

## 二次三角 Hermite 插值样条控制点的选取

刘成志<sup>1,2</sup> 韩旭里<sup>1</sup> 李军成<sup>2</sup>

(中南大学数学与统计学院 长沙 410083)<sup>1</sup> (湖南人文科技学院数学与金融学院 湖南 娄底 417000)<sup>2</sup>

**摘要** 文中对  $C^1$  连续的二次三角 Hermite 插值样条曲线的自由控制点进行了进一步研究。首先讨论了给定中点条件时自由控制点的选取问题。为了获得光顺及弧长最短的二次三角 Hermite 插值样条曲线,基于能量优化法建立了一个求解最优自由控制点取值的优化模型,求解得到的最优控制点使得曲线的能量值达到最小;然后建立了一个优化模型来求解出最优控制点,使得插值曲线的近似弧长最短。数值实例表明,通过优化模型求出的控制点能使得二次三角 Hermite 插值样条曲线具有较好的光顺性及近似最短弧长。

**关键词** Hermite 插值样条,二次三角样条曲线,中点条件,能量优化,弧长最短

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.03.013

### Selection of Control Points of Quadratic-trigonometric Hermite Interpolation Splines

LIU Cheng-zhi<sup>1,2</sup> HAN Xu-li<sup>1</sup> LI Jun-cheng<sup>2</sup>

(College of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)<sup>1</sup>

(College of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi, Hunan 417000, China)<sup>2</sup>

**Abstract** This paper studied the selection of the free control points of the  $C^1$  continuous quadratic-trigonometric Hermite interpolation curves. Firstly, this paper discussed the selection of the free control points when the conditions of midpoint were given. In order to obtain the most smooth or the shortest arc length interpolation curves, an optimization model for solving the optimal control points was established based on the energy optimization method. By solving the optimization model, the optimal control points were obtained to minimize energy value of the curve. Then, an optimization model was also established for solving the shortest arc length. Numerical examples show that the optimal control points can make the curves smooth or have the shortest arc length.

**Keywords** Hermite interpolation spline, Quadratic-trigonometric curve, Conditions of midpoint, Energy optimization, Shortest arc length

## 1 引言

三次 Hermite 插值样条<sup>[1-3]</sup>在工程领域中有着广泛的应用,但当给定插值条件时,传统的三次 Hermite 插值样条虽然满足  $C^1$  连续,但无法修改其形状,逼近函数的效果也随之被确定,这种不足限制了传统三次 Hermite 插值样条在实际工程中的应用。

为了弥补传统三次 Hermite 插值样条的不足,一些学者构造了带形状参数的 Hermite 型插值样条,如带形状参数的有理 Hermite 型插值样条<sup>[4-9]</sup>、带形状参数的四次 Hermite 插值样条<sup>[10]</sup>、带形状参数的三次三角 Hermite 插值样条<sup>[11]</sup>等。这些带有形状参数的 Hermite 型插值样条除了与传统的三次 Hermite 插值样条具有相同的插值性和连续性外,更为重要的是,在插值条件固定不变的情况下能通过形状参数取值对样条的形状进行灵活的调控,同时还可以改善样条的逼近效果。

为了进一步丰富带形状参数的 Hermite 型插值样条的构造方法,本文基于三角函数空间  $\{1, \sin t, \cos t, \sin(2t), \cos(2t), \dots, \sin(nt), \cos(nt)\}$  构造了一类  $C^{n-1}$  或  $C^n$  连续的  $n$  次三角 Hermite 插值样条曲线<sup>[12]</sup>,该样条除了保留传统三次 Hermite 插值样条曲线的特性之外,其形状还可通过修改参数的取值进行灵活的调控。一方面,讨论了给定中点处的位置与二阶导数时自由控制点的选取问题。另一方面,为了使所构造的二次三角 Hermite 插值曲线具有更好的光顺性,本文基于能量优化法建立了一个用于求解最优参数取值的优化模型;为了使所构造的二次三角 Hermite 插值曲线具有最短弧长,建立了一个使得求解弧长近似最短的参数取值的优化模型。数值实例表明,利用优化模型求得的最优参数能使得二次三角 Hermite 插值样条曲线具有较好的光顺性及近似最短弧长。

到稿日期:2017-07-18 返修日期:2017-09-01 本文受国家自然科学基金(11272376),湖南省自然科学基金资助项目(2017JJ3124)资助。

刘成志(1986—),男,博士生,讲师,主要研究方向为计算机辅助几何设计, E-mail: it-rocket@163.com(通信作者);韩旭里(1957—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计;李军成(1982—),男,博士,副教授,CCF 会员,主要研究方向为计算机辅助几何设计。

### 2 二次三角 Hermite 插值基函数

#### 2.1 二次三角 Hermite 基函数

文献[12]基于三角函数空间  $\{1, \sin t, \cos t, \sin(2t), \cos(2t), \dots, \sin(nt), \cos(nt)\}$  构造了一类  $n$  次的三角 Hermite 插值样条曲线。类似于多项式 Hermite 插值,该样条曲线分段插值于两个端点,并且当给定插值条件时,曲线可以达到  $C^{n-1}$  或  $C^n$  连续。本文将进一步对其中的二次三角 Hermite 插值样条曲线中的参数进行研究。

