 $x\in I_D^S(x)^\alpha$，故 $x\in X$，所以 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq X$。

另一方面，对任意 $x\in X$。因为 $x\in I_D^S(x)^\alpha$，所以 $x\in I_D^S(x)^\alpha\cap X$，即 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，于是 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，即 $X\subseteq\overline{R}_D^S(x)^\alpha$。

(2) $\underline{R}_D^S(\varnothing)^\alpha=\{x \mid x\in U\wedge I_D^S(x)^\alpha\subseteq\varnothing\}=\varnothing$；

$\overline{R}_D^S(\varnothing)^\alpha=\{x \mid x\in U\wedge I_D^S(x)^\alpha\cap\varnothing\neq\varnothing\}=\varnothing$。

(3) 对任意 $x\in U$，根据 S_D^α 的自反性，得 $x\in I_D^S(x)^\alpha$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\neq\varnothing$。于是

$I_D^S(x)^\alpha\subseteq U$；$I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，

即 $x\in\underline{R}_D^S(U)^\alpha$ 而且 $x\in\overline{R}_D^S(U)^\alpha$。所以 $\underline{R}_D^S(U)^\alpha=\underline{R}_D^S(U)^\alpha=U$。

定理6 设 (U,A) 是一个不完备信息系统，$D\subseteq A$ 且 $X,Y\subseteq U$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$。如果 $X\subseteq Y$，则：(1) $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$；(2) $\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

证明：(1) 对任意 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$。因为 $X\subseteq Y$，所以 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq Y$，即 $x\in\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。于是 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

(2) 对任意 $x\in\overline{R}_D^S(x)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$。因为 $X\subseteq Y$，所以 $I_D^S(X)^\alpha\cap Y\neq\varnothing$。即 $x\in\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。于是 $\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

定理7 设 (U,A) 是一个不完备信息系统，$D\subseteq A$ 且 $X,Y\subseteq U$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$。则：(1) $\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha=\underline{R}_D^S(X)^\alpha\cap\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$；(2) $\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha=\overline{R}_D^S(X)^\alpha\cup\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$；(3) $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\cup\underline{R}_D^S(Y)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha$；(4) $\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha\cap\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

证明：(1) 因为 $X\cap Y\subseteq X$ 且 $X\cap Y\subseteq Y$，由定理6(1)得

$\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^\alpha$；$\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$，

所以 $\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^\alpha\cap\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

反之，对任意 $x\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha\cap\underline{R}_D^S(Y)^\alpha$，有 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X$ 且 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq Y$ 成立，即 $I_D^S(x)^\alpha\subseteq X\cap Y$，从而 $x\in\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha$。因此 $\underline{R}_D^S(X)^\alpha\cap\underline{R}_D^S(Y)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X\cap Y)^\alpha$。

(2) 为 $X\subseteq X\cup Y$ 且 $Y\subseteq X\cup Y$，由定理6(2)得

$\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha$；$\overline{R}_D^S(Y)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha$，
所以$\overline{R}_D^S(X)^\alpha\cup\overline{R}_D^S(Y)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha$。

反之，对任意 $x\in\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha$，都有 $I_D^S(x)^\alpha\cap(X\cup Y)\neq\varnothing$，即 $I_D^S(x)^\alpha\cap X\neq\varnothing$或 $I_D^S(x)^\alpha\cap Y\neq\varnothing$。从而 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$ 或 $x\in\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$，也就是 $x\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha\cup\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。因此$\overline{R}_D^S(X\cup Y)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha\cup\overline{R}_D^S(Y)^\alpha$。

(3)(4)由定理6用类似(1)的方法可证得。

定理8 设(U,A)是一个不完备信息系统，$D\subseteq A$ 且 $X\subseteq U$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。则$\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq X\subseteq\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$。

证明：(1)先证明$\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq X$。

对任意 $x\in\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$，都有 $I_D^S(x)^\alpha\cap\underline{R}_D^S(X)^\alpha\neq\varnothing$。所以存在 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 而且 $y\in\underline{R}_D^S(x)^\alpha)^\alpha$。由定理1(1)及 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 得 $x\in I_D^S(y)^\alpha$。再由 $y\in\underline{R}_D^S(X)^\alpha$ 得 $I_D^S(y)^\alpha\subseteq X$。因此 $x\in X$。这说明$\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq X$。

