

一种用于信度网推理的高效三角化算法^{*}

张 聪^{1,2} 沈一栋³ 程克非⁴

(重庆大学计算机学院 重庆400044)¹ (重庆交通学院计算机系 重庆400074)²

(中国科学院软件研究所计算机科学重点实验室 北京100080)³ (重庆邮电学院计算机系 重庆400054)⁴

摘 要 信度网是不确定性知识表达和推理的有力工具。信度网的精确推理是 NPC 问题,计算的主要困难在于将信度网三角化并构造一棵最小权的 join tree 上。此项研究提出了一种新的三角化算法 MsLB-Triang,该算法同时利用了无向图三角化的 Direc 性质与 LB-单纯性质,在生成的三角化图的总权以及增加边的数目上均明显优于目前广泛采用的 Min. Weight Heuristic 算法。

关键词 信度网,精确推理,三角化

An Effective Triangulation Algorithm for Bayesian Network Inference

ZHANG Cong^{1,2} SHEN Yi-Dong³ CHENG Ke-Fei⁴

(Computer School, Chongqing University, Chongqing 400044)¹ (Computer Department, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074)²

(Lab. of Comp. Sci., Inst. of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)³

(Computer Department, Chongqing Post & Communication University, Chongqing 400054)⁴

Abstract Bayesian network is a powerful tool on non-deterministic knowledge representation and inference. The exact inference of Bayesian network is a NPC problem, the main difficulty is to triangulate the network and construct a join tree with minimum weight. This work presents a new triangulation algorithm: MsLB-Triang. MsLB-Triang is based on both the Direc property and LB-simple property of triangulation graph, and outperforms the popular using Min. Weight Heuristic triangulation algorithm at the total weight and total filling edges of result graph.

Keywords Bayesian network, Exact inference, Triangulation

1 引言

信度网是表达一组随机变量间概率依赖的图模型,由于在推理过程中利用了变量间的条件独立性,其表达能力和推理效率均十分强大。信度网已经成功地用于许多现实问题的诊断、预测和推理等应用中(例如文[1,2]中的报道)。

目前效率最高的一般信度网精确推理方法是由 Lauritzen 等^[15]和 Jensen 等^[13]分别独立提出的 join tree 算法,该方法首先将信度网转化为一个 join tree 结构,然后在 join tree 结构上进行推理计算。Cooper^[9]证明了信度网的精确推理是 NPC 问题,因此, Jensen^[12]在优化 join tree 算法时指出,将信度网转化为 join tree 过程中的三角化过程是 join tree 算法中唯一不能避免的具有指数时间复杂度的步骤,除非 P=NP。

为了进行信度网精确推理计算,目前通常采用单步启发式算法对信度网进行三角化^[12,14],虽然不能给出总状态空间最小的三角化结果,但是在实用上性能不错。Kjærulff^[14]研究对比了多个启发式搜索方法,报告在真实或者模拟的信度网中,采用最小权启发式算法(minimal weight heuristic)可以得到较小的总权和较少的添加边。Huang^[11]等详细讨论了最小权启发式算法,并给出了实现时的优化细节。

虽然最小权启发式算法在实用上具有很好的效果,但是仍然有可能寻找到更优的三角化方法。本文将在关于无向图三角化的一些新的研究基础上,提出一种基于 LB-单纯节点和最小分割集的信度网三角化算法 MsLB-Triang。数值实验

显示,本算法得到的 join tree 的总权(weight)和需要增加的边(fill edges)两个主要指标均优于 minimal weight heuristic 算法,能够提高信度网推理的效率。

本文第2节将简述信度网的 join tree 推理算法;第3节介绍无向图的三角化;第4节给出信度网三角化的 MsLB-Triang 算法;第5节对最小权算法和 MsLB-Triang 算法进行数值比较,最后给出结论。