首先给出对称二次三角基函数<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} T_0(t) = (1 - \sin t)^2 \\ T_1(t) = 2(1 - \sin t)(\sin t + \cos t - 1) \\ T_2(t) = 2(\sin t + \cos t - 1)^2 \\ T_3(t) = 2(1 - \cos t)(\sin t + \cos t - 1) \\ T_4(t) = (1 - \cos t)^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 。

不难验证,对称二次三角基函数  $\{T_0(t), T_1(t), \dots, T_4(t)\}$  构成了所有二次三角函数张成的空间  $\text{span}\{1, \sin t, \cos t, \sin(2t), \cos(2t)\}$ 。同时,基函数满足以下性质。

1) 端点性。对称二次三角基函数在端点处有如下性质:

$$\begin{bmatrix} T_0(0) & T_1(0) & T_2(0) & T_3(0) & T_4(0) \\ T_0(\frac{\pi}{2}) & T_1(\frac{\pi}{2}) & T_2(\frac{\pi}{2}) & T_3(\frac{\pi}{2}) & T_4(\frac{\pi}{2}) \\ T_0'(0) & T_1'(0) & T_2'(0) & T_3'(0) & T_4'(0) \\ T_0'(\frac{\pi}{2}) & T_1'(\frac{\pi}{2}) & T_2'(\frac{\pi}{2}) & T_3'(\frac{\pi}{2}) & T_4'(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)表明,二次三角 Hermite 基函数中  $T_j(t) (j=0, 1, 3, 4)$  与传统的三次 Hermite 基函数具有相同的端点性质,而  $T_2(t)$  在端点处的函数值与一阶导数值为 0,表明  $T_2(t)$  不会影响曲线在端点处的位置和切向量。

2) 非负性。对于任意  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , 对称二次三角基函数  $T_j(t) \geq 0 (j=0, 1, \dots, 4)$ 。

3) 对称性。  $T_j(t) = T_{4-j}(\frac{\pi}{2} - t) (j=0, 1, \dots, 4)$ 。

#### 2.2 $C^1$ 连续的二次三角 Hermite 插值样条曲线

基于二次三角 Hermite 基函数,可定义相应的 Hermite 型插值样条曲线<sup>[12]</sup>。

**定义 1** 设有区间  $[a, b]$  上的一个划分  $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , 其中  $x_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  称为插值节点。给定插值节点处所对应的点  $P_i$  及导向量  $D_i$ , 则区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上的二次三角 Hermite 插值样条曲线可以定义为:

$$QT_i(x) = T_0(t)P_i + T_1(t)P_{1,i} + T_2(t)P_{2,i} + T_3(t)P_{3,i} + T_{4,i}(t)P_{i+1}, i=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

其中,  $x \in [x_i, x_{i+1}], h_i = x_{i+1} - x_i, t = \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i}$ 。  $T_j(t) (j=$

$0, 1, 2, 3, 4)$  为对称二次三角基函数。

二次三角 Hermite 插值样条曲线  $QT_i(x)$  插值于端点处的位矢  $P_i$  及切矢  $D_i$  为:

$$\begin{cases} QT_i(x_i) = P_i, QT_i(x_{i+1}) = P_{i+1} \\ QT_i'(x_i) = D_i, QT_i'(x_{i+1}) = D_{i+1} \end{cases} \quad (4)$$

文献[12]指出,式(3)中的控制点  $P_{j,i} (j=1, 3)$  可以由插值条件唯一给出,具体为:

$$P_{1,i} = P_i + \frac{h_i}{\pi} D_i, P_{3,i} = P_{i+1} - \frac{h_i}{\pi} D_{i+1} \quad (5)$$

而  $P_{2,i}$  为自由控制点,可以自由取值。对于任意的  $P_{2,i}$ , 曲线均能保证  $C^1$  连续。文献[12]给出了两种取值方案: 1) 在没有给定端点处二阶导数的情况下,  $P_{2,i} = \frac{1}{2}(P_{1,i} + P_{3,i})$ ; 2) 若给定端点处的二阶导数,则  $P_{2,i}$  的取值还将依赖于端点处的二阶导数。

不难验证二次三角 Hermite 插值样条曲线具有如下性质:

1)  $C^1$  连续性。式(4)表明,二次三角 Hermite 插值样条插值于参数  $x_i$  所对应的位矢  $P_i$  及切矢  $D_i$ , 从而曲线满足  $C^1$  连续。

2) 形状可控性。给定插值条件  $(x_i, P_i, D_i) (i=0, 1, 2, \dots, n)$ , 通过修改控制点  $P_{2,i}$  对二次三角 Hermite 插值曲线的形状进行局部调控。注意到,  $T_2(0) = T_2(\frac{\pi}{2}) = 0$  且  $T_2'(0) = T_2'(\frac{\pi}{2}) = 0$ , 因此当  $P_{2,i}$  的取值发生改变时,不会影响曲线在插值节点的函数值及导数值。因此,自由控制点  $P_{2,i}$  的引入可以使得插值曲线的形状局部可调。当插值条件给定时,修改  $P_{2,i}$  的取值可对二次三角 Hermite 插值样条曲线的形状进行调整,如图 1 所示。

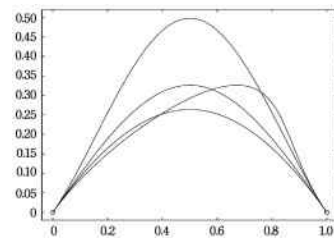


图 1  $P_{2,i}$  取不同值时的二次三角 Hermite 插值样条曲线  
Fig. 1 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines with different values of  $P_{2,i}$

