

凸六面体上的双有理映射

叶金云 王旭辉 钱毅加
(合肥工业大学数学学院 合肥 230009)

摘要 借助三维重心坐标的特性,将二维双有理映射的结果推广到三维凸六面体的情形下,即给凸六面体上的每个顶点赋予适当的权值,从而得到凸六面体上的一个三线性双有理映射;此外,通过一个实例说明了该方法的有效性。

关键词 重心坐标,双有理映射,凸六面体,权值

中图分类号 O24 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.03.011

Birational Trilinear Mapping on Convex Hexahedrons

YE Jin-yun WANG Xu-hui QIAN Yi-jia

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract Based on the knowledge of three dimensional generalized barycentric coordinates, the results of birational trilinear mapping on planar quadrilateral were generalized to three dimensional convex hexahedron, namely, by assigning a suitable weight to every vertex of convex hexahedron, a three dimensional birational mapping was achieved. In addition, an example was given to illustrate the correctness of this method.

Keywords Barycentric coordinates, Birational mapping, Convex hexahedron, Weight

1 引言

双有理映射的映射与其逆映射都是有理形式的。正是因为双有理映射的形式简单、计算简便,所以它在图像变形和图像复原等技术上应用得非常广泛^[1]。给定有理映射 $p(s, t)$, 若其满足:

- (1) 逆映射 $p^{-1}(x, y)$ 存在且 $p^{-1}(p(s, t)) = (s, t)$;
- (2) 映射 $p(s, t)$ 和 $p^{-1}(x, y)$ 都是从 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的有理映射。

则称 $p(s, t)$ 是双有理映射。

双有理映射的研究已有较长的历史。特别地,1927年, Hudson 已将相关结果整理成专著^[2]。早期关于双有理映射的工作主要集中讨论 Cremona 变换的存在性。针对如何将双有理映射应用到具体的计算机辅助几何设计问题中,需要讨论双有理映射的构造问题。近期,通过给每个顶点赋予恰当的权值, Sederberg 等给出了四边形双有理映射的构造方法^[3], 并将四边形有理映射推广为 $1 \times n$ 次的双有理映射^[1]。此外, Floater^[4] 从重心坐标的角度重新解释了四边形上的双有理映射, 并给出了其逆映射的一般形式。在几何模型领域的构造方法中, 目前只给出了二维某种特殊条件下的双有理映射, 例如四边形上的双有理映射与 $1 \times n$ 次的双有理映射。双有理映射可看作一种具有特殊性质的 FFD (Free-Form Deformations) 方法, 而 FFD 在图像变形^[5]、形状优化^[6]、医学成像^[7]、图像配准^[8] 等领域具有广泛应用。根据双有理映射的特性, 即其映射与逆映射都是有理的, 我们希望将双有理映射

也应用于上述领域中, 从而大大提高计算效率。

本文拟从重心坐标的角度将平面四边形上双有理映射的相关结果推广到三维情形。给定凸六面体, 通过给各个顶点赋予适当的权值, 从而构造出三维情形下的三线性双有理映射。

2 一般有理线性映射

设 $P \subset \mathbb{R}^3$ 是一个凸六面体, 顶点为 $\{v_i\}_{i=1}^8$, 各顶点间的连接关系如图 1 所示。若点 Q 的齐次坐标形式为 (a, b, c, d) , 其中 $d \neq 0$, 则记它的笛卡尔坐标为 $Point(Q)$, 即 $Point(Q) = (a/d, b/d, c/d)$ 。顶点 v_i 的齐次坐标形式记为 Q_i , 其中 $Q_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}, 1)$, $v_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$, $i = 1, \dots, 8$ 。设 $\tilde{Q}_i = \omega_i Q_i$, 即 $\omega_i \in \mathbb{R}$ 为在点 Q_i 赋予的权值, 则六面体 P 内任意一点 $x = (x, y, z)$ 可表示为:

$$x = r(s, t, u) = Point(p_1(s, t)u + p_2(s, t)u) \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 p_1(s, t) &= \tilde{Q}_1 \bar{s} t + \tilde{Q}_2 \bar{s} t + \tilde{Q}_3 \bar{s} t + \tilde{Q}_4 \bar{s} t \\
 p_2(s, t) &= \tilde{Q}_5 \bar{s} t + \tilde{Q}_6 \bar{s} t + \tilde{Q}_7 \bar{s} t + \tilde{Q}_8 \bar{s} t \\
 \bar{s} &= (1-s), \bar{t} = (1-t), \bar{u} = (1-u)
 \end{aligned}$$

