混沌时间序列分析中的相空间重构技术综述

陈 铿 韩伯棠

（北京理工大学管理与经济学院 北京100081）

摘 要 本文对混沌时间序列分析中的相空间重构技术进行了分析和评价，总结了国内外学者的研究进展，并展望了未来的研究方向。

关键词 混沌时间序列，相空间重构，嵌入维数，时间延迟

A Survey of State Space Reconstruction of Chaotic Time Series Analysis

CHEN Keng HAN Bo-Tang

(School of Management & Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract The technology of state space reconstruction used in chaotic time series analysis is remarked in this paper, and progress of the research is summarized, also the research of future is prospected.

Keywords Chaotic time series, State space reconstruction, Embedding dimension, Time delay

1 引言

混沌时间序列分析是非线性时间序列分析的最新发展，它是在近20年来非线性科学蓬勃发展的基础上，将非线性动力学即混沌理论和分形理论应用于非线性时间序列的研究上所产生的新的分析方法。混沌时间序列分析方法的出现，极大地扩展和加深了人们对非线性时间序列的认识与把握，目前已广泛用于网络流量分析、保密通信、生物医学、大气科学、经济和金融等各个方面[1~18]。

混沌时间序列的研究是以 Takens 嵌入定理[19]为基础的，即：对于一无限长、无噪声的 d 维混沌吸引子的标量时间序列$\{x(t)\}$，我们总可以在拓扑不变的意义下找到一个 n 维的嵌入相空间，只要 $m\geqslant 2d+1$。

Takens 定理保证了我们可以从一维混沌时间序列中重构一个与其原动力系统在拓扑意义下等价的相空间，从而把握混沌时间序列的性质与规律。混沌时间序列的判定、分析与预测都是在这个重构的相空间中进行的，因此，相空间的重构是混沌时间序列研究的关键。

2 相空间重构

混沌时间序列重构相空间的工作始于 Packard 等[20]，他们提出了由混沌时间序列重构相空间的两种方法：导数重构法和坐标延迟重构法。并采用导数重构法重构了 Rossler 吸引子，求出了 Lyapunov 指数。Grassberger 和 Procaccia 则提出了关联积分的概念及计算公式，采用时间延迟法，从一维时间序列中重构了 Henon 映射、Lorenz 方程、Logistic 方程和 Kaplan-York 映射等典型混沌系统，并求取了这些混沌系统的分数维。G-P 算法的提出，是混沌时间序列研究中的一个极其重要的突破，它使得对混沌时间序列的研究不仅仅局限在已知的混沌系统，如 Rossler 系统、Henon 映射和 Lorenz 系统等，而是任何实测混沌时间序列。从而为混沌时间序列的研究进入实际应用开辟了一条道路。

尽管从原理上讲，导数重构和坐标延迟重构都可以用来进行相空间重构，但对于实际应用而言，我们通常是不知道混沌时间序列的任何先验信息的，何况从数值计算的角度看，数值微分是一个对误差很敏感的计算问题，因此，从混沌时间序列重构相空间普遍都采用坐标延迟相空间重构法。

Gibson 等[22]给出了三种不同重建方法即坐标延迟，导数法和 SVD 法之间的关系：在一定条件下，SVD 法是导数法的旋转，而导数法则又是坐标延迟法的旋转。

坐标延迟法的本质是通过一维时间序列$\{\{x(t)\}\}$的不同时间延迟$0,\tau,2\tau,\cdots,(m-1)\tau$来构造 m 维相空间矢量：

$$X_i(t)=\{x(t+i),x(t+i+\tau),x(t+i+2\tau),\cdots,x(t+i+(m-1)\tau)\}$$

其中，$i=0,1,\cdots,m-1$。

坐标延迟相空间重构技术有两个关键的地方，即嵌入维数 m 和时间延迟 τ 的确定。Takens 定理中，对于理想的无限长和无噪声的一维时间序列，嵌入维数 m 和时间延迟 τ 可以取任意值，但实际应用中的时间序列都是有限长度且存在噪声，嵌入维数 m 与时间延迟 τ 是不能随意取值的，必须精心确定，否则会极大地影响重构的相空间的质量。

3 嵌入维数 m 的确定

嵌入维数 m 的确定中，关联维数的计算是非常重要的。根据 Takens 定理，相空间重构的充分条件是：$m\geqslant 2d+1$，其中 d 为混沌吸引子所在的相空间的拓扑维数。Sauer 等[23]将 Takens 定理中的充分条件推广到 $m>2D_F$，其中 D_F 为混沌吸引子的分数维。在没有任何有关混沌时间序列的原相空间的先验信息的情况下，$2D_F$ 也是我们确定嵌入维数 m 的下界。

