一类特殊基函数构造的参数曲线

李敬改 陈秋阳 韩佳琦 黄奇立 朱春钢

(大连理工大学数学科学学院 辽宁 大连 116024)

摘 要 构造参数曲线曲面一直是计算机辅助几何设计研究的核心内容之一。以 Bernstein 基函数构造的 Bézier 曲线是参数曲线造型最基本的方法,B 样条曲线和 NURBS 曲线都是在其基础上发展而来。利用给定的实数节点集,构造一类特殊的基函数,此类基函数是 Bernstein 基函数的推广。在此基础上,构造了一类新的参数曲线,称为 T-Bézier 曲线,T-Bézier 曲线继承了有理 Bézier 曲线的若干性质;证明了当节点移动时极限曲线的几何性质,并通过实例进行了验证。

关键词 参数曲线,基函数,有理 Bézier 曲线,计算机辅助几何设计

中图法分类号 TP391.41 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.03.007

A New Kind of Parametric Curves by Special Basis Function

LI Jing-gai CHEN Qiu-yang HAN Jia-qi HUANG Qi-li ZHU Chun-gang

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract The construction of parametric curves and surfaces is very important in computer aided geometric design. It's well known that Bézier curve, which is defined by Bernstein basis functions is a basic method in curve design, and the B-spline curve and NURBS curve are generalizations of the Bézier curve. This paper defined a new kind of basis functions by a given real knot points set, which is a generalization of Bernstein basis functions, and defined a new parametric curve by these basis functions, called T-Bézier curve, which preserves some properties of Bézier curve. What's more, this paper presented the limit property of T-Bézier curve while some knots move and gave some examples to verify the properties of the curve.

Keywords Parametric curve, Basis function, Rational Bézier curve, Computer aided geometric design

1 引言

计算机辅助几何造型设计(CAGD)是随着航空、汽车等现代化工业发展与计算机的出现而产生并发展起来的一门新兴学科,而几何外形的曲线曲面表示则是 CAGD 的研究核心[1-3],常用的曲线曲面表示方法有参数法与隐式法,其中参数表示以其易于作图、推广与拼接等优势而成为计算机辅助几何设计与计算机辅助设计(CAD)中最常用的曲线曲面表示方法。参数曲线曲面主要经历了多项式参数曲线(如 Ferguson 曲线)、Bézier 方法、B 样条方法以及 NURBS 方法的发展历程[1-3],而在发展过程中起到决定性作用的是构造曲线曲面的基函数(也称为混合函数)。参数曲线曲面的发展历史,本质上就是基函数的发展历史,历经多项式幂基、Bernstein 基与 B 样条基及其相关有理与扩展形式。因此,基函数是构造曲线曲面的核心,一组具有良好性质的基函数必然使得所构造的参数曲线曲面具有强大的生命力与极高的应用价值。

为证明 Weierstrass 逼近定理,Bernstein[4] 于 1912 年构造了一组多项式序列,而构造这组多项式序列的核心就是 Bernstein 基函数。1959 年,Casteljau[5] 首先将 Bernstein 基函数应用于曲线表示,随后 Bézier 将其用于几何外形表示,这就是大名鼎鼎的 Bézier 曲线。Bézier 曲线利用控制多边形表示曲线,这在曲线表示方法上是重大突破。由于具有升阶与 de Casteljau 算法等优良性质,Bézier 方法迅速发展为几何外形表示的核心方法。值得一提的是,Bernstein 基函数以良好的性质迅速应用到各个领域,从而成为 20 世纪影响数学与应用数学的重要因素[6]。

近年来,众多学者对不同基函数构造的参数曲线进行了研究。Chen[7] 与 Wang[8] 等人对混合代数和三角多项式空间进行了扩展,分别在空间上定义了 n 次的 C-Bézier 曲线与 C-B 样条曲线(NUAT B 样条曲线)。C- Bézier 曲线与 C-B 样条曲线引进了形状参数,并通过控制顶点和参数的变化实现曲线形状的调整。该类曲线继承了 Bézier 曲线的许多优良性

到稿日期:2017-07-18 返修日期:2017-07-30 本文受国家级大学生创新创业训练计划资助项目(2016101410906),国家自然科学基金(11671068),中央高校基本科研业务费专项基金(DUT16LK38)资助。

