

一个 SPEA 改进算法及其收敛性分析^{*}

吴作顺¹ 王 石²

(总参第六十一研究所 北京100039)¹ (国防科技大学电子工程学院 长沙410073)²

摘 要 SPEA 是一种多目标优化算法。与其它多目标进化算法相比, SPEA 算法具有设置参数少、解在空间分布均匀等优点。本文引入多点交叉和 Cauchy 变异对 SPEA 算法的收敛速度进行了改进, 并对其收敛性进行了分析, 文中给出的仿真算例证实了改进方法的有效性。

关键词 多目标优化, SPEA 改进算法, 收敛性分析

An Improved SPEA and its Convergence

WU Zuo-Shun¹ WANG Shi²

(PLA 61st Research Institute, Beijing100039)¹ (School of Electronic Engineering, Nat'l Univ. of Defense Tech., Changsha410073)²

Abstract SPEA (Strength Pareto-Optimal Evolutionary Algorithm) is a Multi-Objective Evolutionary Algorithm (MOEA). Compared with other MOEA's, it has the advantages of fewer parameters and well-distributed solutions in objective function spaces. In this paper, a new multiple-chromosome crossover operator and a Cauchy mutation operator are introduced into SPEA to speed up the algorithm. The convergence of the algorithm is also presented for the first time. The effectiveness of the improved SPEA is proved by our experiments.

Keywords Multi-objective optimization, Improved SPEA, Convergence analyses

1 引言

在实际工程应用中, 经常遇到同时优化多个目标函数的问题, 而且多目标一般是相互抵触的, 这就是多目标优化问题。其一般数学模型可描述如下:

$$V\text{-max } f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

$x \in X$ (X 为一给定集合, 称为状态空间)

其中 V-max 表示向量极大化, 即 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ 中的各个子目标函数都尽可能地极大化。当然, 也可等价地表示为 V-min。

多目标优化问题一般没有唯一的完全解, 而是具有一系列的非劣解(或非支配解)构成的解集合, 通常称为 Pareto 最优解。非劣性的定义如下:

定义1 设 X 是多目标优化的状态空间, $f(x)$ 是向量目

标函数, $x_1 \in X, x_2 \in X$, 称 x_2 非劣于 x_1 , 或 x_2 优于 x_1 , 记作 $x_1 < x_2, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \dots \exists i \in \{1, \dots, n\}, f_i(x_1) < f_i(x_2)$ 。

定义2 设 X 为多目标优化模型的状态空间, $f(x)$ 是向量目标函数。若 $x \in X$, 并且不存在比 $\bar{x}$ 更优越的 x , 则称 $\bar{x}$ 是多目标优化模型的 Pareto 最优解。所有解 $\bar{x}$ 构成的集合称为 Pareto 最优集。

多目标优化问题的本质在于多数情况下各个子目标是相互冲突的, 要使多个子目标同时达到最优值是不可能的, 而只能对它们进行协调和折衷处理, 使各个子目标尽可能达到最优。

进化算法(EA: Evolution Algorithm)对整个群体进行的进化运算操作, 它具有隐含的并行性, 并着眼于个体集合的操作, 而多目标优化问题的 Pareto 最优集一般也是一个集合,

^{*} 受国家自然科学基金60303012资助。吴作顺 博士后, 主要研究方向为网络安全与进化计算。王 石 博士后, 主要研究方向为系统建模与仿真。

扰动信号而带来的对所产生序列周期长度的约束。在实际应用中, 我们可以决定等分 $[0, 1]$ 区间的子区间的数目, 并可以选择扩散若干个子区间的变量, 而扩散系数 e 也可以自由选取。在混沌序列应用于序列密码时, 这类参数都可以作为系统的密钥, 从而极大地增大了密钥空间, 增强了加密系统的安全性。