G-P 算法是计算关联维数的经典算法，其计算的具体步骤可描述如下：

(1)给定不同的小正数 r。

(2)计算对应的相关积分

陈 铿 博士生，讲师，研究方向：混沌时间序列，小波分析。韩伯棠 教授，博士导师，研究方向：运筹学与控制论，复杂系统的建模、仿真与决策。

$$C(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}H(r-\|X_i-X_j\|)$$

其中，$\|X_i-X_j\|$为相点 X_i 与 X_j 间的距离，H 为 Heaviside 函数，N 为观测点数。

(3)对$\ln C(r)$与$\ln r$ 的关系图进行线性回归，其斜率即为关联维数。

G-P 算法中，相关积分 $C(r)$的计算是比较耗费机时的，后来的研究者从两个角度对算法进行了改进，一是真正需要参与相关计算的点数，二是欧氏距离的选定[24~27]。

3.1 虚假最近邻点法(False Nearest Neighbors，FNN)

从几何的观点看，混沌时间序列是高维相空间混沌运动的轨迹在一维空间一时间上的投影，在这个投影的过程中，混沌运动的轨迹会扭曲。高维相空间中并不相邻的两点投影在一维空间-时间上时却会成为相邻的两点，即虚假邻点，这就是混沌时间序列呈现出无规律的原因所在。重建相空间，其实就是从混沌时间序列中恢复混沌运动的轨迹，不难想到，随着嵌入维数的增大，混沌运动的轨道将会逐渐打开、无扭曲、缠绕，虚假邻点也被剔除，从而混沌运动的轨迹得到恢复，这个思想就是 FNN 的出发点[28]。

d 维相空间中，每一个相点矢量 $X(k)=[x(k),x(k+T),\cdots,x(k+(d-1)T)]$，都有一个某距离内的最近邻点 $X^{NN}(k)$，其距离为 $R_d(k)=\|X(k)-X^{NN}(k)\|$，$R_d(k)$应该是个很小的量，对于 N 个数据，其量值应大约在$1/N^{1/d}$左右。

当相空间的维数从 d 维增加到 $d+1$维时，这两个相点的距离就会发生变化，而成为 $R_{d+1}(k)$且 $R_{d+1}^2(k)=R_d^2(k)+\|X(k+Td)-X^{NN}(k+Td)\|^2$。

若 $R_{d+1}(k)$比 $R_d(k)$大很多，可以认为这是由于高维混沌吸引子中两个不相邻的点在投影到低维轨道上时变成相邻的两点所造成的，因此这样的邻点是虚假的。令

$$S_n=\frac{\|X(k+Td)-X^{NN}(k+Td)\|}{R_d(k)}$$

若 $S_n>R_T$，则 $X^{NN}(k)$是 $X(k)$的虚假最近邻点，阈值 R_T 可在[10,50]之间选取。

对含噪的有限长度数据，则可这样判断，若：$R_{d+1}(k)/R_A\geqslant 2$则 $X^{NN}(k)$是 $X(k)$的虚假最近邻点。其中，$R_A=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[x(k)-\bar{x}]^2$，$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x(k)$。

对实测时间序列，从嵌入维数的最小起始值开始，计算虚假最近邻点的比例，然后增加 d，直到虚假最近邻点的比例小于5%或者虚假最近邻点不再随着 d 的增加而减少时，可以认为混沌吸引子已完全打开，此时的 d 即为嵌入维数，在相空间嵌入维数的确定方面，FNN 被认为或许是最有效的计算嵌入维的方法[29]。

FNN 的计算结果与 τ 有关，给定不同的 τ 值，会得出不同的最小嵌入维数，Cao[30]考虑到这点，采用与 FNN 类似的思路，对于时间序列 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 及相空间矢量

$$x_i(d)=(x_i,x_{i+\tau},\cdots,x_{i+(d-1)\tau}),i=1,2,\cdots,N-(d-1)\tau$$

定义

$$a(i,d)=\frac{\|x_i(d+1)-x_{n(i,d)}(d+1)\|}{\|x_i(d)-x_{n(i,d)}(d)\|}\quad i=1,2,\cdots,N-\tau$$