(2)再用反证法证明 $X\subseteq\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$。

如果 $X\subseteq\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$ 不成立，则存在 $x\in X$ 但 $x\notin\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(x)^\alpha)^\alpha$，即 $I_D^S(x)^\alpha\not\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。因此又存在 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 但 $y\notin\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，再由定理1及 $y\in I_D^S(x)^\alpha$ 得 $x\in I_D^S(y)^\alpha$。于是 $x\in I_D^S(y)^\alpha\cap X$，即 $I_D^S(y)^\alpha\cap X\neq\varnothing$，所以 $y\in\overline{R}_D^S(X)^\alpha$。这与 $y\notin\overline{R}_D^S(X)^\alpha$ 矛盾。

推论9 设(U,A)是一个不完备信息系统，$D\subseteq A$ 且 $X\subseteq U$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。则

$\underline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq X\subseteq\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$。

证明：由定理5(1)得，$\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq X\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha$，再根据定理6得

$\underline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq\underline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(\underline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$；

$\underline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(X)^\alpha\subseteq\overline{R}_D^S(\overline{R}_D^S(X)^\alpha)^\alpha$。

再结合定理8即得证推论9。

4 实例分析

下面用一个实际的不完备信息系统来分析比较基于限制容差关系的扩充粗糙集模型和基于限制容差关系的集对粗糙集模型($\alpha=0.9$、$\alpha=0.8$)之间的性能，说明基于限制容差关系的集对粗糙集模型优于基于限制容差关系的扩充粗糙集模型。

设不完备信息系统(U,A)如下表，其中对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，属性集 $A=\{d_1,d_2,\cdots,d_9,d_{10}\}$。

表1

U \ A	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
x_1	3	2	1	0	0	*	1	1	*	3
x_2	*	2	*	1	1	2	*	1	1	3
x_3	2	*	*	3	0	*	2	3	1	*
x_4	*	0	0	*	0	2	*	*	2	1
x_5	3	2	1	3	*	2	3	*	2	1
x_6	2	*	*	*	*	*	2	*	*	*
x_7	*	2	*	*	0	*	2	2	2	2
x_8	3	2	2	0	0	*	1	1	*	3

给定 $X=\{x_1,x_3,x_8,x_7\}$，下面分别用 $\alpha=1$、$\alpha=0.9$、$\alpha=0.8$来对比分析集对 α 相似限制容差类和相应的 X 的上、下近似集。

(1)当 $\alpha=1$时，集对 α 相似限制容差类就退化为限制容差类。此时有：

$I_D^L(x_1)=I_D^S(x_1)^1=\{x_1\}$；$I_D^L(x_2)=I_D^S(x_2)^1=\{x_2\}$；

$I_D^L(x_3)=I_D^S(x_3)^1=\{x_3,x_6\}$；$I_D^L(x_4)=I_D^S(x_4)^1=\{x_4\}$；

$I_D^L(x_5)=I_D^S(x_5)^1=\{x_5\}$；$I_D^L(x_6)=I_D^S(x_6)^1=\{x_3,x_6,x_7\}$；

$I_D^L(x_7)=I_D^S(x_7)^1=\{x_6,x_7\}$；$I_D^L(x_8)=I_D^S(x_8)^1=\{x_8\}$。

$\underline{R}_D^L(X)=\underline{R}_D^S(X)^1=\{x_1,x_3,x_6,x_7\}$；

$\overline{R}_D^L(X)=\overline{R}_D^S(X)^1=\{x_1,x_3,x_6,x_7\}$。

尽管个体 x_1与 x_8很相似，但是由于要求相似程度 $\alpha=1$，因此它们还是属于不同的容差类。x_3与 x_4也同样存在这个问题。

(2)当 $\alpha=0.9$时，集对 α 相似限制容差类和相应的 X 的上、下近似集为：

$I_D^S(x_1)^{0.9}=\{x_1,x_8\}$；$I_D^S(x_2)^{0.9}=\{x_2\}$；

$I_D^S(x_3)^{0.9}=\{x_3,x_4,x_6\}$；$I_D^S(x_4)^{0.9}=\{x_3,x_4\}$；

$I_D^S(x_5)^{0.9}=\{x_5\}$；$I_D^S(x_6)^{0.9}=\{x_3,x_6,x_7\}$；

$I_D^S(x_7)^{0.9}=\{x_6,x_7\}$；$I_D^S(x_8)^{0.9}=\{x_1,x_8\}$。

$\underline{R}_D^S(X)^{0.9}=\{x_6,x_7\}$；$\overline{R}_D^S(X)^{0.9}=\{x_1,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8\}$。