本方案的结果表明对混沌系统变量进行选择扩散策略是混沌动力学从理论模型到实际应用的一个新的有效途径。

参 考 文 献

1 周红. 一类混沌密码序列的设计方法及其有限精度实现问题分析: [复旦大学博士学位论文]. 1996

- 2 李树钧. 数字化混沌密码的分析与设计: [西安交通大学博士学位论文]. 2003
- 3 周红, 凌璧亭. 有限精度混沌系统的 m 序列扰动实现. 电子学报, 1997, 25(7): 95~97
- 4 Sang Tao, Wang Ruili, Yan Yixun. Perturbance-based algorithm to expand cycle length of chaotic key stream. Electronics Letters, 1998, 34(9): 873~874
- 5 Li Shujun, Mou Xuanqin, Cai Yuanlong. Pseudo-random bit generator based on couple chaotic systems and its application in stream-ciphers cryptography. In: Progress in Cryptology - INDOCRYPT 2001, Lecture Notes in Computer Science vol. 2247, Springer-Verlag, Berlin, 2001. 316~329
- 6 赖溪松, 等著, 张玉清, 肖国镇, 改编. 计算机密码学及其应用. 国防工业出版社, 2001

因而用 EA 解决多目标优化具有天然的合理性。经典优化的设计(如梯度下降法、单纯形搜索)强调局部搜索的单点优化,它们的出发点不是为多目标优化设计的,因而 EA 求解多目标优化问题比经典优化方法具有更大的优越性。

自从 Schaffer 于 20 世纪 80 年代提出向量评价遗传算法 (VEGA) 求解多目标优化问题以来^[1,2], 出现了越来越多的相关研究文献, 一般都基于 Pareto 排序来设计算法: 对于给定的某一代群体, 找出其所有的 Pareto 最优解, 令其序号为 1; 然后把 Pareto 最优解从该群体中去掉再找出其余元素组成的集合的 Pareto 最优集, 令这些元素的序号为 2; 依次类推。这样可对群体的每个个体都赋予了适应度, 再用 EA 算法的算子对群体进行操作。为了防止群体的早熟, 需要增加个体的多样性, 一般引入小生境算子 (Niche), 设置共享 (sharing) 函数为:

$$sh(d) = \begin{cases} 1 - (\frac{d}{\sigma_{share}})^{\alpha} & \text{若 } d < \sigma_{share} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

这样每个个体以适应度 $F(i)$ 修改为:

$$F_i(i) = \frac{F(i)}{\sum_j sh[d(i, j)]}$$

其中 $d(i, j)$ 表示个体 i 与 j 之间的距离 (如欧氏距离, Hamming 距离等)。然而, 设置参数 α 和 σ_{share} (邻域半径) 是极其困难的, 和具体问题密切相关的, 有时候不亚于问题本身。

Echart Zitzler 在其文^[3]提出了 SPEA 算法, 即一种用 EA 算法求解多目标优化的方法。SPEA 算法的优越性在于不需要设置小生境算子, 从而不需要设置共享函数所需的参数, 因为其设置个体的多样性已包含在适应度的计算中。SPEA 设置第 t 代群体 P_t 的适应度和外部集合 $\bar{P}_t$ (当前的 Pareto 最优集) 方法如下:

对每一个, 设置一定值称为压力^[3]:

$$S(i) = \frac{|\{j | j \in P_t \wedge i > j\}|}{N+1}$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数, 即集合中元素数目的多少。然后对群体的每个个体进行适应度评价:

$$F(i) = 1 + \sum_{i \in P_t, i > j} S(i) \quad (1)$$

这种适应度评价的机制蕴含这样的思想: 每个个体适应度反映是个体和 Pareto 最优解的接近程度以及在目标函数分布均匀性, 因而体现小生境的思想而又不需设置一些参数, 详细解释见文^[13]。

Echart Zitzler 的 SPEA 方法虽然和其它的 MOEA 相比有许多优点, 但其收敛速度不太理想, 特别是在较大空间进行的搜索, 其关键在于使用交叉是两个个体的交叉, 而变异是正态变异 (因而生成的个体在局部范围内)。本文着眼于克服 SPEA 算法的这种局限性, 引进了多点交叉和 Cauchy 变异的概念, 加快其收敛速度, 并对算法的收敛性进行了分析。而 Echart Zitzler 并没有对算法进行收敛性分析, 本文补充了这一不足。最后用测试函数来验证了改进算法的有效性。