2 信度网的 join tree 推理算法

2.1 信度网

信度网构建了一种在不确定知识条件下推理的图模型。形式上,信度网是一个有向无环图(DAGs),其节点是随机变量,边表示随机变量间的独立性假设。信度网对概率的表达基于节点间的条件独立性。由于条件独立性, n 维随机变量 (x_1, \dots, x_n) 的联合概率分布可以分解为:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | pa(x_i))$$

其中, x_i 代表随机变量 X_i 的值, $pa(x_i)$ 代表 X_i 的所有父节点的取值。

目前存在多个信度网的精确推理算法,每个算法均含有 NPC 难的计算。Lauritzen^[15]等和 Jensen^[13]等提出的 join tree 算法,其三角化分解是 NPC 难问题。Pearl^[19]提出了 Conditioning 方法,其 NPC 难的部分是确定一个最优的点反馈集(vertex feedback set),Becker 和 Geiger^[4]给出了一种近似算法,可以产生总权不超过最优反馈集的多项式界的反馈集。信

^{*} 本文受国家自然科学基金(No. 69883009)、(No. 60373052)、《跨世纪优秀人才培养计划基金》以及重庆市科技攻关项目《面向工业应用的智能开发平台及系统研究》的资助。张 聪 博士研究生,主要研究方向:人工智能。沈一栋 教授,博士生导师,主要研究方向:人工智能,逻辑推理。

度网精确推理还有如证据翻转(Evidence reversals)^[22]等多种方法。经由 Shachter^[23]证明,每种精确推理算法都隐含有三角分解的步骤。下面我们简要介绍采用三角分解的 join tree 算法。

2.2 信度网推理的 join tree 算法

join tree 算法是目前在信度网精确推理中最常用的算法^[12]。算法分为两个步骤。首先,在信度网的有向图上作一个变换,将有向图转换为称为 join tree 的无向树型结构。然后,在 join tree 上进行概率推理的数值计算。

把信度网变换为 join tree 需要下面三步(图1):

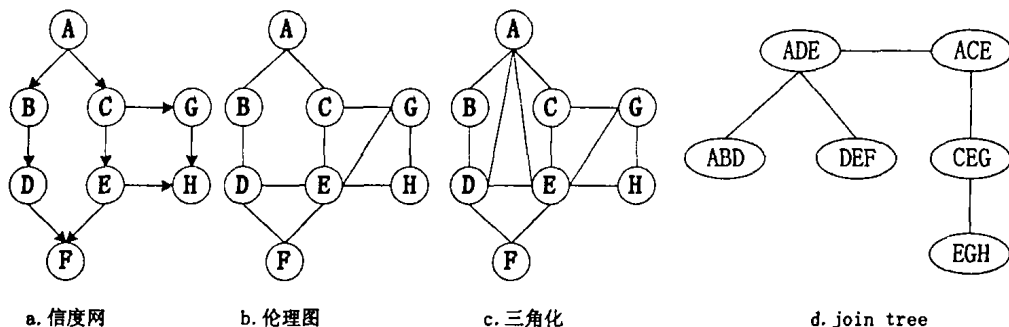


图1 信度网转换为 join tree

在 join tree 上,每个团都被赋值为其包含节点的联合概率,并且用信度传播算法进行概率计算。在 join tree 上的概率计算不是本文研究的重点,其细节可参见文[7]。

3 无向图的三角化

3.1 基础和符号

以下研究的图均是有限无向图。一个图用 $G(V, E)$ 表示,其中 $n_G = |V_G|, e_G = |E_G|$ 分别表示图 G 所具有的节点数和边数。在上下文含义清楚的地方,我们将省略下标 G 。 $G(A)$ 是由节点集 $A \subseteq V$ 所导引出的子图。一个完全子图是任意两个节点间均有边相连的子图。一个团(clique)是图中的一个极大完全子图。