$a(i,d)$的均值为 $E(d)=\frac{1}{N-d\tau}\sum_{i=1}^{N-d\tau}a(i,d)$

则有 $E_1(d)=E(d+1)/E(d)$

若 $E_1(d)$自某个 d_0开始停止变化，则 d_0+1即为所寻找的最小嵌入维数。

3.2 奇异值分解(Singular Value Decomposition，SVD)

Broomhead 和 King 提出的 SVD 法[31]，也称主成分分析法(Principal Component Analysis，PCA)，在本质上不同于坐标延迟法，它是直接从时间序列中求取嵌入维。

对混沌时间序列 $x(n)$计算其 $d_E\times d_E$ 协方差矩阵

$$COV=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[x(n)-x_{av}][x(n)-x_{av}]^T$$

其中，$x_{av}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x(n)$

对协方差矩阵 COV 计算出其特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,d_E)$并将 λ_i 按大小进行排列，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{d_E}$，并绘出特征谱图。对实测数据而言，由于噪声的存在，会使估算出的嵌入维数增大，不妨假定估算出的嵌入维数为 d_E，而真正的维数应该是 d_N，显然，$d_E>d_N$，且 d_E-d_N 这部分是由噪声所引起的。从特征谱图上去掉代表其低频部分的噪声，则剩下的前 d_N 个特征值就应该是混沌数据所产生的，因而用此方法就可以估算出嵌入维数。不难看出，SVD 方法具有一定的抗噪性。

SVD 本质上是一个线性方法，将一个线性方法用于非线性系统这一点引起了争议[32]，Min Lei 等基于辛几何提出了一种估算嵌入维的方法[33]，这种方法从形式上类似于 SVD，但本质上是一种非线性方法，其效果在许多方面都要优于 SVD 法。

4 时间延迟 τ 的确定

时间延迟 τ 若太小，相空间矢量 $X_t=\{x(t),x(t+\tau),x(t+2\tau),\cdots,x(t+(m-1)\tau)\}$中的任意两分量 $x(t+j\tau)$和 $x(t+(j+1)\tau)$在数值上非常接近，以至于无法区分，从而无法提供两个独立的坐标分量；但若时间延迟 τ 太大的话，则两坐标分量在统计意义上又是完全独立的，混沌吸引子的轨迹在两方向上的投影毫无相关性可言。显然，这需要用一定的方法来确定一个合适的 τ 值。

4.1 自相关函数法

判断 $x(t+j\tau)$和 $x(t+(j+1)\tau)$的相关性的最自然的方法就是通过计算其自相关函数 $C_l(\tau)$来实现，定义：

$$C_l(\tau)=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x(i+\tau)-\bar{x}][x(i)-\bar{x}]}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x(i)-\bar{x}]^2}$$

其中，$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x(i)$

观察时间延迟曲线，取 $C_l(\tau)$第一个下降通过零点的 τ 为所需的时间延迟，但研究表明，似乎取 $C_l(\tau)$下降到$1/e$ 的 τ 为最优时间延迟更为合适[34]。

但采用自相关函数选取的时间延迟 τ 只是使坐标分量 $x(t)$和 $x(t+i\tau)$彼此线性不相关，因为 $C_l(\tau)$的定义实际上是可以从分量 $x(t+i\tau)$和 $x(t)$存在线性关系的假设中推导出的，即设：$x(t+i\tau)-\bar{x}=C_l(\tau)[x(t)-\bar{x}]$，按最小二乘原则对其误差平方和：

$$Q=\sum_{t=1}^{N}(x(t+i\tau)-\bar{x}-C_l(\tau)(x(t)-\bar{x}))^2$$

求极小的结果。

4.2 互信息法

自相关本质上是一个线性的概念，适合判断线性相关性，而混沌系统是一个非线性系统，因此 Fraser 和 Swinney[35]提

出了用互信息来判断系统的非线性相关性。

考虑两离散信息序列$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$和$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$构成的系统S和Q。则由信息论，从两系统测量中所获得的平均信息量，即信息熵分别为：

$$H(S)=-\sum_{i=1}^{n}P_s(s_i)\log_2 P_s(s_i)$$

$$H(Q)=-\sum_{i=1}^{m}P_q(q_j)\log_2 P_q(q_j)$$

其中，$P_s(s_i)$和$P_q(q_j)$分别为S和Q中事件s_i和q_j的概率。

在给定S的情况下，我们能获取的系统Q的信息，即系统S和Q的互信息为：

$$I(Q,S)=H(Q)-H(Q|S)$$

而 $$H(Q|s_i)=-\sum_j[P_{sq}(s_i,q_j)/P_s(s_i)]\log[P_{sq}(s_i,q_j)/P_s(s_i)]$$

故 $$I(Q,S)=\sum_i\sum_j P_{sq}(s_i,q_j)\log_2\left[\frac{P_{sq}(s_i,q_j)}{P_s(s_i)P_q(q_j)}\right]$$