李敬改(1991—),女,硕士生,主要研究方向为计算几何,E-mail:1147325869@qq.com;**朱春钢**(1977—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 会员,主要研究方向为计算几何,E-mail:cgzhu@dlut.edu.cn(通信作者)。

质，如端点插值、导矢、凸包、离散、变差缩减性等；更重要的是，它们还可以用同一方式来表示自由曲线、圆锥曲线、超越曲线，极大地方便了工程设计。

Oruc 和 Phillips[9] 基于 Phillips 构造的 q-Bernstein 算子定义了 q-Bézier 曲线，并且证明了曲线的升阶、降阶和变差缩减性；同时研究了有理 q-Bézier 曲线和张量积 q-Bézier 曲面，并证明了曲线曲面的性质，给出了对应的细分形式。

2002 年，基于给定的整数格点集所定义的 toric 理想与 toric 簇，Krasauskas 提出了一种新的多边形曲面造型方法——toric 曲面[10]，其构造基函数被称为 toric-Bernstein 基函数(也称 toric-Bézier 基函数)。当将格点集限制为一维整数点时，toric 曲面就退化为 Bézier 曲线，同时张量积与三角 Bézier 曲面也是 toric 曲面的特殊形式。Garcia 等人[11] 对 toric 曲面权因子的几何意义进行了讨论。

如上定义曲线曲面的基函数大多具有非负整数幂次形式，MQ 径向基函数具有有理数幂次形式[1]，而目前对具有有理数或无理数幂次的基函数及其所构造的曲线曲面的研究偏少。Zhu 等人[12] 于 2015 年对 Bernstein 基函数进行了拓展，构造了具有两个形状参数 α 和 β 的拟 Bernstein 基函数，其是实数次的。Craciun 等人[13] 于 2008 年研究了一般实数格点集定义的 toric 簇的理论，并研究了 toric 曲面的几何性质。Postinghel 等人[14] 于 2012 年对一般实数格点集定义的 toric 簇退化理论进行了研究。受文献[13-14]的启发，本文对任意给定的一维实数点集建立相应的 toric-Bernstein 基函数，其次数可能为有理数或者无理数形式；以此基函数构造了一类新的参数曲线——T-Bézier 曲线，并对其性质进行了研究。

2　T-Bernstein 基函数

定义 1[1]　n 次 Bernstein 基函数的定义为：

$$B_i^n(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},x\in[0,1],i=0,1,\cdots,n$$

其中，$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$。

Bernstein 基函数具有非负性、单位分解性、端点性质、对称性、递推性等许多优良的性质，因此在曲线曲面造型中发挥着重要作用[6]。但 Bernstein 基函数的节点的选取是固定的，而本文将节点取为定义域中的任意实数点集，定义一类新的基函数。

令有限集 $A=\{a_0,\cdots,a_n\}\subset R$，其中 $a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n$。设 $h_0(t)=k_0(t-a_0)$，$h_1(t)=k_1(a_n-t)$，系数为正实数。因此，$h_0(t)\geqslant 0$，$h_1(t)\geqslant 0$，$t\in[a_0,a_n]$。

定义 2　令有限集 $A=\{a_0,\cdots,a_n\}\subset R$，其中 $a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n$，对 A 中每一个实数点，定义一个基函数：

$$\beta_{a_i}(t)=c_{a_i}h_0(t)^{h_0(a_i)}h_1(t)^{h_1(a_i)},t\in[a_0,a_n],i=0,\cdots,n \tag{1}$$

其中，c_{a_i} 为大于 0 的常数。称 $\beta_{a_i}(t)$ 为 T-Bernstein 基函数，a_i 为节点。

注 1：式(1)所定义的 T-Bernstein 基函数依赖于系数 k_0 和 k_1 的选取，由于选取任何正常数都可以，本文中如没有特殊说明，$k_0=k_1=1$。

T-Bernstein 基函数的“有理”形式为：

$$T_{a_i}(t)=\frac{\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)},t\in[a_0,a_n] \tag{2}$$

其中，$\omega_{a_i}\geqslant 0(i=0,\cdots,n)$为权因子，且满足 $\omega_{a_0}>0$，$\omega_{a_n}>0$。