图 G 中一个节点 x 的邻居(neighborhood)定义为 $N_G(x) = \{y \neq x | xy \in E\}; N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ 。一组节点的邻居定义为 $N_G(A) = \bigcup_{x \in A} N_G(x) \setminus A$ 。一个节点 x 是单纯的(simplicial)如果其邻居的导出子图 $N(G(x))$ 是完全子图($N[G(x)]$ 是一个团)。饱和(saturate)一个节点集 X ,就是在 G 中增加边直到导引子图 $G(X)$ 成为完全子图,定义 X 的不饱和度(deficiency) s 为构造完全子图的所有边数减去当前 $G(x)$ 中已有的边数,即 $s = n_X \times (n_X - 1) / 2 - e_X$ 。

对一个联通图 $G(V, E)$ 和 $X \subseteq V, \mathcal{C}_G(X)$ 表示 $G(V \setminus X)$ 中的联通子图的集合。 $S \subseteq V$ 被称为分割集,如果 $|\mathcal{C}(S)| \geq 2$ 。如果一个分割集使两个节点 a, b 分开在不同的联通子图中,则称该分割集为 ab -分割集(ab -separator)。一个 ab -分割集 S , 如果不存在它的真子集也能分割 a, b , 则 S 被称为极小 ab -分割集(minimal ab -separator)。一个分割集 S 是极小分割集,如果存在节点 a, b , 并且 S 是极小 ab -分割集。

一条弦是连接一个环中不相邻的两个节点的边。一个图是三角化的(triangulated),或者弦化的(chordal),如果每个长度大于等于4的环均含有弦。图 G 的一个三角化(triangulation) F 是图 G 的边填充集(edge fill),使得图 $G^+(V, E + F)$ 是三角化的。一般地,一个图有多个三角化方式。三角化 F 称为图 G 的极小三角化,如果 F 是 G 的三角化并且不存在 F' 的真子集 F' 是 G 的三角化。

1) 把有向图转换为无向图,并在图上增加边使得每个节点的父节点集合构成一个团。这一个步骤叫伦理化(moralizing)。

2) 在伦理化的无向图上增加边,使得该图三角化(triangulation),即图中每个长度大于等于4的无向环均含有弦(一条连接环中两个不相邻节点的边)。

3) 从三角化的图构造一棵无向树 T , T 的每个节点是信度网中的团,并满足 join tree 特性:给定 T 中两个团 X 和 Y , 所有在 X 到 Y 的路径上的团均包含节点集 $X \cap Y$ 。对每个节点 V 和其父节点集 $Pa(V), V \cup Pa(V)$ 存在于至少一个团中。

真子集 F' 是 G 的三角化。

一个图,如果每个节点上关联有限多个状态,则称为信度图(belief graph)。节点状态的对数(以2为底)称为该节点的权,记为 $w(v)$ 。如果一个团 C 含有 k 个节点,则团 C 的权等于:

$$w(C) = \sum_{i=1}^k w(v_i)$$

而一个图的总权定义为:

$$w(G) = \log_2 \sum_C 2^{w(C)}$$

3.2 三角化算法

三角化的基本技术是消去法(elimination)。给定任意图 $G(V, E)$, 一个消去顺序(elimination order)是双射 $\#: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, 图2给出消去法的基本实现。

一个消去顺序 $\#$ 是完美消去顺序(perfect elimination order, 简称 PEO), 是指填充图 $G^\# = G$ 。根据图2的消去算法生成的填充图,其输入的 $\#$ 就是该图的一个 PEO。得到好的三角化结果的关键在于选择正确的节点消去顺序。目前有很多方法帮助搜索一个较好的消去顺序,两种最经典的方法是 Rose 等提出的 LEX-M^[21] 和 Tarjan 等提出的 MCS^[24] 算法,均可以计算出局部极小三角化。文[6]中讨论了更多此类算法。

算法 Elimination Game

输入: 图 G, G 上的消去顺序 $\#$

输出: 填充图 G^+

LEX-M 和 MCS 算法一般不能计算最小三角化(minimum triangulation), 而且结果可能相差甚远。此类三角化算法以最少填充边为目标,其结果与信度网推理要求的最小总权的目標不同。但是, Kjærulff^[14] 声称, 一个三角化 T_1 的总权非常不可能小于另一个三角化 T_2 的总权, 如果填充数 $|T_1|$ 显著地大于 $|T_2|$ 。因此, 在考虑计算最小权三角化的时候, 我们可能采取下面三种优化目标: 最少填充数(minimal fill); 最小团尺寸(minimal size); 最小权(minimal weight)。