由于个体 x_1与 x_8、x_3与 x_4在十个属性中仅有一个属性值不同，因此，当相似程度 $\alpha=0.9$时，它们被认为是不可分辨的。

(3)当 $\alpha=0.8$时，集对 α 相似限制容差类和相应的 X 的上、下近似集为：

$I_D^S(x_1)^{0.8}=\{x_1,x_2,x_8\}$；$I_D^S(x_2)^{0.8}=\{x_1,x_2,x_8\}$；

$I_D^S(x_3)^{0.8}=\{x_3,x_4,x_6,x_7\}$；$I_D^S(x_4)^{0.8}=\{x_3,x_4,x_5,x_7\}$；

$I_D^S(x_5)^{0.8}=\{x_4,x_5,x_7\}$；$I_D^S(x_6)^{0.8}=\{x_3,x_6,x_7\}$；

$I_D^S(x_7)^{0.8}=\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$；$I_D^S(x_8)^{0.8}=\{x_1,x_2,x_8\}$。

$\underline{R}_D^S(X)^{0.8}=\{x_6\}$；

$\overline{R}_D^S(X)^{0.8}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$。

由于个体 x_2与 x_8在十个属性中仅有两个属性值不同，因此当相似程度 $\alpha=0.8$时，它们被认为是不可分辨的。同样地，x_4与 x_7、x_5与 x_7、x_6与 x_7也都出现这种情况，这与实际处理大型不完备信息系统更相符合。

从这个实例可以看出，基于限制容差关系的集对粗糙集模型既保留了限制容差关系的扩充粗糙集模型的优点，同时又可以结合实际情况，根据我们的需要来调节和控制相似程度 α 的取值，以确保其准确性的基础上增加其灵活性，从而降低处理不完备信息系统的复杂性。

结论 尽管王国胤提出的基于限制容差关系的扩充粗糙集模型与基于容差关系[2]和基于相似关系[3]的扩充粗糙集模型相比较有许多优点[4]，但是也存在一定的局限性：个体对象之间只要有一个属性值不同就认为是完全不同的，必须被划分在不同的容差类中。这种不允许存在丝毫偏差的模型，将导致系统容差类的划分太细、个数太多，使得不完备信息系统的处理很复杂，特别是不适于处理大型不完备信息系统。本文在限制容差关系的扩充粗糙集模型的基础上，用集对分析的方法[5]，根据两个个体之间的集对联系度，定义了一个具有自反性和对称性的集对 α 相似限制容差关系，从而提出了一种基于限制容差关系的集对粗糙集模型。这种模型既保留了限制容差关系的扩充粗糙集模型的优点，同时又可以结合实际情况，根据我们的需要来调节和控制相似程度 α 的取值，在确保其准确性的基础上增加其灵活性，从而降低处理不完备信息系统的复杂性。它是基于限制容差关系的扩充粗糙集模型的

推广和改进，更适于对大型不完备信息系统的处理。

在限制容差关系的集对粗糙集模型的基础上，还可以进一步探讨不完备信息系统的知识约简算法[8]，这将是我们下一步的研究任务。

参考文献

1 Pawlak Z, Busse J G, et al. Rough sets. Communications of the ACM, 1995, 38(11): 89～95

2 Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information system. Information Sciences, 1998, 112: 39～49

3 Stefanowski J, Tsoukias A. On the extension of rough sets under incomplete information. In: S Zhong, A Skowron, S Ohsuga, eds. In: Proc of the 7th Int'l Workshop on New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular Soft Computing. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 73～81

4 王国胤. Rough 集理论在不完备信息系统中的扩充. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1238～1243

5 赵克勤. 集对分析及其初步应用. 浙江科学出版社, 2000

6 黄兵, 周献中. 基于集对分析的不完备信息系统粗糙集模型. 计算机科学, 2002, 29(专刊): 1～3

7 黄兵, 钟斌, 周献中. 改进的集对粗糙集模型. 计算机工程与应用, 2004, 2: 82～84

8 张宏宇, 梁吉业. 不完备信息系统下的变精度粗糙集模型及其知识约简算法. 计算机科学, 2003, 30(4): 153～155

(上接第108页)

先进行一步预处理，即将 Σ 中所有满足下列任一条件：(1)前项与待检查规则的前项相同；(2)前项包含待检查规则的前项；(3)前项被待检查规则的前项包含的规则挑选出来，形成一个新的集合 Σ′，作为我们进行一致性检查的基础，根据前面所作的分析，也只有这些规则才有可能与待检查的规则发生矛盾。