当 $a_i=i(i=0,1,\cdots,n)$时，令 $t=nx$，$c_i=\frac{1}{n^n}\binom{n}{i}$，则有：

$$\begin{aligned}\beta_{a_i}(t)&=\beta_i(t)=c_it^i(n-t)^{n-i}=c_in^nx^i(1-x)^{n-i}\\&=c_i(nx)^i(n-nx)^{n-i}=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=B_i^n(x)\end{aligned}$$

由此可见，当 $a_i=i(i=0,\cdots,n)$时，通过简单的变换，T-Bernstein 基函数则退化为 Bernstein 基函数。此外，如果 $a_i=i/n(i=0,\cdots,n)$，并令 $k_0=k_1=n$，$c_{a_i}=\frac{1}{n^n}\binom{n}{i}$，T-Bernstein 基函数同样退化为 Bernstein 基函数。如果令 $A=\{a_0,\cdots,a_n\}\subset Z$ 为一维整数点集，那么式(1)所定义的基函数恰为文献[10]中给出的 toric-Bernstein 基函数。因此，T-Bernstein 为经典 Bernstein 基函数与 toric-Bernstein 基函数的推广形式。

容易得出，由式(2)定义的 T-Bernstein 基函数的有理形式 $\{T_{a_i}(t)\}_{i=0}^{i=n}$ 具有以下性质：

1) 非负性

$T_{a_i}(t)\geqslant 0,t\in[a_0,a_n]$

2)单位分解性

$\sum_{i=0}^{n}T_{a_i}(t)\equiv 1$

3)端点性质

在端点 $t=a_0$ 和 $t=a_n$ 处，分别只有一个 $T_{a_i}(t)$取值为 1，其余为 0。

$$T_{a_i}(a_0)=\begin{cases}1, & i=0\\0, & i\neq 1\end{cases}$$

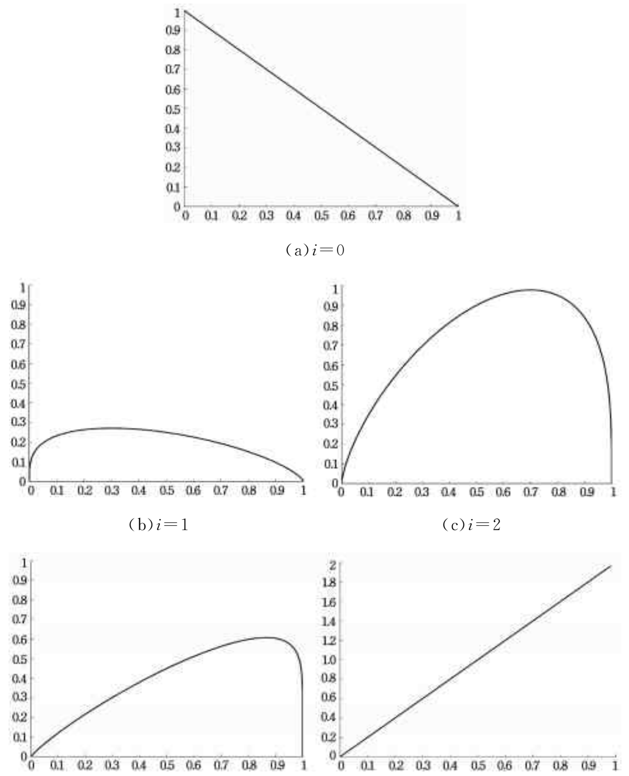
$$T_{a_i}(a_n)=\begin{cases}1, & i=n\\0, & i\neq n\end{cases}$$

4)退化性质

当 $\omega_{a_i}=\omega>0$ 时，$T_{a_i}(t)=\beta_{a_i}(t)$。此时，当节点满足 $a_i=i$，或 $a_i=i/n$ 且 $k_0=k_1=n$ 时，T-Bernstein 基函数 $\beta_{a_i}(t)$ 就退化为 Bernstein 基函数；当节点满足 $A=\{a_0,\cdots a_n\}\subset Z$ 时，则 T-Bernstein 基函数 $\beta_{a_i}(t)$ 退化为 toric-Bernstein 基函数。

例 1　令 $a_0=0$，$a_1=0.3$，$a_2=0.7$，$a_3=\sqrt{3}/2$，$a_4=1$；$c_{a_0}=1$，$c_{a_1}=0.5$，$c_{a_2}=1.8$，$c_{a_3}=0.9$，$c_{a_4}=2$。此时，T-Bernstein 基函数 $\beta_{a_i}(t)$在[0,1]上的图像如图 1 所示。