在所有的节点的状态数相等时, 后两个目标是一致的。为

了用消去法满足某个(全局)优化目标,直接的处理方法是选择一个能带来最小填充数,或者能产生最小尺寸的导引团,或者能产生最小权的导引团的节点作为下一个要消去的节点。这些方法分别称为 min. fill heuristic, min. size heuristic 和 min. weight heuristic 算法。Rose^[20]研究了头两种算法,他将其称为 minimum deficiency 和 minimum degree 算法,并认为这些算法产生出接近最优的消去顺序。

```

begin
  G = G;
  for i = 1 to n do
    v = #-1(i);
    饱和 NGi-1(v);
    Gi = Gi-1 - v;
  G+ = ∪i=0n-1 Gi
end

```

图2 消去法

在图 G 本身已经三角化时, Min. fill heuristic 算法可以计算出一个完美消去顺序,而 min. size 和 min. weight heuristic 算法不能保证这点^[20]。因此,在用消去法得到一个三角化之后,还有一些方法可以递归地消去冗余的填充边,得到一个极小三角化。消去冗余边的方法主要基于 Rose 等^[21]给出的下述定理。

定理3.1(Rose 等^[21]) 设 F 是图 $G(V, E)$ 的一个三角化,其填充图为 $G^+(V, E+F)$ 。令边 $\{v, w\} \in F$, 则 $F \setminus \{\{v, w\}\}$ 是图 G 的三角化当且仅当 v 和 w 的邻居的交集在 G^+ 中是一个完全子图,即 $G^+(N_G(v) \cap N_G(w))$ 是一个完全子图。

通过反复检查和删除满足定理3.1的冗余边,便可从任意三角化计算一个最小三角化,典型的算法具有 $O(c^2|F^2|)$ 时间复杂度,其中 c 是表征图 G 的边密度的常数。我们将这类方法称为递归消减(recursive thinning)。

文[7]通过对两个真实的信度网和两个虚构的信度网(一个低密度,一个高密度)的数值实验给出了多种方法的比较。文[14]检查的方法包括:随机消去;随机消去+递归消减;LEX-M; MCS; MCS+递归消减;Min. size heuristic; Min. fill heuristic; Min. weight heuristic。在所有的测试中,启发式搜索算法均大大优于其他算法。Cano 和 Moral^[17]对三种启发式搜索算法进行了改进,通过在计算中引入候选消去节点自身的状态数这一信息,提出了一些新的启发策略。Gamez 和 Puerta^[10]总结了文[14]和文[7]的结果,并对几种最流行的启发式算法和几种基于组合优化的算法的效果进行了比较。

文[14]的数值实验显示 Min. weight heuristic 算法是三种启发式算法中效果较好的。在1000次三角化测试中, min. weight heuristic 算法产生的三角化均是极小三角化,因此文[14]建议采用 Min. weight heuristic 算法后,可以不再用递归消减消除冗余边,且其计算结果已足够满意。

基于文[14], Huang 等^[11]介绍了如下的最小不饱和度和最小权三角化算法 Min. Weight Heuristic:

- 1)复制图 G ;将复制的图称为 G' 。
- 2)如果 G' 中还有节点,则完成下面的步骤:
 - a)从 G' 中选择邻居的不饱和度最小的节点 x ;如果有多个相同的节点,则从中选择权 $W(N_G[x])$ 最小的节点;

b)饱和 $N_G(x)$ 。同时,对于每条在 G' 中增加的边,在 G 中增加对应的边;