称 $r(s, t, u)$ 为定义在凸六面体上的三线性映射, 易知三线性映射 $r(s, t, u)$ 是有理映射。

若选择不同的权值, 则会得到不同的有理映射 $r(s, t, u)$, 例如 $r(s, t, u)$ 是定义在单位立方体上的三线性有理映射, 若

到稿日期:2017-07-18 返修日期:2017-08-03 本文受国家自然科学基金(61772167)资助。

叶金云(1992-),女,硕士,主要研究方向为双有理映射、重心坐标;王旭辉(1980-),男,副教授,主要研究方向为计算机辅助几何设计, E-mail: xhw@hfut.edu.cn(通信作者);钱毅加(1992-),女,硕士,主要研究方向为重心坐标。

令 $w_1 = w_5 = 2$, 其余权值取 1, 则通过计算得到逆映射:

$$s = \frac{x - y \pm f(x, y, z) - 2}{2x - 2}$$

$$t = \frac{y - x \pm f(x, y, z) + 2}{2y}$$

$$u = 1 - z$$

其中, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 6xy - 4x + y^2 - 4y + 4}$, 显然 $r(s, t, u)$ 的逆映射不是有理的。

凸六面体各顶点间的连接关系如图 1 所示。

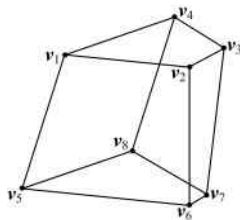


图 1 凸六面体各顶点间的连接关系

Fig. 1 Link relations among nodes in convex hexahedron

本文将讨论一种权值的取法, 使得有理映射 $r(s, t, u)$ 是双有理映射。

3 双有理映射

在凸六面体 P 中, 按照上、下、前、后、左、右的顺序标记 6 个面, P_1 是由顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 构成的面, P_3 是由顶点 v_2, v_3, v_7, v_6 构成的面, P_5 是由顶点 v_1, v_2, v_6, v_5 构成的面, 而面 P_2, P_4, P_6 分别为面 P_1, P_3, P_5 相对的面。设 S_i 是面 P_i 的面积。

为了叙述方便, 下面给出文中所需的一些标记符号。记 n_j 是凸六面体 P 上的面 P_j 的单位外法向量, 指标集 $ind(v_i) = \{j | v_i \in P_j\}$ 表示包含 v_i 的平面下标的集合。以 $n_j (j \in ind(v_i))$ 为行向量可得一个矩阵, 记为 $n_{ind(v_i)}$ 。另外, 记 $\kappa(v_i) = |\text{Det}(n_{ind(v_i)})|$ 。例如 $ind(v_1) = \{1, 4, 5\}$, $n_{ind(v_1)} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix}$,

$\kappa(v_1)$ 是 $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix}$ 的行列式的绝对值。

定理 1 令:

$$w_i(\mathbf{x}) = kC_i, C_i = \frac{1}{27} \kappa(v_i) \prod_{j \in ind(v_i)} S_j \quad (2)$$

则定义在凸六面体上的有理映射 $r(s, t, u)$ 是双有理映射, 其中, $r(s, t, u)$ 如式(1)所示, $k \in \mathbb{R}$ 为任意非零常数。

定理 1 的证明过程如下。

引理 1^[9] 凸六面体的重心坐标权函数如下:

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\kappa(v_i)}{\prod_{j \in ind(v_i)} (n_j \cdot (v_j - \mathbf{x}))}$$

设 A_i 是以 \mathbf{x} 为顶点、 P_i 为底面的四棱锥的体积。对上式的分子、分母同时乘以 $\frac{1}{27} \prod_{j \in ind(v_i)} S_j$, 可得:

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{C_i}{\prod_{j \in ind(v_i)} A_j}, C_i = \frac{1}{27} \kappa(v_i) \prod_{j \in ind(v_i)} S_j \quad (3)$$

设 $\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^8 w_j(\mathbf{x})} (i=1, \dots, 8)$ 是凸六面体上的重心坐标, 其中 $w_i(\mathbf{x})$ 满足式(3)。由重心坐标的定义可得:

$$\mathbf{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{C_i v_i}{\prod_{j \in ind(v_i)} A_j}}{\sum_{i=1}^8 \frac{C_i}{\prod_{j \in ind(v_i)} A_j}} \quad (4)$$