例 2　在例 1 中，当系数变化时，$i=2$ 对应的基函数曲线 $\beta_{a_2}(t)$的变化情况如图 2 所示(从下往上各个曲线对应的系数为 0.2,0.8,1.4,2.0)，可以看出系数主要影响基函数在各个点处的函数值大小。而当基函数的节点变动时，$i=2$ 对应的基函数 $\beta_{a_2}(t)$曲线的变化情况如图 3 所示(从左往右各个曲线对应的节点为 0.3,0.5,0.7)，可见基函数的节点主要影响最大值点的位置。



(a) $i=0$

(b) $i=1$ (c) $i=2$

(d) $i=3$ (e) $i=4$

图 1 T-Bernstein 基函数

Fig. 1 T-Bernstein basis function

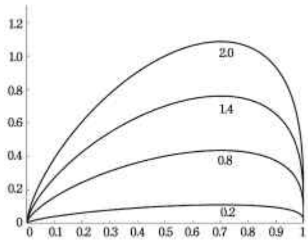


图 2 系数变化对 T-Bernstein 基函数的影响

Fig. 2 Effect of changing coefficients on T-Bernstein basis function

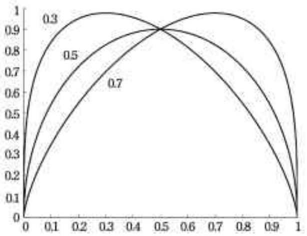


图 3 节点变化对 T-Bernstein 基函数的影响

Fig. 3 Effect of changing knots on T-Bernstein basis function

3 T-Bézier 曲线的建立

定义 3[1] 给定 $n+1$ 个空间向量 $\boldsymbol{P}_i \in R^3$ 与权因子 $\omega_i \geqslant 0$ $(i=0,1,\cdots,n)$，称 n 次参数曲线段

$$\boldsymbol{R}(x)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i \frac{\omega_i B_i^n(x)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i B_i^n(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i \boldsymbol{P}_i B_i^n(x)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_i B_i^n(x)}$$

为一条 n 次有理 Bézier 曲线。

由于 Bernstein 基函数具有许多优秀的性质，因此由它所定义的有理 Bézier 曲线不仅形式简洁直观，而且具有几何不变性、升阶性质、对称性、端点插值等一系列优良性质。

利用定义的 T-Bernstein 基函数的"有理"形式 $\{T_{a_i}(t)\}_{i=0}^{i=n}$，可以定义其对应的 T-Bézier 曲线。

定义 4 给定 $n+1$ 个空间向量 $\boldsymbol{P}_{a_i} \in R^3$ 与权因子 $\omega_{a_i} \geqslant 0$ $(i=0,1,\cdots,n)$，当 $t \in [a_0,a_n]$ 时，称参数曲线段

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{a_i}\frac{\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{a_i}T_{a_i}(t) \tag{3}$$

为一条 n 次 T-Bézier 曲线，称 $\boldsymbol{P}_{a_i}$ 为控制顶点。依次用直线段连接相邻的两个 $\boldsymbol{P}_{a_i}$，所得的 n 边折线多边形被称为控制多边形。

注 2：虽然式(1)所定义的 T-Bernstein 基函数依赖于系数 k_0 和 k_1 的选取，但由它们所定义的 T-Bézier 曲线(3)不依赖于这两个参数的选择。由文献[12]可知，本文所定义的 T-Bézier 曲线是由点集 $A=\{a_0,\cdots,a_n\}$ 所定义的高维实射影 toric 簇经投影(投影与权因子和控制顶点相关)后得到的。给定点集 A，对于不同的 k_0 和 k_1，将相应的的 toric 簇在射影空间中单位化(即使点的范数为 1)后，消除相应比例常数，toric 簇相同，则由点集 A 定义的 T-Bézier 曲线也相同。详细理论可参见文献[13-14]或 toric 簇理论相关文献，此处不再详细列出。