二次三角 Hermite 插值样条函数的性质表明,自由控制点  $P_{2,i}$  的选取在一定程度上会影响曲线的造型。本文将进一步对自由控制点  $P_{2,i}$  的取值进行讨论(这里仅讨论在没有给定端点处二阶导数的情况下  $P_{2,i}$  的最优取值)。

### 3 给定中点条件的 $P_{2,i}$ 的确定

在实际应用中,可以给定分段 Hermite 插值样条在中点处满足的特殊条件,现分别就给定中点处的位置和二阶导数这两种中点条件讨论自由控制点  $P_{2,i}$  的取值。

#### 3.1 给定中点处的位置

若给定分段二次三角 Hermite 插值样条在中点处的位置信息  $P_{i+1/2}$ , 即:

$$QT_i(x_i + \frac{h_i}{2}) = P_{i+1/2}$$

则将  $x = x_i + \frac{h_i}{2}$  代入式(3)得:

$$\begin{aligned} & (\frac{3}{2} - \sqrt{2})P_i + (3\sqrt{2} - 4)P_{1,i} + (6 - 4\sqrt{2})P_{2,i} + \\ & (3\sqrt{2} - 4)P_{3,i} + (\frac{3}{2} - \sqrt{2})P_{i+1} = P_{i+1/2} \end{aligned}$$

从而

$$P_{2,i} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} [P_{i+1/2} - (\frac{3}{2} - \sqrt{2})(P_i + P_{i+1}) - (3\sqrt{2} - 4)(P_{1,i} + P_{3,i})]$$

将式(5)代入上式可得到满足中点处位置条件的自由控制点  $P_{2,i}$  的取值:

$$P_{2,i} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} P_{i+1/2} - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} (P_i + P_{i+1}) - \frac{\sqrt{2}h_i}{2\pi} (D_i - D_{i+1})$$

图 2 给出了若干条  $C^1$  连续的二次三角 Hermite 插值曲线,图中圆圈( $\circ$ )表示插值节点,星号( $*$ )表示插值曲线在中点处的位置点。图 2(a)为给定不同中点处的位置信息的二次三角 Hermite 插值曲线,图 2(b)中的曲线由若干条二次三角 Hermite 插值曲线依次相接得到。如图 2 所示,可以通过调整  $*$  点的位置调整曲线的形状,获得形状较为理想的曲线。

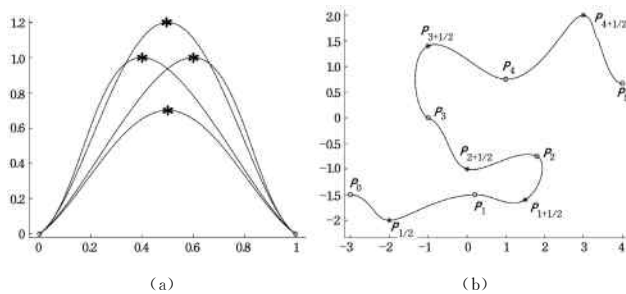


图 2 给定中点处的位置信息的二次三角 Hermite 插值样条曲线  
Fig. 2 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines when the position of the midpoint is given

### 3.2 给定中点处的二阶导数

若给定分段二次三角 Hermite 插值样条在中点处的二阶导数值  $M_{i+1/2}$ , 即:

$$QT_i''(x_i + \frac{h_i}{2}) = M_{i+1/2}$$

由式(3), 则有:

$$QT_i''(x) = T_0''(t)P_i + T_1''(t)P_{1,i} + T_2''(t)P_{2,i} + T_3''(t)P_{3,i} + T_4''(t)P_{i+1} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_0''(t) &= \frac{\pi^2}{2h_i^2} [\cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i}] \\ T_1''(t) &= \frac{\pi^2}{h_i^2} [\sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i}] - \\ & \frac{\pi^2}{h_i^2} \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \frac{\pi^2}{2h_i^2} \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \end{aligned}$$

$$T_2''(t) = -\frac{2\pi^2}{h_i^2} \sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \frac{\pi^2}{h_i^2} [\cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i}]$$

$$T_3''(t) = \frac{\pi^2}{h_i^2} [\sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i}] - \frac{\pi^2}{h_i^2} \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \frac{\pi^2}{2h_i^2} \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i}$$

$$T_4''(t) = \frac{\pi^2}{2h_i^2} [\cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i}]$$

将  $x = x_i + \frac{h_i}{2}$  代入式(6), 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4h_i^2} P_i + \frac{\pi^2}{h_i^2} (1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) P_{1,i} + \frac{\pi^2}{h_i^2} (\frac{\sqrt{2}}{2} - 2) P_{2,i} + \\ & \frac{\pi^2}{h_i^2} (1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) P_{3,i} + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4h_i^2} P_{i+1} = M_{i+1/2} \end{aligned}$$

从而

$$P_{2,i} = \frac{2h_i^2}{(\sqrt{2}-4)\pi^2} [M_{i+1/2} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4h_i^2} P_i - \frac{\pi^2}{h_i^2} (1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) P_{1,i} - \frac{\pi^2}{h_i^2} (1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) P_{3,i} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4h_i^2} P_{i+1}]$$