2 SPEA 改进算法与收敛性分析

由于交叉和变异使个体具有多样性, 我们引进多体交叉和 Cauchy 变异的概念。

在进化算法中, 两个个体的算术交叉是一个遗传算子, 由此可得到多个个体参与算术交叉的操作方法: 一般地, 对应于选出的 b 个父代体 $X_i (1 \leq i \leq b)$, 从 $[0, 1]$ 中选取 $r_1, r_2, \dots, r_b$

个随机数, 共生成 b 次, 得到 b 个个体 $X'_i = (\sum_{j=1}^b r_j X_j) / (\sum_{j=1}^b r_j), i=1, 2, \dots, b$ 。这种多体交叉比两个个体交叉产生的个体多样性是明显的, 因为多体交叉利用了多个个体的信息, 从群体中选取 $r (r > 2)$ 个个体要比从群体中选取两个个体的组合数目大得多。

在进化算法中, 变异算子是一种重要的操作, 即 $X \rightarrow X'$, 其中 X 为原来的个体, 而 X' 是在 X 的邻域中产生, 如 $X' = X + N(0, \sigma^2)$, 其中 σ 是要设定的参数。类似地, 模拟退火也是在 X 的邻域中产生 X' 。众所周知, Cauchy 退火比正态退火更能找到全局最优解, 因为 Cauchy 退火有更大的搜索范围, 能更好地挑出局部最优解。因此可类似地用 Cauchy 变异来代替正态变异, 即 $X' = X + \text{Cauchy}(a)$, a 为要设置的参数。对于大空间的搜索, Cauchy 变异更有可能产生“好”的个体。用多体交叉和 Cauchy 变异代替 SPEA 中的两体交叉和正态变异便可得到改进的 SPEA。

记 $p(A)$ 为 A 上的 Pareto 最优集, 可得到改进后的 SPEA 算法如下:

Step1 设置群体大小 N 及外部集合的大小 $\bar{N}$ 和最大代数 T , 令代数 $t=0$, 初始化群体 P_0 , 外部集合 $\bar{P}_t = p(\bar{P}_t)$ ($\bar{P}_t$ 为存放当前 Pareto 最个体的集合)。

Step2 多体交叉 $P_t \rightarrow P'_t$ 。

Step3 Cauchy 变异 $P'_t \rightarrow P''_t$ 。

Step4 记 $P_t^* = P_t \cup P'_t \cup P''_t$ 更新 $\bar{P}_t, \bar{P}_t = p(P_t \cup P'_t \cup P''_t)$, 如果 $\bar{N} < |\bar{P}_t|$ 对 $|\bar{P}_t|$ 进行筛选。

Step5 对于 P_t^* 的每个适应度, 按 (1) 式采用 $\lambda + \mu$ 选择准则, 选出 $N = |P_t|$ 个体。

Step6 $t \leftarrow t+1$, 若果 $t \geq T$, 则输出最优解 $\bar{P}_t$ 。

在 step4 中, 对 $\bar{P}_t$ 行筛选原则按个体距离的大小把 $\bar{P}_t$ 分成 $\bar{N}$ 类, 然后从中选出有代表的个体 (比如距离其它点距离和最近的点)。上述算法的形式和 Echart Zitzler 稍微不同, 但原则是一样的, 其中多体交叉和 Cauchy 变异是我们的改进部分。下面对算法收敛性进行分析。

因为交叉和变异是对个体的多样性产生影响, 不改变算法的收敛性^[4,5], 因而 SPEA 及其改进形式收敛性是一样的, 为了证明收敛性, 我们引进一些符号和假设。

假设1 假设状态空间 U 为有限离散集合。这个假设并不失问题的一般性, 因为对于连续空间 U 在一定精度要求下, 总有办法对其进行离散化, 而且在计算上的操作实际上是在有限字长范围内进行的。