另外，定义 2 给出的 n 次 T-Bézier 曲线中的"n 次"只是形式上曲线的次数，为节点的个数减 1，并不一定是曲线的幂次或代数次数。此外，为了与曲线标准的参数域保持一致，可简单设 $a_0=0$，$a_n=1$，使得 T-Bézier 曲线的参数取值范围为 $[0,1]$。由于 T-Bernstein 基函数保持了 Bernstein 基函数的若干性质，因此式(3)所定义的 T-Bézier 曲线也继承了有理 Bézier 曲线的以下性质。

1)端点插值性质。T-Bézier 曲线插值于首末控制顶点 $\boldsymbol{P}_{a_0}$，$\boldsymbol{P}_{a_n}$。

2)几何不变性与仿射不变性。因为有理化后的 T-Bernstein 基函数具有单位分解性，所以对曲线进行仿射变换，即用线性变换 M 和平移 c 作用，从而得到新的曲线

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^*(t)&=M\boldsymbol{P}(t)+c\\&=M\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{a_i}T_{a_i}(t)+c\sum_{i=0}^{n}T_{a_i}(t)\\&=\sum_{i=0}^{n}(M\boldsymbol{P}_{a_i}+c)T_{a_i}(t)\end{aligned}$$

为对原曲线的控制顶点进行相同仿射变换后得到的新控制顶点对应的 T-Bézier 曲线。这说明 T-Bézier 曲线不依赖于坐标系的选取，是几何不变的。

3)凸包性。从有理 T-Bernstein 基函数的性质可知，$\{T_{a_i}(t)\}_{i=0}^{i=n}$ 构成权函数(非负性和单位分解性)。对于固定的 t，$\boldsymbol{P}(t)$ 即为各控制顶点 $\boldsymbol{P}_{a_i}$ 的加权平均。从几何上看，意味着 T-Bézier 曲线落在了控制多边形的凸包中。

4)退化性。当节点满足 $a_i=i$，或 $a_i=i/n$ 且 $k_0=k_1=n$ 时，利用 T-Bernstein 基函数的退化性质，T-Bézier 曲线退化为有理 Bézier 曲线。当节点满足 $A=\{a_0,\cdots,a_n\}\subset Z$ 时，T-Bézier 曲线退化为 toric 曲面的一维形式。

5)端点切矢性质。对 T-Bézier 曲线(3)，取

$$k_0=\frac{1}{a_1-a_0},k_1=\frac{1}{a_n-a_{n-1}}$$

记 $\boldsymbol{B}(t)=\sum_{i=0}^{n}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)$，$\omega(t)=\sum_{i=0}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)$，则 $\boldsymbol{P}(t)=\dfrac{\boldsymbol{B}(t)}{\omega(t)}$，于是 $\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{P}(t)\omega(t)$，对两边求导并整理可得：

$$\boldsymbol{P}'(t)=\frac{(\boldsymbol{B}'(t)-\boldsymbol{P}(t)\omega'(t))}{\omega(t)}$$

则 $\boldsymbol{P}(t)$ 在端点 $t=a_0$，$t=a_n$ 处的切矢为：

$\boldsymbol{P}'(a_0)=$

$$\frac{c_{a_1}k_0 k_1^{k_1(a_0-a_1)}(a_n-a_0)^{k_1(a_0-a_1)}\omega_{a_1}(\boldsymbol{P}_{a_1}-\boldsymbol{P}_{a_0})}{c_{a_0}\omega_{a_0}}$$

$\boldsymbol{P}'(a_n)=$

$$\frac{c_{a_{n-1}}k_1 k_0^{k_0(a_{n-1}-a_n)}(a_n-a_0)^{k_0(a_{n-1}-a_n)}\omega_{a_{n-1}}(\boldsymbol{P}_{a_n}-\boldsymbol{P}_{a_{n-1}})}{c_{a_n}\omega_{a_n}}$$

容易验证，当 T-Bézier 曲线退化为有理 Bézier 曲线时，上式将退化为有理 Bézier 曲线在端点处的切矢。

例 3　设节点 $a_0=0$，$a_1=0.1$，$a_2=0.4$，$a_3=0.7$，$a_4=1$，权因子分别为 1，2，5，2，1，控制顶点为(0，0)，(0.5，1.5)，(2，2)，(3，0)，(4，1)，则由式(3)定义的 4 次 T-Bézier 曲线如图 4 所示。