将式(5)代入上式可得到满足中点处二阶导数条件的自由控制点  $P_{2,i}$  的取值:

$$P_{2,i} = -\frac{\sqrt{2} + 4h_i^2}{7\pi^2} M_{i+1/2} + \frac{3 - \sqrt{2}}{7} (P_i + P_{i+1}) + \frac{(5 - 4\sqrt{2})h_i}{14\pi} (D_i - D_{i+1})$$

若没有给定中点处的二阶导数  $M_{i+1/2}$ , 则一般可令

$$M_{i+1/2} = \frac{D_{i+1} - D_i}{h_i^2}$$

图 3 给出了若干条  $C^1$  连续的二次三角 Hermite 插值曲线,图中圆圈( $\circ$ )表示插值节点。图 3(a)为中点处不同二阶导数的二次三角 Hermite 插值曲线,图 3(b)中的曲线由若干条二次三角 Hermite 插值曲线依次相接得到。如图 3 所示,可以通过  $M_{i+1/2}$  调整曲线的形状,获得形状较为理想的曲线。

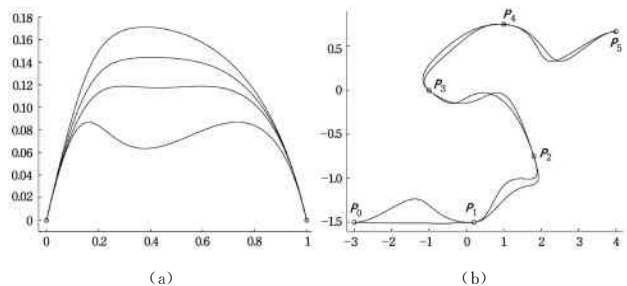


图 3 给定中点处的二阶导数的二次三角 Hermite 插值样条曲线  
Fig. 3 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines when the second derivative of the midpoint is given

## 4 最优控制点 $P_{2,i}$ 的确定

### 4.1 基于能量优化法的最优控制点 $P_{2,i}$

上文指出,二次三角 Hermite 插值样条曲线在插值节点处始终满足  $C^1$  连续,因此,当给定插值条件时,可通过能量优

化法选择合适的控制点  $\mathbf{P}_{2,i}$  使得插值样条曲线具有较好的光顺性。根据光顺准则,曲线的能量在很大程度上决定了曲线的光顺程度。当曲线的能量值最小时可以得到最光顺的曲线。因此可以通过优化模型求解最优的控制点  $\mathbf{P}_{2,i}$ ,使得曲线的二阶导能量达到最小。

设有曲线方程为  $\mathbf{QT}_i(x) (x_i \leq x \leq x_{i+1}) (i=0,1,2,\dots, n-1)$ , 则第  $i$  段插值曲线  $\mathbf{QT}_i(x)$  的二阶导能量值<sup>[13-14]</sup> 可表示为:

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\mathbf{QT}_i''(x)\|^2 dx$$

为了保证曲线具有良好的光顺性,即使得整段曲线的能量  $E_i$  达到最小,可建立如下最优化模型:

$$\min E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\mathbf{QT}_i''(x)\|^2 dx \tag{7}$$

s. t.  $\mathbf{P}_{2,i} \in R^m, i=1,2,\dots,n$

由式(6)、式(7),有:

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\mathbf{QT}_i''(x)\|^2 dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0''(t)\mathbf{P}_i + T_1''(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_2''(t)\mathbf{P}_{2,i} + T_3''(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4''(t)\mathbf{P}_{i+1}\|^2 dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0''(t)\mathbf{P}_i + T_1''(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_3''(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4''(t)\mathbf{P}_{i+1}\|^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_2''(t)\mathbf{P}_{2,i}\|^2 dx + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_0''(t)\mathbf{P}_i + T_1''(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_3''(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4''(t)\mathbf{P}_{i+1}] \cdot [T_2''(t)\mathbf{P}_{2,i}] dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0''(t)\mathbf{P}_i + T_1''(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_3''(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4''(t)\mathbf{P}_{i+1}\|^2 dx + \| \mathbf{P}_{2,i} \|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_2''(t)]^2 dx + 2(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0''(t)T_2''(t) dx + 2(\mathbf{P}_{1,i} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1''(t)T_2''(t) dx + 2(\mathbf{P}_{3,i} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3''(t)T_2''(t) dx + 2(\mathbf{P}_{i+1} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_4''(t)T_2''(t) dx \end{aligned}$$

令

$$a_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_2''(t)]^2 dx$$

$$a_2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0''(t)T_2''(t) dx$$

$$a_3 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1''(t)T_2''(t) dx$$

$$a_4 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3''(t)T_2''(t) dx$$

$$a_5 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_4''(t)T_2''(t) dx$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0''(t)\mathbf{P}_i + T_1''(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_3''(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4''(t)\mathbf{P}_{i+1}\|^2 dx \\ &= \|\mathbf{P}_i\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_0''(t)]^2 dx + \|\mathbf{P}_{1,i}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_1''(t)]^2 dx + \|\mathbf{P}_{3,i}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_3''(t)]^2 dx + \|\mathbf{P}_{i+1}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_4''(t)]^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_4''(t)]^2 dx + 2(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{1,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0''(t)T_1''(t) dx + \\ &2(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{3,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0''(t)T_3''(t) dx + 2(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0''(t)T_4''(t) dx + \\ &2(\mathbf{P}_{1,i} \cdot \mathbf{P}_{3,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1''(t)T_3''(t) dx + 2(\mathbf{P}_{1,i} \cdot \mathbf{P}_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1''(t)T_4''(t) dx + \\ &2(\mathbf{P}_{3,i} \cdot \mathbf{P}_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3''(t)T_4''(t) dx \end{aligned}$$