c)从 G' 中消去 x 。

3)完成了对图 G 的三角化。

Murhy^[17]在其信度网精确推理实现中也采用了同样的三角化算法。为了获得对最优解的估计,文[14]利用模拟退火法的结果作为三角化的一个下界。模拟退火法是一种随机搜索算法,只要计算时间足够长,可以依概率1收敛于最优解。文[14]对本文在第5节将进行实验的两个信度网 Medianus-I 和 Medianus-II 用模拟退火法进行了验算。通过数值实验表明,在合理的时间限制下,模拟退火法的结果在 Medianus-I 上平均比 min. weight heuristic 算法好20%,在 Medianus-II 上平均好10%,但是运行时间比启发式算法高几个数量级。这一实验结果也从另一个角度支持 min. weight heuristic 三角化是接近最优的。

4 MsLB-Triang 算法

研究表明三角化与图的极小割集有深刻的关系。在此问题上最早的两个著名结论由 Dirac^[9], 以及 Lekkerkerker 和 Boland^[16]分别给出。Dirac 的结论揭示了三角化图与极小割集之间的关系:

性质4.1(Dirac^[9]) 一个图是三角化的当且仅当图中每个极小割集均是团。

此性质可用于识别一个图是否是三角化的,并且可以在线性时间内完成^[16,15]。

Lekkerkerker 和 Boland^[12]则使用了现在已经很少见的 substar 概念来定义三角化图。我们借用文[5]阐述的现代术语重新定义他们提出的结论(缩写 LB 代表 Lekkerkerker-Boland)。

定义4.2 一个节点 x 是 LB-单纯的当且仅当 x 的邻居所包含的每个极小分割集均是团。

性质4.3(Lekkerkerker 和 Boland^[16]) 一个图是三角化的当且仅当每个节点是 LB-单纯的。

根据性质4.3, Berry 等^[4]提出了计算一个图的最小三角化边集的算法 LB-Triang。该算法根据任意顺序将每个节点 LB-单纯化。LB-Triang 算法在完成最小三角化计算上具有很多优点。LB-单纯化是第一个直接计算最小三角化边集的算法,对于预先给定的任何节点顺序,都可以计算出相应的最小三角化边集。该算法可以并行执行,也可以用消去法执行,其算法的复杂度为 $O(nm)$,与现有最快的算法一样。但是,这个算法不能得到一个能够生成最小权三角分解的节点序。

根据性质4.3和 LB-Triang 算法,我们提出一种新的信度网三角化算法,称为最小不饱和度分割集 LB-消去算法,简称 MsLB-Triang 算法。

算法: MsLB-Triang

输入:一个无向图 G

输出:三角化后的 G

1)复制图 G ;将复制的图称为 G' 。

2)如果 G' 中还有节点,则完成下面的步骤:

a)根据下面所描述的标准从 G' 中选择节点 x ;

b)LB-单纯化 x 。同时,对于每条在 G' 中增加的边,在 G 中增加对应的边。

c)从 G' 中消去 x 。

3)根据前面步骤增加了边的图 G ,是一个三角化图。

步骤2a 中的选择标准如下:

i. 选择 LB-单纯化需要填充边最少的节点

ii. 如果有多个满足条件(i)的节点,则分别计算这些节点

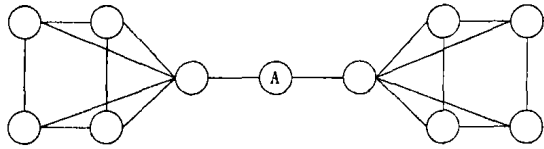
邻居内每个最小割集的权重,节点的 LB-权重(LB-weight)为邻居内各最小割集权重中的最大权重。

iii. 选择 LB-权重最小的节点。

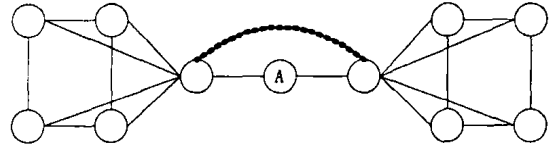
MsLB-Triang 通过消去 LB-单纯节点来完成三角化。下面,我们证明算法 MsLB-Triang 能够正确地进行三角化。因为算法的消去过程消去每个 LB-单纯节点,我们不加证明地引入 Berry 等^[5]给出的两个定理:

定理4.4(Berry 等^[5]) LB-Triang 计算输入图的一个最小三角化。

定理4.5(Berry 等^[5]) LB-Triang 消去过程计算输入图的一个相同的最小三角化。



a. 节点A是LB-单纯的,但不是单纯的



b. Min. weight heuristic在三角化时要增加冗余边

图3 Min. Weight Heuristic 算法不能计算最小三角化的示意图

下面我们证明 MsLB-triang 算法具有 $O(n^3m)$ 时间复杂度。很明显,算法中主要的困难在于如何选择当前要消去的节点。这个过程可以分为5步:

1) 计算每个 $N(x)$ 内的最小分割集。根据文[5],计算一个节点的邻居内的最小分割集需要 $O(nm)$ 的时间复杂度,因此这一步需要 $O(n^2m)$ 的复杂度。

2) 计算 LB-单纯化每个节点需要填充的边数。由于需要检查最小分割集中每对节点间是否已经有边相连,而最小分割集中的节点数不超过 n ,因此检查一个节点需要 $O(n^2)$,检查 n 个节点需要 $O(n^3)$ 的复杂度。

3) 选择具有最小 LB-单纯化填充边的节点,复杂度为 $O(n)$ 。

4) 对于选出的(多于一个)具有最小 LB-单纯化填充边的节点,计算其邻居内最小分割集的权重,并根据每个节点的 LB-权重确定要消去的节点。计算权重并选出其中最大的一个最小分割集需要 $O(n)$ 的时间复杂度,而候选的节点不超过 n 个,因此这一步的复杂度为 $O(n^2)$ 。

5) 从候选的节点中选出要消去的节点,复杂度为 $O(n)$ 。因为一个含圈的连通图的边数 m 大于节点数 n ,在所有的步骤中,复杂度最高的是第1步, $O(n^2m)$ 。这也是算法

MsLB-Triang 中2a步的复杂度。算法的2b步 LB-单纯化选定节点,复杂度为 $O(n^2)$ 。算法的2c步消去一个节点需要的时间为 $O(n)$ 。总的来说,每消去一个节点,算法需要 $O(n^2m)$ 的时间复杂度。因此,我们可以证明以下的定理。

定理4.7 算法 MsLB-Triang 的时间复杂度为 $O(n^3m)$ 。

证明:因为算法每次消去一个节点需要 $O(n^2m)$ 的时间复杂度,所以计算整个图的三角化需要 $O(n^3m)$ 的时间复杂度。

5 数值试验

为了验证 MsLB-Triang 算法的有效性和效果,我们用两个实际的信度网 Medianus-I 和 Medianus-II^[13]来进行数值试验。这些信度网在文[14]以及其它一些文章中被用来作为算例,其结果可以作为比较。

Medianus-I 和 Medianus-II 是用于疾病诊断的信度网模型,分别有43个节点和56个节点,如图4、5所示。我们对于每个节点随机地分配3到21之间的状态数,并使得节点平均状态数等于6。对每个信度网进行400次实验,分别比较 Min. Weight Heuristic 算法和 MsLB-Triang 算法进行三角化后的总权、填充边边数两个主要指标。

实验结果如表1。

表1

信度网算例	算法	最小权	平均权	最大权	最少填充边	平均填充边	最大填充边
Medianus-I	Minimal Weight Heuristic	21.55	25.74	30.51	60	62.98	69
	MsLB-Triang	20.27	23.15	26.37	57	57.49	61
Medianus-II	Minimal Weight Heuristic	10.34	24.02	34.49	77	89.89	100
	MsLB-Triang	17.52	20.78	25.88	74	77.87	84