引理1 个体序列 $\{X_{n+1} = G(X_n), n=1, 2, \dots\}$ 构成一齐次 Markov 链, 其中 G 为进化算子, Markov 链的状态转移矩阵为非负的、随机的 (行的概率值和为 1)。特别地, $\lambda + \mu$ 轮盘与联赛选择准则都是类似的^[4-6]。

令

$$F^* = p(U), \text{ 其中 } p(U) \text{ 表示 } U \text{ 上的 Pareto 最优集。} \quad (2)$$

对于集合 A, B , 定义 A 到 B 的距离为 $d(A, B) = |A| - |A \cap B|$ 。我们称算法是收敛的, 如果

$$d(\bar{P}_t, F^*) \rightarrow 0, a.s. \quad P \quad t \rightarrow \infty \quad (3)$$

其中 $a.s. P$ 表示以概率 1 成立且 t 表示进化代数。上述收敛性的含义是, 当前的 (第 t 代) 的 Pareto 最优解最终或者包含于 F^* 中, 或者和 F^* 相等。在上述假定下, 我们有如下结果:

定理1 SPEA 是收敛的, 即 (3) 式成立。

证明:分两种情况:(1) $\bar{N} < |F^*|$,由 $\lambda + \mu$ 选择算子进行作用的个体形成的序列为一齐次 Markov 链,假设在 $\bar{P}_i$ 中存在 $X \in U$,不是 Pareto 最优的,则由 Pareto 最优性的定义,存在 $X' \in F^*$ 使得 $X < X'$,记 $P(X \rightarrow X')$ 表示个体由状态 X 转移到 X' 的概率, $\inf\{P(X \rightarrow X') | X' \in U, \text{且 } x < X'\} > 0$ (因状态转移矩阵是非负的且状态空间为离散的),因而

$$\sum_i \inf[P(X \rightarrow X') | X' \in F^*, \text{且 } X < X'] = \infty$$

由 Borel-Cantelli 引理^[7],总有无穷多个 $[X \rightarrow X']$ 事件以概率1发生,所以 $[X \rightarrow X']$ 所需的时间为有限的(非无穷的),对于 $\bar{P}_i$ 中的非最优的元素 X 总会被 F^* 中元素替代。即最终有 $\bar{P}_i \subset F^*$,因此 $d(\bar{P}_i, F^*) = 0, a.s. P \rightarrow \infty$ 。

(2) $\bar{N} \geq |F^*|$,则可仿照(1)的证法。一旦最优解进入 $\bar{P}_i$ 中,将永远留在 $\bar{P}_i$ 中。和(1)同样的理由, F^* 中的元素将最终进入 $\bar{P}_i$ 中,由 $\bar{P}_i$ 的产生办法, $\bar{P}_i$ 中将不会具有非 Pareto 最优解,即最终 $\bar{P}_i = F^*$,因而 $d(\bar{P}_i, F^*) = 0, a.s. P \rightarrow \infty$,证毕。

在上面的证明中,并没有用到 $\lambda + \mu$ 的特殊性质,只需满足引理2.2的性质即可,因而轮盘选择和联赛模型选择等也具有收敛性。

3 算例分析

我们采用 shaffer 测试函数^[4]进行算例分析,该算例在很多 MOEA 算法中都得以引用: $\text{minimize } F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x-2)^2$, 且 $-10^3 \leq x \leq 10^3$ 。

测试函数的最优解为区间 $[0, 2]$,是一个凸集。算法群体大小为24, $\bar{N} = 25$,进化代数 $T = 10$ 。图1和图2分别表示了改进前和改进后的算法求解的 Pareto 最优解。