其中，$P_{sq}(s_i,q_j)$为事件s_i和事件q_j的联合分布概率。

我们定义$[s,q]=[x(t),x(t+\tau)]$，即s代表时间序列$x(t)$，q为其延迟时间为τ的时间序列$x(t+\tau)$，则$I(Q,S)$显然是与时间延迟τ有关的函数，不妨记为$I(\tau)$。$I(\tau)$的大小代表了在已知系统S即$x(t)$的情况下，系统Q也就是$x(t+\tau)$的确定性的大小。$I(\tau)=0$，表示$x(t+\tau)$完全不可预测，亦即$x(t)$与$x(t+\tau)$完全不相关；而$I(\tau)$的极小值，则表示$x(t)$与$x(t+\tau)$是最大可能的不相关。Fraser 和 Swinney 在文中建议采用$I(\tau)$的第一个极小值点作为最优时间延迟。

互信息法中的关键问题是联合分布概率$P_{sq}(s_i,q_j)$的计算，Fraser 和 Swinney 采用的是等概率递推的方法，其划分与计算很复杂，杨志安等提出了等间距格子法，其计算相对简单[36]。

互信息法提出后，尽管其划分和计算复杂，但由于可以判断非线性相关性，因此在最优时间延迟的估算中被广为采用[37~43]，在实际应用中，FNN+互信息已成相空间重构中确定嵌入维数和时间延迟的普遍作法。

需要指出的是，互信息法尽管是为确定相空间重构中的最优时延而提出的，但它由于可以度量非线性相关性，因此，在判定两非线性序列的相关性方面得到了广泛的应用[44~45]，Prechard 和 Theiler 在此基础上将其进一步推广为广义关联积分[46~47]。

4.3 平均位移法(Average Displacement, AD)

与前面不同的是，Rosenstein 等[48]提出的 AD 法是从几何的角度来确定时间延迟的，即：若时间延迟τ不够的话，则按此延迟时间重构的混沌吸引子会在相空间中被压缩在主对角线一带，而随着时间延迟的增大，吸引子则会逐渐展开。

对时间序列$\{x(t)\}$按时间延迟τ进行相空间重构后，相空间中的相邻两相点X_i^0和X_i^τ间的平均位移$S_m(\tau)$可以定义如下：

$$S_m(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|X_i^\tau-X_i^0\|$$

若嵌入维数m已经确定，则有：

$$S_m(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{m-1}(x_{i+j\tau}-x_i)^2}$$

$S_m(\tau)$随着时间延迟τ的增加，会逐渐从线性增加趋于饱和，其线性区的末端所对应的τ值即为最佳时间延迟，Rosenstein 等在文中建议取$S_m(\tau)$曲线的斜率减少到小于初值的40%时的τ为最佳延迟时间值。

5 其它

相空间重构技术还有很多其它方法，如 Buzug 和 Pfister 提出的填充因子法(Fill factor)[49,50]，Liebert 提出的摆动乘积法(Wavering product)[51]，Gibson 等提出的小时窗法(Small-window solution)[22]等，我们这里仅是选择了有代表性、应用比较广泛的方法进行评述。

此外，在嵌入维数m和时间延迟τ的确定上有两种观点，一种认为m和τ可以独立确定，在估算m时假定τ已确定，反之亦然。另外一种则认为m和τ不能独立，即$\tau_w=(m-1)\tau$是作为一个整体在相空间的重构中起作用的[52~56]，我们认为这两者其实并没有本质的差别，关键可能是实测数据对具体的方法在确定时间延迟或嵌入维数的时候，参数的敏感程度不一样而已，这也是为什么各种方法都可以对某个具体的实际数据取得较好的效果的原因。对于实际应用而言，重要的是针对具体的数据，选择合适的算法和恰当的参数。