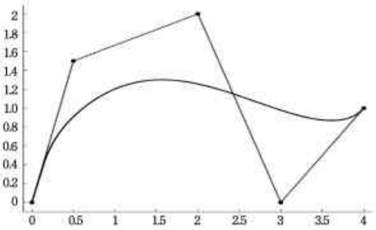


图 4　4 次 T-Bézier 曲线

Fig. 4　Quadratic T-Bézier curve

例 4　设节点 $a_0=0$，$a_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$a_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a_5=1$，权因子分别为 1，2，5，2，1，2，控制顶点为(0，0)，(1，1)，(2，2)，(3，0)，(4，1)，(4.7，0)，则由式(3)定义的 5 次 T-Bézier 曲线如图 5 所示。

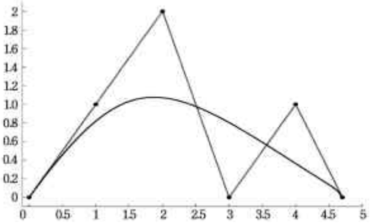


图 5　5 次 T-Bézier 曲线

Fig. 5　Quintic T-Bézier curve

定义 3 给出的经典有理 Bézier 曲线定义中，基函数及其次数是固定的。节点集 $a_i(i=0,\cdots,n)$ 可以在指定范围($a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n$)发生变化，而节点的变化带动了基函数的变化，从而使曲线随之改变。对于某个节点趋向于另一个节点的情形，定理 1 给出曲线的极限形式与几何结构。多个节点趋于某一节点的结果由推论 1 给出。

定理 1　令 T-Bernstein 基函数 $\beta_{a_i}(t)$ 的系数 $c_{a_i}=1$。对于式(3)定义的 n 次 T-Bézier 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$，当节点 a_k 趋向于 $a_{k+1}(0\leqslant k<n)$ 时，其极限曲线是一条 $n-1$ 次 T-Bézier 曲线，其形式为：

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)=\lim_{a_k\to a_{k+1}}\boldsymbol{P}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{k+1}}\beta_{a_{k+1}}(t)+\sum_{i=k+2}^{n}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum_{i=0}^{k-1}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}\beta_{a_{k+1}}(t)+\sum_{i=k+2}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}$$

其中，$\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}=\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{k+1}}=\frac{\omega_{a_k}}{\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}}\boldsymbol{P}_{a_k}+\frac{\omega_{a_{k+1}}}{\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}}\boldsymbol{P}_{a_{k+1}}$。

证明：当 a_k 趋向于 a_{k+1} 时，有：

$$\lim_{a_k\to a_{k+1}}\beta_{a_k}(t)=\lim_{a_k\to a_{k+1}}(t-a_0)^{a_k-a_0}(a_n-t)^{a_n-a_k}=(t-a_0)^{a_{k+1}-a_0}(a_n-t)^{a_n-a_{k+1}}=\beta_{a_{k+1}}(t)$$

因此，

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)=\lim_{a_k\to a_{k+1}}\frac{\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{a_i}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}=\frac{\omega_{a_0}\boldsymbol{P}_{a_0}\beta_{a_0}(t)+\cdots+\omega_{a_k}\boldsymbol{P}_{a_k}\beta_{a_{k+1}}(t)+\omega_{a_{k+1}}\boldsymbol{P}_{a_{k+1}}\beta_{a_{k+1}}(t)+\cdots+\omega_{a_n}\boldsymbol{P}_{a_n}\beta_{a_n}(t)}{\omega_{a_0}\beta_{a_0}(t)+\cdots+\omega_{a_k}\beta_{a_{k+1}}(t)+\omega_{a_{k+1}}\beta_{a_{k+1}}(t)+\cdots+\omega_{a_n}\beta_{a_n}(t)}$$

$$=\frac{\omega_{a_0}\boldsymbol{P}_{a_0}\beta_{a_0}(t)+\cdots+(\omega_{a_k}\boldsymbol{P}_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}\boldsymbol{P}_{a_{k+1}})\beta_{a_{k+1}}(t)+\cdots+\omega_{a_n}\boldsymbol{P}_{a_n}\beta_{a_n}(t)}{\omega_{a_0}\beta_{a_0}(t)+\cdots+(\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}})\beta_{a_{k+1}}(t)+\cdots+\omega_{a_n}\beta_{a_n}(t)}$$