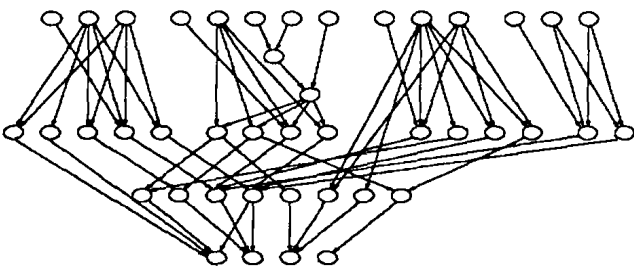


图4 Medianus-I 信度网

从数值实验的结果可以看出,MsLB-Triang 算法对于降低三角化的总权(总权用对数标度),消除冗余的边都具有非常明显的效果。对于 Medianus-I,平均权的改进为10%,对于 Medianus-II,平均权改进为13%,此结果非常接近文[14]报告的模拟退火算法的结果。同时,可以看出,对于计算最小三角化的填充边而言,MsLB-Triang 从平均结果和方差上也有相似的结论。

结论 本文提出了一种新的信度网三角化算法 MsLB-Triang,该算法利用性质4.3计算三角化。数值实验表明,

(下转第136页)

入侵检测系统的可用性。下步工作将实现一个相关图的形成部件,以便更好地表示入侵过程。

参考文献

- 1 李娜,秦拯,张大方,陈蜀宁. 基于 Markov Chain 的协议异常检测模型. 计算机科学, 2004, 31(10)
- 2 Yang Jin-Min, Zhang Da-Fang, Qin Zheng, et al. WINDAR: A Multithreaded Rollback-Recovery Toolkit on Windows. In: IEEE 10th Proc. of Pacific Rim Dependable Computing (PRDC10), 2004
- 3 Qin Zheng, Wu Zhong-fu, Liao Xiaofeng, et al. A Network Intrusion Detection Architecture Based on Intelligent Agents. In: Proc. of the Intl. Conf. on NIT, 2001
- 4 Ning P, Reeves D, Cui Yun. Correlating alerts using prerequisites of intrusions: [Technical Report TR-2001-13]. North Carolina State University, Department of Computer Science, Dec. 2001

(上接第117页)

MsLB-Triang 较好地改进了目前广泛采用的 Min. Weight Heuristic 算法,是一种高效率的三角化方法。

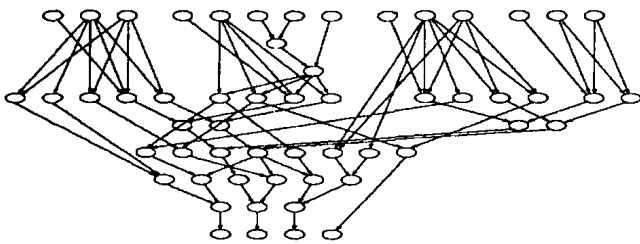


图5 Medianus-II 信度网

MsLB-Triang 算法已经用于作者开发的信度网推理程序中。在本研究中,算法采用了比较简单的实现方式,其复杂性还有进一步降低的可能。今后,我们将进一步对此算法的复杂度进行深入研究,争取提高算法的效率,降低其复杂度。

参考文献

- 1 Special issue on probability forecasting. International Journal of Forecasting, 1995(11)
- 2 Special issue on real-world applications of uncertain reasoning. Communications of the ACM, 1995, 38
- 3 Andreassen S, Jensen F V, Andersen S K, et al. MUNIN — an expert EMG assistant. In: J E Desmedt, ed. Computer-Aided Electromyography and Expert Systems, chapter 21. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1989
- 4 Becker A, Geiger D. Optimization of Pearl's method of conditioning and greedy-like approximation algorithms for the vertex feedback set problem. Artificial Intelligence, 1996, 82: 1~22
- 5 Berry A, Bordat J P, Heggernes P, et al. A wide-range algorithm for minimal triangulation from an arbitrary ordering: [Reports in Informatics 243]. University of Bergen, Norway, 2003
- 6 Berry A, Blair J, Heggernes P. Maximum Cardinality Search for Computing Minimal Triangulations. In: Proc. WG 2002 - 28th Workshop on Graph Theoretical Concepts in Computer Science, Cesky Krumlov, Czech Republic. Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science 2573, June 2002. 1~12
- 7 Cano A, Moral S. Heuristic Algorithms for the Triangulation of Graphs. In: Proc. of the Fifth Intl. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IP-MU94, Paris, 1994. 166~171
- 8 Cooper G F. The computational complexity of probabilistic inference using Bayesian belief networks. Artificial Intelligence, 1990, 42(2-3): 393~405
- 9 Dirac G A. On rigid circuit graphs. Anh. Math. Sem. Univ.