则式(7)中的目标函数可以表示为:

$$E_i = a_1 \|\mathbf{P}_{2,i}\|^2 + 2a_2(\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{2,i}) + 2a_3(\mathbf{P}_{1,i} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) + 2a_4(\mathbf{P}_{3,i} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) + 2a_5(\mathbf{P}_{i+1} \cdot \mathbf{P}_{2,i}) + a_6 \tag{8}$$

为使式(8)中的能量值  $E_i$  达到最小值,可令梯度  $\nabla E_i$  为 0,即:

$$\nabla E_i = 2a_1\mathbf{P}_{2,i} + 2a_2\mathbf{P}_i + 2a_3\mathbf{P}_{1,i} + 2a_4\mathbf{P}_{3,i} + 2a_5\mathbf{P}_{i+1} = 0$$

从而有:

$$\mathbf{P}_{2,i} = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{P}_i - \frac{a_3}{a_1}\mathbf{P}_{1,i} - \frac{a_4}{a_1}\mathbf{P}_{3,i} - \frac{a_5}{a_1}\mathbf{P}_{i+1} \tag{9}$$

将式(5)代入式(9),通过积分化简可以得到能量值最小的最优控制点为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{2,i} &= -\left(\frac{a_2+a_3}{a_1}\right)\mathbf{P}_i - \frac{h_i a_3}{\pi a_1} \mathbf{D}_i + \frac{h_i a_4}{\pi a_1} \mathbf{D}_{i+1} - \left(\frac{a_4+a_5}{a_1}\right)\mathbf{P}_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1}) + \frac{h_i(21\pi-62)}{4\pi(9\pi-26)}(\mathbf{D}_i - \mathbf{D}_{i+1}) \end{aligned} \tag{10}$$

#### 4.2 基于弧长近似最短的最优控制点 $\mathbf{P}_{2,i}$

上文从曲线的光顺程度讨论了曲线的最优控制点  $\mathbf{P}_{2,i}$ ,在实际应用中,有时需要考虑曲线的弧长最短。接下来将从曲线最短弧长的角度求解最优  $\mathbf{P}_{2,i}$  的取值。

设有曲线方程  $\mathbf{QT}_i(x) (x_i \leq x \leq x_{i+1})$ , 则插值曲线  $\mathbf{QT}_i(x)$  的一阶导数能量值<sup>[14]</sup> 可表示为:

$$L_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\mathbf{QT}_i'(x)\|^2 dx$$

曲线的一阶导数能量值在一定程度上反映了曲线的弧长。一般来说,一阶导数能量值越小,曲线的弧长越短。因此可以将一阶导数能量值定义为目标函数,从而有:

$$\min L_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\mathbf{QT}_i'(x)\|^2 dx \tag{11}$$

s. t.  $\mathbf{P}_{2,i} \in R^m, i=1,2,\dots,n$

由式(3),有:

$$\mathbf{QT}_i'(x) = T_0'(t)\mathbf{P}_i + T_1'(t)\mathbf{P}_{1,i} + T_2'(t)\mathbf{P}_{2,i} + T_3'(t)\mathbf{P}_{3,i} + T_4'(t)\mathbf{P}_{i+1} \tag{12}$$

其中:

$$T_0'(t) = \frac{\pi}{h_i} \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} T_1'(t) &= \frac{\pi}{h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \right] \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - 1 \right] - \frac{\pi}{h_i} \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} - 1 \right] \\ T_2'(t) &= -\frac{2\pi}{h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \right] \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \right] \end{aligned}$$

$$T_3'(t) = \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \right] \left[ \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - 1 \right] + \frac{\pi}{h_i} \sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} \left[ \sin \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} + \cos \frac{\pi(x-x_i)}{h_i} - 1 \right]$$

$$T_4'(t) = -\frac{\pi}{h_i} \sin \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} \left[ \cos \frac{\pi(x-x_i)}{2h_i} - 1 \right]$$

将式(12)代入式(11),从而有:

$$L_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|QT_i'(x)\|^2 dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0'(t)P_i + T_1'(t)P_{1,i} + T_2'(t)P_{2,i} + T_3'(t)P_{3,i} + T_4'(t)P_{i+1}\|^2 dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0'(t)P_i + T_1'(t)P_{1,i} + T_3'(t)P_{3,i} + T_4'(t)P_{i+1}\|^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_2'(t)P_{2,i}\|^2 dx + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_0'(t)P_i + T_1'(t)P_{1,i} + T_3'(t)P_{3,i} + T_4'(t)P_{i+1}] \cdot [T_2'(t)P_{2,i}] dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0'(t)P_i + T_1'(t)P_{1,i} + T_3'(t)P_{3,i} + T_4'(t)P_{i+1}\|^2 dx + \|P_{2,i}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_2'(t)]^2 dx + 2(P_i \cdot P_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0'(t)T_2'(t) dx + 2(P_{1,i} \cdot P_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1'(t)T_2'(t) dx + 2(P_{3,i} \cdot P_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3'(t)T_2'(t) dx + 2(P_{i+1} \cdot P_{2,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_4'(t)T_2'(t) dx$$

