

# 一种改进的基于径向基函数图像变形方法<sup>\*</sup>

聂 焜 赵荣椿 张晓燕 侯云舒 张 程

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)

**摘 要** 图像变形是计算机动画中常用的方法之一,通过该项技术用户只需指定待处理图像上的某些变化特征就可以得到他们所期望的变形效果。本文在径向基插值算法的基础上,通过加入一次项和仿射可微条件,适当选择核函数,转化原优化问题为齐次线性问题,从而使该线性系统获得稳定的唯一解。此外,本文还给出在目标图像中建立径向基函数的算法,为采用反向重采样技术以获得光滑的变形效果提供了必要的支持。实验结果表明,本文算法可以实现多控制点准确插值下的平滑渐变变形效果。

**关键词** 图像变形,径向基函数,像素映射,仿射变换

## An Improved Radial Basis Function Based Method for Image Warping

NIE Xuan ZHAO Rong-Chun ZHANG Xiao-Yan HOU Yun-Shu ZHANG Cheng

(College of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract** Image warping is one of the popular approaches in computer animation and using this technology we can change a given image into its warping image by some user defined features. Based on the radial basis interpolation function algorithm, an improved image warping method is proposed, which can transform the original optimize problem to nonsingular linear problem by adding one-order term and affine differentiable condition. In the same time, this linear system may get steady unique solution by choosing suitable kernel function. Furthermore, the method how to set up the radial basis function in the target image is given too, it provides necessary support to obtain slippery warping image, which uses the backward re-sampling technology. Experimental results show that improved algorithm can implement smooth and gradual image warping under multi-anchor points' accurate interpolation.

**Keywords** Image warping, Radial basis function, Pixel mapping, Affine map

## 1 引言

图像变形是计算机动画设计中一种将数字图像进行几何变形的技术。其实质在于,在二维平面中,将一个在有界区域上的彩色或灰度像素按照某种规则映射回自身并使其像素分布发生改变,从而产生另一幅数字图像的过程。在图像配准、计算机动画、人脸识别、艺术造型等应用领域,对图像变形都有大量的需求。目前,人们常用的图像变形方法一般分为基于网格、基于线特征以及基于散乱点插值等三类<sup>[1]</sup>。其中,人们对基于散乱点插值变形方法的研究较早,其特点是由用户指定若干特征点的位置变化,利用插值方法建立映射关系,进而运用这种关系对整幅图像进行变形。该类方法的优点是变形出的图像效果光滑自然,且用户易于进行控制,因而它被迅速地发展和广泛地采用。但是,对目前很多插值方法的解决往往是一个非线性的问题或奇异的线性问题,需要通过迭代运算求优化解,故而计算过程太慢,其结果也只是近似插值,而不能做到准确插值。本文提出的基于径向基方程的改进算法将原问题转化为线性问题,可以实现对任意多控制点的准确插值,并得到光滑连续的变形效果,且时间复杂度较小,从而很好地弥补了以往方法的缺憾。

## 2 利用径向基函数插值的图像变形

径向基方程理论最早由 F. L. Bookstein 应用于图像变形领域<sup>[2]</sup>。所谓径向基是指在以任意点到插值点的欧氏距离的某种函数作为插值方程的基,其一般表现形式<sup>[3]</sup>为:

$$S(x) = \sum_{i=1}^N a_i g(\|x_j - x_i\|) = y_j \quad (1)$$

其中,  $x_j$  表示代表图像中任意原坐标点的向量,  $x_i$  代表指定

插值点的坐标向量。 $g(u)$  为核函数,径向基函数以两点间距离为自变量。在很多使用场合,为使系统收敛,往往采用降阶函数作为径向基。 $a_i$  为插值权系数,  $y_j$  为目标点的坐标向量。求解插值的变形问题时,由于已知  $N$  个插值点的原位置和目标位置,因此可带入式(1)求解  $a_i$ ,进而得到插值方程,但显然该方程组是线性相关的,不能得到有效解。为得到可解的方程,本文在原方程中增加线性项如下:

$$S(x) = \sum_{i=1}^N a_i g(\|x_j - x_i\|) + Ax + a_3 = y_j \quad (2)$$

其中  $A = (a_1, a_2)^T$ ,  $a_i \in R^2$ ,  $1 \leq i \leq 3$ 。此时,  $S$  由  $R^2$  中  $N+3$  个系数确定,因此对插值权系数的计算需要通过解两个  $N+3$  维的线性方程组;对每个方程组而言,可通过给出的插值条件得到  $N$  个约束。为了建立齐次的线性系统,我们假设图像做仿射意义下的变形,因而增加(3)式给出的三个仿射可微条件。

$$\sum_{i=1}^N a_i^1 = \sum_{i=1}^N a_i^1 q_i^1 = \sum_{i=1}^N a_i^1 q_i^2 = 0, k=1, 2 \quad (3)$$

这样,只要选择适当的核函数,当给出三个以上(含三个)的插值点时,将得到方程组的唯一解。

## 3 像素反向重采样

图像变形实质是一个遵照某种规则对原图像中的像素进行重采样的问题。一般思路是,对原图像中某个位置的像素点计算它在变形后图像中的位置。然而使用这种方法遇到的一个问题是:目标图像中的任意一个像素未必可以对应到原图像中的某一个存在像素,这样便无法对该位置赋予像素值。这是因为图像本身是一个二维离散采样信号,其定义空间不是连续的,信号只有在整数位置上才有定义。如果一个目标像素

<sup>\*</sup> 本文得到了国家自然科学基金(60141002)的支持,聂焜 博士生,主要研究方向为计算机视觉、模式识别。

对应到原图像中某个非整数的位置上,将失去原始的采样信号值。由此造成目标图像中某些位置的像素空缺,见图2(a)和3(a)。

对这种情况,常采用的解决方法是,对空缺像素进行双线性插值,其前提是假设图像信号的变化过程为一个连续光滑过程。依靠某缺失像素周围四个邻接的像素值可以估计该像素值。但这样做需要对待插值的每个像素求解一个二元方程组。显然,当图像中空缺像素较多时,其计算复杂程度将很大。

反向重采样方法可以很好地解决这个问题。其基本思路是,对目标图像上每个像素,根据从变形函数推出的逆函数在原图像中寻找一个对应像素的位置,如果计算得到为非整数位置,则用其邻接的四个像素作简单插值运算得到。这种方法的特点是,运算复杂性小,效果较好。运用这种方法的关键在于逆函数的构造。

然而对于径向基插值问题,显然其逆变换函数是一对多映射,无法得到唯一解。为此,我们考虑到了径向基函数的特点,其自变量是任意点到控制点原位置间的距离。考察式(2),如果首项已知,则其为线性问题,从而可以求出它的逆函数。如果我们选择适当的径向基函数,使图像变形前后任意点的原位置和目标位置到有关控制点原位置和目标位置的距离变化较小时,则可用目标图中点间的径向距离代替原图中的径向距离,从而构造出与原插值系统近似的系统来,从而实现利用反向重采样来构造变形图像。本文采用式(4)给出的径向基函数<sup>[4]</sup>来实现反向重采样。

$$g(u) = (u^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中,  $r = -1$  是衰变中心,  $t$  是强度因子,可控制变形的幅度。该函数的性质如图1所示。