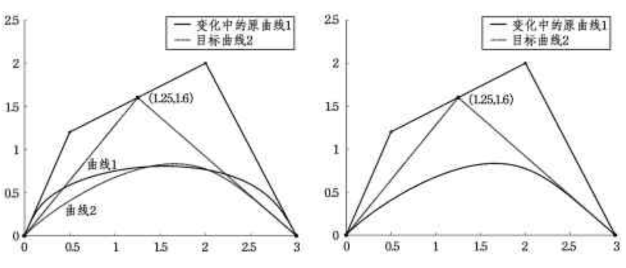
令 $\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}=\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{k+1}}=\frac{\omega_{a_k}}{\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}}\boldsymbol{P}_{a_k}+\frac{\omega_{a_{k+1}}}{\omega_{a_k}+\omega_{a_{k+1}}}\boldsymbol{P}_{a_{k+1}}$，即可得到：

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)=\lim_{a_k\to a_{k+1}}\boldsymbol{P}(t)$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{k+1}}\beta_{a_{k+1}}(t)+\sum_{i=k+2}^{n}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum_{i=0}^{k-1}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{k+1}}\beta_{k+1}(t)+\sum_{i=k+2}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}$$

定理 1 说明，当 T-Bézier 曲线中两个节点趋于重合($a_k=a_{k+1}$)时，曲线退化为由$\{a_0,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n\}$为节点、$\{\omega_{a_0},\cdots,\omega_{a_{k-1}},\widetilde{\omega}_{a_{k+1}},\omega_{a_{k+2}},\cdots,\omega_{a_n}\}$为权因子、$\{\boldsymbol{P}_{a_0},\cdots,\boldsymbol{P}_{a_{k-1}},\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{k+1}},\boldsymbol{P}_{a_{k+2}},\cdots,\boldsymbol{P}_{a_n}\}$为控制顶点的 $n-1$ 次 T-Bézier 曲线。

例 5　设 $a_0=0$，$a_1=0.2$，$a_2=0.7$，$a_3=1$，权因子均为 1，控制顶点为(0，0)，(0.5，1.2)，(2，2)，(3，0)，定义一条 3 次 T-Bézier 曲线。当 a_1 趋向于 a_2 时，T-Bézier 曲线的变化如图 6 所示。可以看出，极限曲线和本文分析得出的目标曲线是重合的。



(a)初始状态　　(b)极限状态

图 6　单节点变化的 3 次 T-Bézier 曲线极限性质

Fig. 6　Limiting of the single knot of cubic T-Bézier curve

推论 1　令 T-Bernstein 基函数 $\beta_{a_i}(t)$ 的系数 $c_{a_i}=1$，对于式(3)定义的 n 次 T-Bézier 曲线，当节点 $a_q,a_{q+1},\cdots,a_{q+k-2}$ 趋向于 $a_{q+k-1}(k\leqslant n)$ 时，其极限曲线是一条 $n-k+1$ 次 T-Bézier 曲线，形式为：

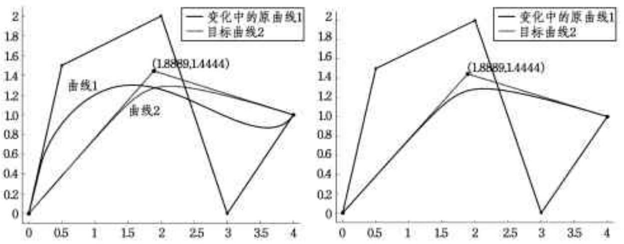
$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)=\lim_{a_q,\cdots,a_{q+k-2}\to a_{q+k-1}}\boldsymbol{P}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{q-1}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{q+k-1}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{q+k-1}}\beta_{a_{q+k-1}}(t)+\sum_{i=q+k}^{n}\omega_{a_i}\boldsymbol{P}_{a_i}\beta_{a_i}(t)}{\sum_{i=0}^{q-1}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)+\widetilde{\omega}_{a_{q+k-1}}\beta_{a_{q+k-1}}(t)+\sum_{i=q+k}^{n}\omega_{a_i}\beta_{a_i}(t)}$$