结束语与展望 相空间重构技术的核心是嵌入维数m和时间延迟τ的确定，目前并无一种通用的适合各种混沌时间序列的算法，文中所提及的确定嵌入维数m和时间延迟τ的各种方法都在不同程度上带有一定的主观性，其原因在于：我们没有任何有关混沌时间序列的相空间的先验信息，因此缺乏一个明确的目标来度量相空间重建的效果，从而各种方法将会继续存在，并且不断会有新的方法从其它学科领域引入。实际上，神经网络技术和小波分析正在被引进相空间重构来确定嵌入维数m和时间延迟τ[57~63]，未来的相空间重构技术的精度与置信水平无疑会不断得到提高。

参考文献

1 张锦钢，李辉，徐佩霞. 网络流量的混沌特性研究[J]. 应用科学学报，2000，20(4)：413～415

2 刘东林，帅典勋. 网络流量模型的非线性特征量的提取及分析[J]. 电子学报，2003，31(12)：1866～1869

3 Vaidya P G，Angadi S. Decoding chaotic cryptography without access to the superkey [J]. Chaos，Solitons and Fractals，2003，17：379～386

4 王兴元，顾树生. 心电动态生理及病理信息的非线性动力学研究[J]. 中国生物医学工程学报，2000，19(4)：397～403

5 Jeong Jaeseung，Kim Dai-Jin，Chae Jeong-Ho，et al. Nonlinear analysis of the EEG of schizophrenics with optimal embedding dimension [J]. Medical Engineering &Physics，1998，20：669～676

6 林振山. 非线性科学及其在地学中的应用 [M]. 北京：气象出版社，2003

7 洪时中. 非线性时间序列分析的最新进展及其在地球科学中的应用前景 [A]. 北京：地球科学进展，1999，14(6)：559～565

8 Diks Cees，Mudelsee Manfred. Redundancies in the Earth's climatological time Series [J]. Phys. Lett. A，2000，275(5-6)：407～414

9 Cao Liangyue，Soofi A S. Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates [J]. International Journal of Forecasting，1999，15：421～430

10 Agnon Yehuda，Golan Amos，Shearer Matthew. Nonparametric，nonlinear，short-term forecasting：theory and evidence for nonlinearities in the commodity markets [J]. Economics Lett.，1999，65：293～299

11 Chiang T C. Time Series Dynamics of Short-Time Interest：Evidence from Eurocurrency markets [J]. Journal of Intl. Financial Markets，Institution and Money，1997(7)：201～220

12 Fernanda Strozzi. Application of Nonlinear Time Series analysis Technology to High Frequency Currency Exchange Data. Physica A：Statistical Mechanics and its Applications，2002，312(3-4)：

520～538

13 Hsieh D A. Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets, 1990. http://www.chaos.gb.net/

14 郁俊莉,王其文,韩文秀. 经济时间序列相空间重构与混沌特性判定研究 [J]. 武汉大学学报(理学版),2004,50(1):33～37

15 Kanz H, Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis [M]. Cambridge :Cambridge University Press,1997

16 Bradley E. Time-Series Analysis in Intelligent Data Analysis: An Introduction [A]. M. Berthold,D. Hand, eds. Springer Verlag, 1999

17 Stark J,Street G. Nonlinear Dynamics Ⅰ, Ⅱ: Analysis of Time Series in Modeling Uncertainty. University of Cambridge Programme for Industry,1994

18 Akay M. Nonlinear Biomedical Signal Processing. Dynamic Analysis and Modeling [M], Wiley-IEEE Press,2000

19 Takens F. Dynamical systems and turbulence [A]. D. A. Rand and L. S. Young, eds. Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer,1981,898:366～381

20 Packard N H,Crutchfield J P,Farmer J D,et al. Geometry from a Time Series [J]. Phys. Rev. Lett., 1980,43(9):712～715

21 Grassberger P,Procacia I. Measuring the strangeness of strange attractors [J]. Physica D,1983,9:189～208

22 Gibson J F,Farmer J, Casdagli M,et al. An analytic approach to practical state space reconstruction [J]. Physica D, 1992,57:1～30

23 Sauer T, Yorke, Casdagli M. Embedology [J]. Journal of Statistical Physics, 1991,65:579～616

24 郑会永,刘华强,戴冠中. 时间序列分维的改进 GP 算法[J]. 西北工业大学学报, 1998, 16(1):28～32

25 Widman G,Lehnertz K,Jansen P,et al. A fast general purpose algorithm for the computation of auto-and cross-correlation integrals from single channel data [J]. Physica D, 1998,121:65～74

26 赵贵兵,石炎福,段文锋,等. 从混沌时间序列同时计算关联维和 Kolmogorov 熵 [J]. 计算物理,1999,163:309～314

27 Albano A M,Muench J,Schwartz C,et al. Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm [J]. Phys. Rev. A, 1988, 38:3017～3026