算法1 新加入的"注意"产生规则的一致性检查算法

输入：Σ 中的所有"注意"产生规则、待检查的"注意"产生规则。

输出：一致性的判定。

Step1：将 Σ 中满足条件(1)～(3)任意一个的规则挑选出来，形成 Σ′；

Step2：将待检查的"注意"产生规则的否定转化为子句集，设为 $R_1=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$；

Step3：将 Σ′ 中所有"注意"产生规则转化为子句集的并集，设为 $R_2=\{c_1',c_2',\cdots,c_m'\}$；

Step4：令 $R=R_1\cup R_2$；

Step5：反复对 R 中的子句应用归结推理规则，并且把结果添加到 R 中，直到再也没有更多的归结项可以被添加，或者产生一个空子句；

Step6：R 如果为空(NIL)，则返回结果"一致"；否则返回结果"不一致"。

归结反驳具有完备性，表现为如果"注意"产生规则库与"注意"产生规则一致，则归结反驳过程将推导出空(NIL)子句。归结反驳具有可决定性，表现为如果"注意"产生规则库和新加入的"注意"产生规则不一致，则归结反驳过程会在未产生空子句的情况下终止[1]。

总结 心理常识对于人工智能和心理学的研究都具有重要意义，心理常识的获取和表示是当前人工智能研究中急需解决的一个重要问题。本文借鉴情绪研究中的若干方法，研究了一类特殊的心理状态——"注意"类心理常识。我们从包含着丰富知识和常识的 Internet 上获得了大量的包含"注意"的产生场景的文本段，对这些原始材料进行仔细的加工整理，据此总结归纳了几千条的"注意"常识，并对这些结果进行了全面的综合分析，结合前人的研究结果，得到了一个"注意"产生原因的分类体系。另外，我们认为，"注意"类心理状态的产生，与主体在社会场合中所担任的角色是密不可分的，因此自然的想到了基于角色来讨论个体的"注意"状态。分别定义了与"注意"产生有关的角色，以及代表客观环境的场景，并给出了各自的语义结构，据此构造了基于角色的"注意"类心理状态常识的表示框架。这个框架以角色为中心，包含了在语义分析中得出的角色及场景结构中影响"注意"产生的各种因素，并根据各个部分或结构的语义对"注意"类心理状态的产生原因进行了合理的解释。通过对大量场景实例进行实际的获取和表示，验证了这种表示方法的合理性和有效性。

我们下一步研究的目标是群体角色的分析和表示，以及如何将一个文本段或一个篇章中的连续场景中的角色的多种心理状态变化连贯而又完整地表示出来。

参考文献

1 Burhans D T. A Question Answering Interpretation of Resolution Refutation. A Dissertation Submitted to the Faculty of the Graduate School of State University of New York. Available at: http://citeseer.ist.psu.edu, 2002

2 John C. Psychology of Emotion. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1991

3 Davies D R, et al. Selective-and Stustained-Attention Tasks: Indiviual and Group Differences. In: Varieties of Attention, Academic Press, Inc., 1984

4 Krohne H W, Egloff B. Vigilant and Avoidant Coping: Theory and Measurement. In: Stresand andt emotion, Vol. 17, Washington, DC: Taylor & Francis, (in press)

5 Reisenzein R. Appraisal Processes Conceptualized from a Schema-Theoretic Perspective: Contri butions to a Process Analysis of Emotions. In: Appraisal Processes in Emotion: Theory, Methods, Research, 1999. 187～201

6 Scherer K R. Studying the Emotion-Antecedent Appraisal Process: An Expert System Approach. Cognition and Emotion, 1993. 325～355

7 Shaver P. Emotion Knowledge: Further exploration of a prototype approach. Emotions in Social Psychology: Essential Readings, Philadelphia: Psychology Press, 2001

8 Sowa J F. Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine. Addison-Wesley, New York, 1984

9 Tian W, Cao G G. Research on the Human Psychological commonsense: [Ph. D]. Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, 2003

10 Velásquez J D. Modeling emotions and other motivations in synthetic agents. In: Proc. AAAI-97, 1997

11 陆汝钤. 世纪之交的知识工程与知识科学. 清华大学出版社, 2001

12 梅家驹. 同义词词林. 上海辞书出版社, 1983

13 王雁. 普通心理学. 人民教育出版社, 2002

14 朱智贤. 心理学大词典. 北京师范大学出版社, 1989