令

$$b_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_2'(t)]^2 dx$$

$$b_2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0'(t)T_2'(t) dx$$

$$b_3 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1'(t)T_2'(t) dx$$

$$b_4 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3'(t)T_2'(t) dx$$

$$b_5 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_4'(t)T_2'(t) dx$$

$$b_6 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|T_0'(t)P_i + T_1'(t)P_{1,i} + T_3'(t)P_{3,i} + T_4'(t)P_{i+1}\|^2 dx$$

$$= \|P_i\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_0'(t)]^2 dx + \|P_{1,i}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_1'(t)]^2 dx + \|P_{3,i}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_3'(t)]^2 dx + \|P_{i+1}\|^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [T_4'(t)]^2 dx + 2(P_i \cdot P_{1,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0'(t)T_1'(t) dx + 2(P_i \cdot P_{3,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0'(t)T_3'(t) dx + 2(P_i \cdot P_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_0'(t)T_4'(t) dx + 2(P_{1,i} \cdot P_{3,i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1'(t)T_3'(t)$$

$$dx + 2(P_{1,i} \cdot P_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_1'(t)T_4'(t) dx + 2(P_{3,i} \cdot P_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_3'(t)T_4'(t) dx$$

则式(11)中的目标函数可以表示为:

$$L_i = b_1 \|P_{2,i}\|^2 + 2b_2(P_i \cdot P_{2,i}) + 2b_3(P_{1,i} \cdot P_{2,i}) + 2b_4(P_{3,i} \cdot P_{2,i}) + 2b_5(P_{i+1} \cdot P_{2,i}) + b_6 \quad (13)$$

为使式(13)中的近似弧长  $L_i$  达到最小值,可令梯度  $\nabla L_i$  为 0,即:

$$\nabla L_i = 2b_1 P_{2,i} + 2b_2 P_i + 2b_3 P_{1,i} + 2b_4 P_{3,i} + 2b_5 P_{i+1} = 0$$

从而有:

$$P_{2,i} = -\frac{b_2}{b_1} P_i - \frac{b_3}{b_1} P_{1,i} - \frac{b_4}{b_1} P_{3,i} - \frac{b_5}{b_1} P_{i+1} \quad (14)$$

将式(5)代入式(14),通过积分并化简可得出使得弧长近似最短的最优控制点为:

$$P_{2,i} = -\left(\frac{b_2+b_3}{b_1}\right)P_i - \frac{h_i b_3}{\pi b_1} D_i + \frac{h_i b_4}{\pi b_1} D_{i+1} - \left(\frac{b_4+b_5}{b_1}\right)P_{i+1}$$

$$= \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) + \frac{h_i(6\pi-19)}{\pi(9\pi-28)}(D_i - D_{i+1})$$

### 4.3 最优参数取值求解实例

例 1 给定数据点  $P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (2,0), P_3 = (3,0), P_4 = (4,0)$  及其对应位置的切向量  $D_0 = (0,1), D_1 = (0,-0.5), D_2 = (0,1), D_3 = (0,-1), D_4 = (0,1)$ 。根据定义 2,分别由相邻数据点及其切向量定义 4 条二次三角 Hermite 插值曲线  $QT_i(x) (i=1,2,3,4)$ ,如图 4 所示。图 4 中实线为能量值取最小值时所对应的曲线,长虚线是  $P_{2,i}$  按文献[12]取值时的曲线,短虚线为  $P_{2,i}$  取位置矢量中点时的曲线,点划线为弧长近似最短时所对应的曲线。为了便于比较,同时给出相同插值条件的三次 Hermite 插值曲线,如图 5 所示。需要说明的是,对于任意的  $P_{2,i}$ ,该曲线段在每个拼接点处均满足  $C^1$  连续。同时给出了曲线在  $P_{2,i}$  取不同值时的能量值及其近似弧长值,如表 1 所列。

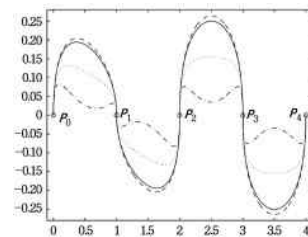


图 4 自由控制点取不同值时的二次三角 Hermite 插值曲线  
Fig. 4 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines with different values of free control point

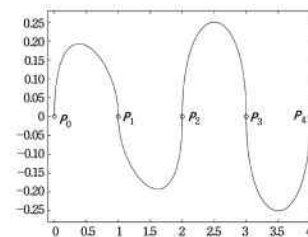


图 5 三次 Hermite 插值曲线  
Fig. 5 The cubic Hermite interpolation splines

表 1 二次三角与三次 Hermite 插值曲线对应的能量值与近似弧长值  
Table 1 The energy values and the approximate arc-length of the quadratic-trigonometric and the cubic Hermite interpolation splines

样条函数	自由控制点取值	能量值	近似弧长
二次三角 Hermite 插值曲线	能量最小	16.176246	1.567139
	弧长近似最短	23.634114	1.341134
	文献[12]的取值	16.214885	1.597081
	端点的中点	17.647927	1.411164
三次 Hermite 插值曲线	—	16	1.533333