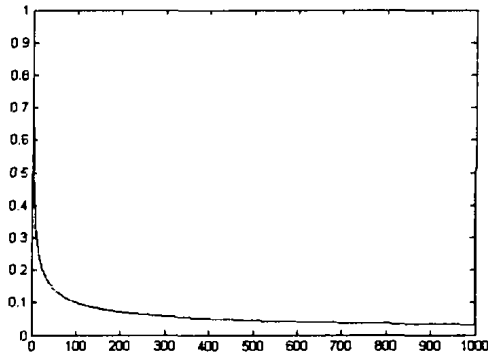


图1  $g(u)$ 函数性质图

#### 4 径向基函数的选择

一般地,选择径向基函数需要考虑四个问题<sup>[3]</sup>: a) 必须使插值方程组有解; b) 方程组的解应该具有稳定性; c) 较小的时间复杂度; d) 在全局与局部效果之间有比较合适的权衡。本文还需要考虑在第3节中讨论的利用反向重采样来实现变形的要求,即变形前后任意点到插值点的距离变化应尽量小。经过反复对比试验,我们认为(4)式给出的函数综合满足本文算法对径向基函数的要求。

#### 5 实验结果

我们在 Visual C++ 环境下实现了本文算法并选择若干幅图像进行测试,证实确实可以收到很好变形效果(如图2和图3所示)。可以看到,本文算法实现了对控制点的准确插值,变形特点与前向重采样的效果几乎相同,同时很好地解决了像素点缺失的问题。

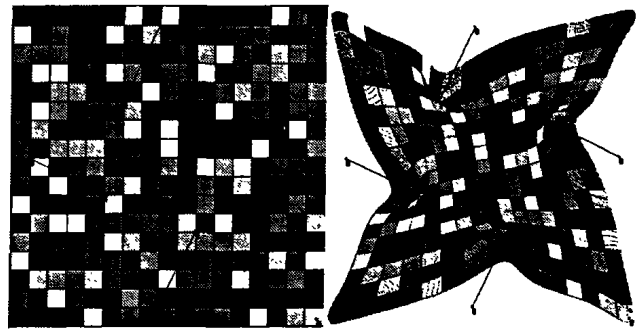


图2(a) 前向重采样算法得到的变形效果

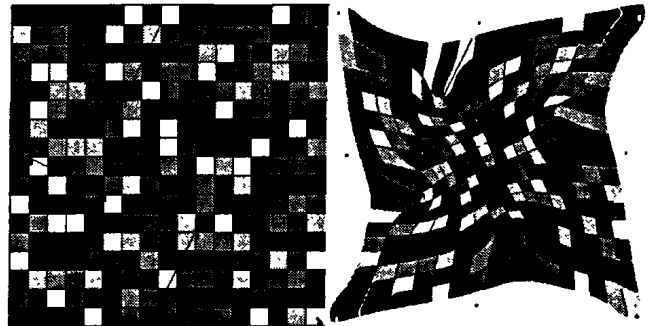


图2(b) 利用本文算法得到的变形效果



图3(a) 前向重采样算法对 Lena 图像得到的变形效果



图3(b) 本文算法对 Lena 图像的变形效果

**结论** 本文在基于径向基插值的图像变形算法基础上,通过增加的仿射变换条件,将原问题转化为齐次线性问题进而求解。为使插值具有较好的平滑渐变效果,本文提出对目标像素点计算径向基的方法,并采取反向重采样的策略。通过进行实验对比,由本文算法建立的变形关系能够准确实现对三个以上(含三个)特征点的插值,变形效果光滑连续,明显优于文[2]的算法。

#### 参考文献

- 1 Ruprecht D, Müller H. Image Warping with Scattered Data Interpolation. IEEE Computers Graphics and Application, 1995, 15(2): 37~43
- 2 Bookstein F L. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. IEEE Trans. on Pattern analysis and Machine Intelligence, 1989, 11: 567~585
- 3 Arad N, Reisfeld D. Image Warping Using Few Anchor Points and Radial Functions. Computer Graphics Forum, 1995, 14(1): 35~46
- 4 Li Jianyu, Luo Siwei, Qi Yingjian, Huang Yaping. Numerical solution of differential equations by radial basis function neural networks, on Neural Networks, 2002. IJCNN '02. In: Proc. of the 2002 Intl. Joint Conf. Volume: 1, May 2002. 773~777