其中：

$$\widetilde{\omega}_{a_{q+k-1}}=\omega_{a_q}+\omega_{a_{q+1}}+\cdots+\omega_{a_{q+k-1}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{a_{q+k-1}}=\frac{\omega_{a_q}}{\omega_{a_q}+\cdots+\omega_{a_{q+k-1}}}\boldsymbol{P}_{a_q}+\cdots+\frac{\omega_{a_{q+k-1}}}{\omega_{a_q}+\cdots+\omega_{a_{q+k-1}}}\boldsymbol{P}_{a_{q+k-1}}$$

例 6 在例 3 中，当节点 a_1 和 a_3 都趋向于节点 a_2 时，T-Bézier曲线的变化如图 7 所示。可以看出，极限曲线和我们分析得出的目标曲线也是重合的。



(a) 初始状态 (b)极限状态

图 7 多节点变化的 4 次 T-Bézier 曲线极限性质

Fig. 7 Limiting of the multiple knots of quadratic T-Bézier curve

结束语 本文利用任意给定的实数节点集给出一类特殊的基函数，称为 T-Bernstein 基函数，它是经典 Bernstein 基函数与 toric-Bernstein 基函数的推广，继承了 Bernstein 基函数的一些性质。与 Bernstein 基函数相比，T-Bernstein 基函数的节点可以改变。本文基于 T-Bernstein 基函数构造了一类新的参数曲线——T-Bézier 曲线，它部分继承了有理 Bezier 曲线的性质。当节点移动时，本文还给出了曲线极限的几何性质，且通过实例进行了验证。

节点的不确定性，导致了 T-Bernstein 基函数不具备 Bernstein 基函数的递推性质，从而很难给出 T-Bézier 曲线的升阶与 de Casteljau 算法等优良性质；而且 T-Bernstein 基函数具有实数次数，对其进行微分、积分等运算时比较复杂，理论分析也比较难，因此如何利用代数几何与组合学中一般实数点集所定义的 toric 簇与 toric 理想的相关知识来证明 T-Bernstein 基函数与 T-Bézier 曲线的相关性质，是需要进一步解决的问题。一般实数节点所定义的基函数在一定程度上限制了曲线的应用范围，目前仅有 MQ 径向基函数有相对深入的理论与应用研究，而其次数也仅是有理形式的。如何挖掘一般实数形式次数的基函数及其定义的曲线曲面在相关学科中的应用，也是下一步的研究方向。

参 考 文 献

[1] 王仁宏，李崇君，朱春钢. 计算几何教程[M]. 北京：科学出版社，2008.

[2] 王国瑾，汪国昭，郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[3] FARIN G. Curves and Surfaces for CAGD，A Practical Guide (Fifth Edition)[M]. New York：Academic Press，2002.

[4] BERMSTEIN S N. Démonstration du théorème de Weierstrassf on déesurle calcul des probabilités[OL]. http://www.numdam.org/item?id：AIHBP_1975.11-03-203-0.

[5] FARIN G. Chapter I-A History of Curves and Surfaces in CAGD [C]// Handbook of Computer Aided Geometric Design. North Holland：Elsevier，2002：1-21.

[6] FAROUKI R T. The Bernstein polynomial basis：A centennial retrospective [J]. Computer Aided Geometric Design，2012，29(6)：379-419.

[7] CHEN Q Y，WANG G Z. A class of Bézier-like curves [J]. Computer Aided Geometric Design，2003，20(1)：29-39.

[8] WANG G Z，CHEN Q Y，ZHOU M H. NUAT B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design，2004，21(2)：193-205.

[9] ORUC H，PHILLIPS G M. q-Bernstein polynomials and Bézier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2003，151(1)：1-12.

[10] KRASAUSKAS R. Toric surface patches [J]. Advances in Computational Mathematics，2002，17(1/2)：89-113.

[11] GARCIA-PUENTE L D，SOTTILE F，ZHU C G. Toric degenerations of Bezier patches [J]. ACM Transactions on Graphics，2011，30(5)：110.

[12] ZHU Y P，HAN X L，LIU S J. Curve construction based on fourαβ-Bernstein-like basis functions [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2015，273(1)：160-181.

[13] GARCIA-PUENTE L D，SOTTILE F，GRACIUN G. Some geometrical aspects of control points for toric patches [C]// International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces. Heidelberg：Springer，2008：111-135.

[14] POSTINGHEL E，SOTTILE F，VILLAMIZAR N. Degenerations of real irrational toric varieties [J]. Journal of London Mathematical Society，2015，92(2)：223-241.