- 5 Debar H, Wespi A. Aggregation and correlation of intrusion-detection alerts. In Recent Advances in Intrusion Detection, number 2212 in Lecture Notes in Computer Science, 2001. 85~103
- 6 Valdes A, Skinner K. Probabilistic alert correlation. In: Proc. of the 4th Intl. Symposium on Recent Advances in Intrusion Detection (RAID 2001), 2001. 54~68
- 7 Ning P, Cui Y. An intrusion alert correlator based on prerequisites of intrusions: [Technical Report TR-2002-01]. North Carolina State University, Department of Computer Science, 2002
- 8 Bace R G. Intrusion Detection. Macmillan Technology Publishing, 2000
- 9 Burroughs D J, Wilson L F, Cybenko G V. Analysis of Distributed Intrusion Detection Systems Using Bayesian Methods. <http://www.ists.dartmouth.edu/IRIA/published>, 2002
- 10 秦拯, 龚发根, 张大方. 分布式入侵检测系统中告警相关的研究与实现. 计算机科学与工程, 已录用

Hamburg, 1961, 25: 71~76

- 10 Gamez J, Puerta J. Searching for the best elimination sequence in Bayesian networks by using Ant Colony based optimization: [Technical Report # DIAB-01-04-13]. Department of Computer Science, University of Castilla-La Mancha, Jan. 2000
- 11 Huang C, Darwiche A. Inference in belief networks: A procedural guide. Intl. J of Approximate Reasoning, 1996, 15(3): 225~263
- 12 Jensen F V, Jensen F. Optimal junction trees. In Uncertainty in Artificial Intelligence. In: Proc. of the Tenth Conf. San Mateo, CA, Morgan Kaufman, July 1994. 360~366
- 13 Jensen F V, Lauritzen S L, Olesen K G. Bayesian updating in causal probabilistic networks by local computations. Computational Statistics Quarterly, 1990, 4: 269~282
- 14 Kjærulff U. Triangulation of Graphs - Algorithms Giving Small Total State Space: [Technical Report R 90-09]. Department of Mathematics and Computer Science, Aalborg University, Denmark, 1990
- 15 Lauritzen S L, Spiegelhalter D J. Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 1988, 50(2): 157, 224
- 16 Lekkerkerker C G, Boland J C. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. Fund. Math., 1962, 51: 45~64
- 17 Murphy K. The Bayes Net Toolbox for Matlab. Computing Science and Statistics. Available at: <http://citeseer.ist.psu.edu/murphy01bayes.html>. 2001, 33
- 18 Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. In: Proc. National Conf. on AI, Pittsburgh. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1988. 133~136
- 19 Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1988
- 20 Rose D J. A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations. In: R C Read, ed. Graph Theory and Computing, Academic Press, 1972. 183~217
- 21 Rose D J, Tarjan R E, Lueker G S. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. SIAM J. Comput., 1976, 5: 266~283
- 22 Shachter R D. Evidence absorption and propagation through evidence reversals. In: Henrion, M, Shachter R d, Kanal L N, Lemmer J F, eds. Uncertainty in Artificial Intelligence, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1990, 5: 173~190
- 23 Shachter R D, Andersen S K, Szolovits P. The equivalence of exact methods for probabilistic inference on belief networks: [Technical report]. Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University, Stanford, California, 1991
- 24 Tarjan R E, Yannakakis M. Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hyper-graphs. SIAM J. Comput., 1984, 13: 566~579