此外, 由式(3)可得权值 $w_i(\mathbf{x})$ 满足下列关系式:

$$\frac{w_1 w_3}{w_2 w_4} = \frac{C_1 C_3}{C_2 C_4}$$

$$\frac{w_5 w_7}{w_6 w_8} = \frac{C_5 C_7}{C_6 C_8}$$

$$\frac{w_1 w_3 w_5 w_7}{w_2 w_4 w_6 w_8} = \frac{C_1 C_3 C_5 C_7}{C_2 C_4 C_6 C_8}$$

令 $w_i(\mathbf{x}) = kC_i$, 其中 $k \in \mathbb{R}$ 是任意非零常数, 且对式(4)

的结果没有影响。对式(4)的分子、分母同时乘以 $\prod_{i=1}^6 A_i$, 得:

$$\mathbf{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 w_i v_i \prod_{j \in ind(v_i)} A_j}{\sum_{i=1}^8 w_i \prod_{j \in ind(v_i)} A_j} \quad (5)$$

再对式(5)的分子、分母同时除以 $(A_1 + A_2)(A_3 + A_4)(A_5 + A_6)$ 。比较所得结果与式(1), 可得:

$$s = \frac{A_4}{A_3 + A_4}$$

$$t = \frac{A_5}{A_5 + A_6}$$

$$u = \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

由于四棱锥的体积 A_i 是关于点 \mathbf{x} 的有理函数, 因此 s, t, u 都是有理函数。故令权值 $w_i(\mathbf{x}) = kC_i$ 时, 可得双有理映射 $r(s, t, u)$ 。

例 1 设 V 是一个凸六面体, 8 个顶点坐标分别为 $v_1 = (4, 1, 4), v_2 = (4, 4, 4), v_3 = (2, 4, 4), v_4 = (0, 2, 4), v_5 = (4, 0, 0), v_6 = (4, 4, 0), v_7 = (3, 4, 0), v_8 = (0, 1, 0)$ 。设 \mathbf{x} 是 V 内任意一点, 且 $\mathbf{x} = (x, y, z)$, 由定理 1, 取 $C_1 = 1792, C_2 = 672, C_3 = 480, C_4 = 1600, C_5 = 2128, C_6 = 798, C_7 = 570, C_8 = 1900$ 。令 $w_i(\mathbf{x}) = C_i$, 计算可得:

$$s = \frac{4x + 16y - 4z - 16}{4x + 10y - 4z + 8}$$

$$t = \frac{28(4-x)}{132 - 8x - 20y + 5z}$$

$$u = \frac{16(4-z)}{64 + 3z}$$

故令 $w_i(\mathbf{x}) = C_i$, 有理映射 $r(s, t, u)$ 是双有理映射。

结束语 本文是通过建立凸六面体上的重心坐标找到满足特殊条件的权值, 使得定义在该凸六面体上的三线性有理映射是双有理映射。

由于三次有理线性映射的形式比较复杂, 关于其逆映射形式是否有理的讨论比较困难, 因此目前本文仅给出了权值的特殊取法, 而且仅从重心坐标角度找到逆映射形式, 对于是否存在其他条件的权值使得凸六面体上的三次有理映射是双

(下转第 91 页)