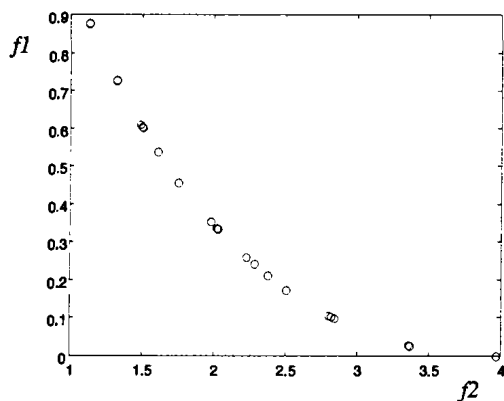


图1 改进前的计算结果

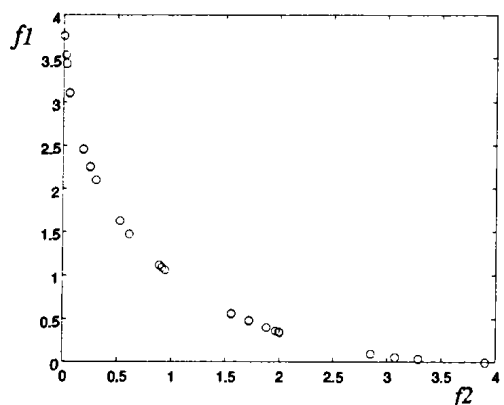


图2 改进后的计算结果

从图1可以看出,改进前的算法虽然也能找到 Pareto 最优解,但解的分布是不均匀的:解集中在解空间某一局部范围内。这是因为两个个体交叉比多体交叉产生的个体种类要少一些。图2中改进后的算法求得的解在解空间分布比较均匀。虽然 SPEA 求得的也是 Pareto 最优解,但解并不遍布整个解空间,因为在某代找到最优解后,两体交叉和正态变异不能使其解迅速扩展,而多体交叉和 Cauchy 变异则能够使解迅速扩展。如果求得解在整个解空间遍布,这样才具有实际应用意义。

改进前的算法往往需要很长时间才能达到这一要求。就本例而言,改进前的算法需要运行到30代以后才能达到此要求,而改进后的算法只需10代。文[8]指出:模式定理对多个个体参与交叉的进化算法仍然成立,并且通过调整参与个体交叉的数目有利于快速求得(近似)最优解,并建议用三体或四体交叉。文章采用的是四体交叉。文[9]指出用 Cauchy 变异对大空间有利,并用仿真结果加以证实。

结论 SPEA 是一种常见的多目标优化算法,具有设置参数少、解在空间分布均匀等优点。本文引入多点交叉和 Cauchy 变异对 SPEA 算法的收敛速度进行了改进,提高了算法的计算效率。本文还分析了 SPEA 改进算法的收敛性。在实际应用中,多目标优化问题是非常普遍的问题,而且往往是大空间的搜索,因此文章对算法收敛速度的改进具有重要意义。文中给出的仿真算例也证实了改进算法的有效性。

参考文献

- 1 Zitzer E, Thielier L. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257~271
- 2 Goldberg D E. Genetic Algorithm in search, optimization and machine learning. Addison- Wesley Publishing Company, Inc. New York, England, Bonn, Toky, 1 Edition 1989
- 3 Zitzer E. Evolutionary Algorithms for Multiobjective Evolutionary Optimization: Method and Application: [PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH)]. Zurich, Switzerland, Nov. 1999
- 4 Qi Xiaofeng, Palmier F. Theoretical Analysis of Evolutionary Algorithms With an Infinite Population Size in Continuous Space Part II Analysis of Diversification Role of Crossover. IEEE Trans. on Neural Networks, 1994, 5(1)
- 5 Rudolph G. Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms. IEEE Trans. on Neural Networks, 1994, 5(1)
- 6 Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched pareto genetic algorithm for Multiobjective optimization. In: Proc. of the 1st IEEE Conf. on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence (ICEC94), 1, 1994
- 7 Leung Kwong-Sak, Duan Qi-Hong, Xu Zong-ben, et al. A New Model of Simulated Evolutionary Computation: Convergence Analysis and Specifications. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2003, 5(1)
- 8 朱学军, 陈彤, 薛量, 李峻. 多个体参与交叉的 Pareto 多目标遗传算法. 电子学报, 2000(1)
- 9 Yao Xin, Liu Yong, Lin Guangming. Evolutionary Programming Made Faster. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 1999, 1(2)