由表 1 可得,通过能量优化法得到的最优自由控制点  $P_{2,i}$  使得参数曲线的能量值与取其他参数时曲线的能量值的比值最低,因此从曲线的能量值角度来看,所得结果符合能量优化准则。同时,优化模型(11)求得的  $P_{2,i}$  使得曲线的近似弧长最短。从表 1 可以看出,二次三角 Hermite 插值曲线的能量值并没有比三次 Hermite 插值曲线的能量值低,但是相差不大。二次三角 Hermite 插值曲线丰富了 Hermite 插值样条的构造方法,当插值数据接近于三角函数类型数据时,其可以提供更高的精度。

例 2 给定位置矢量  $P_0=(0,0,6), P_1=(-\frac{1}{2},0,\frac{5}{3}), P_2=(-3,-2,1), P_3=(-4,-5,0), P_4=(2,-5,0), P_5=(\frac{9}{2},0,1), P_6=(2,0,\frac{5}{3}), P_7=P_0=(0,0,6)$  及其对应位置的切向量  $D_0=(3,0,-1), D_1=(0,-1,1), D_2=(-\frac{1}{2},0,1), D_3=(\frac{1}{2},0,-1), D_4=(1,1,0), D_5=(-\frac{1}{2},1,1), D_6=(1,-\frac{1}{2},2), D_7=D_0=(3,0,-1)$ 。根据定义 2,分别由相邻数据点及其切向量定义 7 条闭合的二次三角 Hermite 插值曲线  $QT_i(x)(i=1,2,\dots,7)$ ,如图 6—图 8 所示。图 6 是  $P_{2,i}$  取能量最小值时的曲线,图 7 是  $P_{2,i}$  按文献[12]取值时所对应的曲线,图 8 是近似弧长最短时所对应的曲线,图 9 为标准的三次 Hermite 插值曲线。

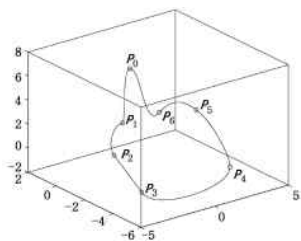


图 6  $P_{2,i}$  取能量最小值时的二次三角 Hermite 插值曲线  
Fig. 6 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines when  $P_{2,i}$  is the minimum energy value

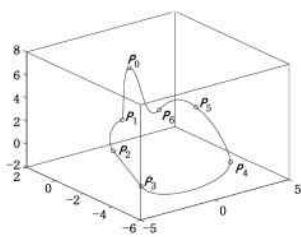


图 7  $P_{2,i}$  按文献[12]取值时的二次三角 Hermite 插值曲线  
Fig. 7 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines when  $P_{2,i}$  is the value in ref. [12]

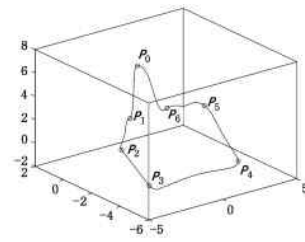


图 8 弧长近似最短时的二次三角 Hermite 插值曲线  
Fig. 8 The quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines with the approximately shortest arc-length

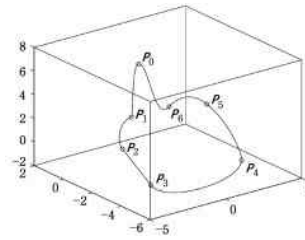


图 9 三次 Hermite 插值曲线  
Fig. 9 The cubic Hermite interpolation splines

类似地,对于任意的  $P_{2,i}$ ,该曲线段在每个节点处均满足  $C^1$  连续。同时给出整条曲线在  $P_{2,i}$  取不同值时的能量值及其近似弧长值,如表 2 所列。

表 2 空间二次三角与三次 Hermite 插值曲线对应的能量值与近似弧长值

样条函数	自由控制点取值	能量值	近似弧长
二次三角 Hermite 插值曲线	能量最小	2016.050092	48.190514
	弧长近似最短	2080.773514	47.795004
	文献[12]的取值	2016.316707	48.242913
三次 Hermite 插值曲线	—	1986.666667	48.6

由表 2 可得,通过优化模型(7)求得的最优自由控制点  $P_{2,i}$  使得插值曲线的能量值与取其他参数时曲线的能量值的比值最低。同时,通过优化模型(11)求得的最优自由控制点  $P_{2,i}$  使得曲线的弧长近似最短。

图 10 进一步给出了若干条  $C^1$  连续的二次三角 Hermite 插值曲线,图中实线为能量值最优的二次三角 Hermite 插值曲线,虚线为弧长近似最短的二次三角 Hermite 插值曲线。

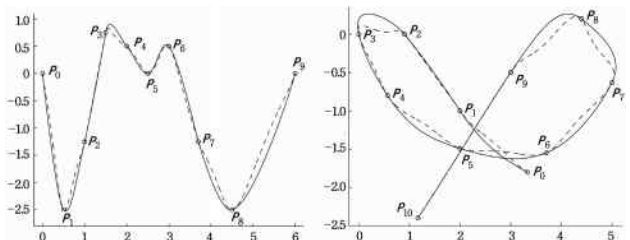


图 10  $C^1$  连续的二次三角 Hermite 插值曲线  
Fig. 10  $C^1$  continuous quadratic-trigonometric Hermite interpolation splines