- bivariate C^1 cubic splines[J]. *Journal of Computation & Applied Mathematics*, 2000, 119(1/2): 249-258.
- [5] ZHOU T H, LAI M J. Scattered data interpolation by bivariate splines with higher approximation order[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, 242(4): 125-140.
- [6] ZHU C G, WANG R H. Lagrange interpolation by bivariate splines on cross-cut partitions[J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2006, 195(1): 326-340.
- [7] LI C J, WANG R H. Bivariate cubic spline space and bivariate cubic NURBS surfaces[C]// *Proceedings of Geometric Modeling and Processing*. IEEE, 2004: 115-123.
- [8] QIAN J, WANG F. On the approximation of the derivatives of spline quasi-interpolation in cubic spline space $S_3^{1,2}(\Delta_{mn}^{(2)})$ [J]. *Numerical Mathematics Theory Methods & Applications*, 2014, 7(1): 1-22.
- [9] QIAN J, WANG R H, LI C J. The bases of the Non-uniform cubic spline space $S_3^{1,2}(\Delta_{mn}^{(2)})$ [J]. *Numerical Mathematics Theory Methods & Applications*, 2012, 5(4): 635-652.
- [10] QIAN J, WANG R H, ZHU C G, et al. On spline quasi-interpolation in cubic spline space $S_3^{1,2}(\Delta_{mn}^{(2)})$ [J]. *Science Sinica(Mathematica)*, 2014, 44(7): 769-778. (in Chinese)
钱江, 王仁宏, 朱春钢, 等. 二元三次样条空间 $S_3^{1,2}(\Delta_{mn}^{(2)})$ 的样条拟插值[J]. *中国科学: 数学*, 2014, 44(7): 769-778.
- [11] WANG R H, LI C J. Bivariate quartic spline spaces and quasi-interpolation operators[J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2006, 190(1/2): 325-338.
- [12] 王仁宏. 数值逼近[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [13] CUYT A, VERDONK B. Multivariate Reciprocal differences for branched Thiele continued fraction expressions [J]. *Journal Computational & Applied Mathematics*, 1988, 21(2): 145-160.
- [14] CUYT A, VERDONK B. A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1988, 4(2-4): 263-271.
- [15] TAN J Q, FENG Y Y. Newton-Thiele's rational interpolants [J]. *Numerical Algorithms*, 2000, 24(1/2): 141-157.
- [16] TAN J Q, TANG S. Composite schemes for multivariate blending rational interpolation[J]. *Journal Computational & Applied Mathematics*, 2002, 144(1/2): 263-275.
- [17] WANG R H, QIAN J. On branched continued fractions rational interpolation over pyramid-typed grids [J]. *Numerical Algorithms*, 2010, 54(1): 47-72.
- [18] WANG R H, QIAN J. Bivariate polynomial and continued fraction interpolation over ortho-triples[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2011, 217(19): 7620-7635.
- [19] SALZER H E. Some new divided difference algorithm for two variables[M]// Langer R E, Ed. *On Numerical Approximation*. 1959: 61-98.
- [20] QIAN J, WANG F, ZHU C G. Scattered data interpolation based upon bivariate recursive polynomials[OL]. http://www.researchgate.net/publication/317642310-scattered-data-interpolation-based-upon_bivariate_recursive_polyhomials.
- [21] QIAN J, ZHENG S J, WANG F, et al. Bivariate polynomial interpolation over nonrectangular meshes[J]. *Numerical Mathematics Theory Methods & Applications*, 2016, 9(4): 549-578.
- [22] QIAN J, WANG F, FU Z J, et al. Recursive schemes for scattered data interpolation via bivariate continued fractions [J]. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2016, 36(5): 583-607.
- [23] 檀结庆. 连分式理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [24] SAUER T. *Numerical Analysis (Second Edition)* [M]. Beijing: China Machine Press, 2012.

(上接第 68 页)

有理映射的问题, 以及推广到高次有理线性映射的工作, 还需要进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] SEDERBERG T W, GOLDMAN R N. Birational 2D Free-Form Deformation of degree $1 \times n$ [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2016, 44: 1-9.
- [2] HUDSON H P. *Cremona Transformations in Plane and Space* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
- [3] SEDERBERG T W, ZHENG J. Birational quadrilateral maps [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2015, 32: 1-4.
- [4] FLOATER M S. The inverse of a rational bilinear mapping [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2015, 33: 46-50.
- [5] LEE S Y, CHWA K Y, SHIN S Y. Image metamorphosis using snakes and free-form deformations[C]// *Proceeding of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. 1995: 59-69.
- [6] MANZONI A, QUARTERONI A, ROZZA G. Shape optimization for viscous flows by reduced basis methods and free-form deformations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, 70(5): 646-670.
- [7] FRANGI A F, NIESSEN W J, VIERGEVER M A. Three-dimensional modeling for functional analysis of cardiac images, a review[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2001, 20(1): 2-5.
- [8] HUANG X, PARAGIOS N, METAXAS D N. Shape registration in implicit spaces using information theory and free form deformations[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2006, 28(8): 1303-1318.
- [9] WARREN J, SCHAEFER S, et al. Barycentric coordinates for convex sets[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, 27(3): 319-338.
- [10] WARREN J. Barycentric coordinates for convex polytopes[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, 6(1): 97-108.