**结束语** 本文对二次三角 Hermite 插值样条曲线自由控制点的选取进行了进一步研究。首先讨论了给定中点条件时的自由控制点的选取,然后分别以能量值最优及弧长近似最

短为目标函数探讨了最优控制点的选取。数值实例表明,利用能量优化法得到的二次三角 Hermite 插值样条曲线除了在拼接点处保持  $C^1$  连续外还具有较好的光顺性;利用弧长近似最短的优化模型使得提出的二次三角 Hermite 插值样条曲线的弧长近似最短。二次三角 Hermite 插值曲线丰富了 Hermite 插值样条的构造方法,当插值数据接近于三角函数类型数据时,其可以提供更高的精度。

### 参考文献

- [1] LORENTZ R A. Multivariate Hermite interpolation by algebraic polynomials: a survey [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 122(2): 167-201.
- [2] GFRERRER A, ROSCHEL O. Blended Hermite interpolations [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2001, 18(9): 865-873.
- [3] YONG J H, CHENG F H. Geometric Hermite curves with minimum strain energy [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(3): 281-301.
- [4] HALL C A, MEYER W W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation [J]. *Journal of Approximation Theory*, 1976, 16(2): 105-122.
- [5] DUAN Q, DJIDJELI K, PRICE W G, et al. Rational cubic spline based on function values [J]. *Computer and Graphics*, 1998, 22(4): 479-486.
- [6] DUAN Q, DJIDJELI K, PRICE W G, et al. The approximation properties of some rational cubic splines [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 1999, 72(2): 155-166.
- [7] SARFRAZ M. Cubic spline curves with shape control [J]. *Computer and Graphics*, 1994, 18(5): 707-713.
- [8] DUAN Q, LIU A K, CHENG F H. Constrained interpolation using rational cubic spline with linear denominators [J]. *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999, 6(1): 203-215.
- [9] XIE J, TAN J Q, LI S F. Rational cubic Hermite interpolating spline and its approximation properties [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2011, 28(3): 385-392. (in Chinese)  
谢进, 檀结庆, 李声锋. 有理三次 Hermite 插值样条及其逼近性质 [J]. *工程数学学报*, 2011, 28(3): 385-392.
- [10] LI J C, LIU C Y, YANG L. Quartic Hermite interpolating splines with parameters [J]. *Journal of Computer Applications*, 2012, 32(7): 1868-1870. (in Chinese)  
李军成, 刘纯英, 杨炼. 带参数的四次 Hermite 插值样条 [J]. *计算机应用*, 2012, 32(7): 1868-1870.
- [11] LI J C, ZHONG Y E, XIE C. Cubic trigonometric Hermite interpolating splines curves with shape parameters [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2014, 50(17): 182-185. (in Chinese)  
李军成, 钟月娥, 谢淳. 带形状参数的三次三角 Hermite 插值样条曲线 [J]. *计算机工程与应用*, 2014, 50(17): 182-185.
- [12] HAN X. Piecewise trigonometric Hermite interpolation [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2015, 268(C): 616-627.
- [13] KARCIAUSKAS K, PETERS J. Biquintic  $G^2$  surfaces via functionals [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2015, 33: 17-29.
- [14] YAN L L, LI S P. Parameter selection of shape-adjustable interpolation curve and surface [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2016, 21(12): 1685-1695. (in Chinese)  
严兰兰, 李水平. 形状可调插值曲线曲面的参数选择 [J]. *中国图象图形学报*, 2016, 21(12): 1685-1695.
- (上接第 62 页)
- [13] DEBEVEC P E, MALIK J. Recovering high dynamic range radiance maps from photographs [C] // *Proceedings of the 24th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. New York: ACM Press, 1997: 369-378.
- [14] LI B, XIONG W, HU W, et al. Evaluating combinational illumination estimation methods on real-world images [J]. *IEEE Transactions on image procession*, 2013, 23(3): 1194-1209.
- [15] LI B, XIONG W, HU W, et al. Multi-cue illumination estimation via a tree-structured group joint sparse representation [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2016, 117: 21-47.
- [16] LIU Y, QIN X, XU S, et al. Light source estimation of outdoor scenes for mixed reality [J]. *The Visual Computer*, 2009, 25(5-7): 637-646.
- [17] ZHANG R, ZHONG F, PENG Q S, et al. Basis image decomposition for outdoor lighting estimation [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2013, 25(4): 442-449. (in Chinese)  
张锐, 钟凡, 彭群生, 等. 室外场景光照估计的基图像分解算法 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2013, 25(4): 442-449.
- [18] XING G, LIU Y, QIN X, et al. A practical approach for real-time illumination estimation of outdoor videos [J]. *Computers & Graphics*, 2012, 36(7): 857-865.
- [19] XING G Y, ZHOU X H, PENG Q S, et al. Lighting simulation of augmented outdoor scene based on a legacy photograph [J]. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(7): 101-110.
- [20] ZHANG R, ZHONG F, LIN L, et al. Basis image decomposition of outdoor time-lapse videos [J]. *The Visual Computer*, 2013, 29(11): 1197-1210.
- [21] VON KRIES J. Chromatic adaptation [M] // *Sources of Color Vision*. Cambridge: MIT Press, 1970: 12-13.
- [22] FINLAYSON G D, TREZZI E. Shades of gray and colour constancy [C] // *Proceedings of the 12th Color and Imaging Conference*. Springfield: Society for Imaging Science and Technology, 2004: 37-41.