28 Kennel,Mathew B,Brown R,Abarbanel H D I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction [J]. Phy Rev A, 1992,45:3403～3411

29 Abarbanel H D I,Brown R,Sidorowich J J,et al. The analysis of observed chaotic data in physical systems [J]. Reviews of Modern Physics, 1993, 65(4):1331～1392

30 Cao Liangyue. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series [J]. Physica D, 1997, 110:43～50

31 Broomhead D,King G. Extracting qualitative dynamics from experimental data [J]. Physica D, 1986,20:217～236

32 Palus M,Dvorak I. Singular-value decomposition in attractor reconstruction: Pitfalls and precautions [J]. Physica D,1992,55: 221～234

33 Lei Min,Wang Zhizhong,Feng Zhengjin. A Method of Embedding dimension estimation based on symplectic geometry [J]. Phys. Lett. A,1994,303:179～189

34 Rosenstein M T,Collins J J, De Luca C J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets [J]. Physica D,1993,65:117～134

35 Fraser A M,Swinney H l. Independent coordinates for strange attractors from mutual information [J]. Phys. Rev. A, 1986, 33: 1134～1140

36 杨志安,王光瑞,陈式刚. 用等间距分格子法计算互信息函数确定延迟时间[J]. 计算物理,1995,12(4):442～448

37 Darbellay G A,Wuertz D. The entropy as a tool for analyzing statistical dependences in financial time series [J]. Physica A, 2000, 287:429～439

38 Jeong J, Gore J C,Peterson B S. Mutual information analysis of the EEG in patients with Alzheimer's disease [J]. Clinical Neurophysiology, 2001,112:872～835

39 赵鸿,柴路,王浩,等. 互信息在时间序列分析中的应用[J]. 1996, 14(1):48～52

40 徐健学, 杨红军,等. 皮层脑电时间序列的相空间重构及非线性特征量的提取 [J]. 物理学报,2002, 51(2):205～213

41 王泽,朱贻盛,李音. 独立量在混沌信号分析中的应用[J]. 电子学报,2002,30(10):1505～1507

42 陈阳. 新的独立性度量及其在混沌信号分析中的应用[J]. 东南大学学报,2003,11(33):13～18

43 Romashchenko A. Extracting the Mutual Information for a Triple of Binary Strings [J]. In:Proc. of The 18th IEEE Annual Conf. on Computational Complexity,2003

44 Tanaka N,Okamoto H,Naito M. Detecting and evaluating intrinsic nonlinearity present in the mutual dependence between two variables [J]. Physica D,2000,147:1～11

45 樊重俊,王浣尘. 度量两个序列非线性相关性的一种方法[J]. 信息与控制,1998,27(3):185～189

46 Prichard D,Theiler J. Generalized Redundancies for time series analysis [J]. Physica D, 1995,84:476～493

47 丁晶,王文圣,赵永龙. 以互信息为基础的广义相关系数[J]. 四川大学学报(工程科学版),2002,34(3):1～5

48 Rosenstein M T,Collins J J,De Luca Carlo J. Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times [J]. Physica D,1994,73:82～98

49 Buzug T,Pfister G. Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global and local dynamical behavior of strange attractors [J]. Phys. Rev. A, 1992, 45:7073～7084

50 Buzug T,Pfister G. Comparison of algorithms calculating optimal parameters for delay time coordinates [J]. Physica D, 1992, 58: 127～137

51 Liebert W, Pawelzik K,Schuster H G. Optimal embeddings of chotic attrctors from topological considerations [J]. Europhys. Lett., 1991,14:521～526

52 Kim H S,Eykholt R,Salas J D. Nonlinear dynamics, delay times, and embedding windows [J]. Physica D,1999,127:48～60

53 Kugiumtzis D. State space reconstruction parameter in the analysis of chotix time series-the role of the time window length [J]. Physica D,1996,95:13～28

54 Kugiumtzis D, Christophersen N. State space reconstruction: Method of delays vs singular spectrum approach:[Research report 236]. Department of informatics, University of Oslo,1997,11

55 Kugiumtzis D, Lillekjendlie B, Christophersen N. Chaotic times series: Part I: Estimation of some invariant properties in state space [J]. Modeling,Identification and Control,1994,15(4):205～224

56 Martinerie J M, Albano A M, Mees A I. Mutual information, strange attractors, and the optimal estimation of dimension [J]. Phys. Rev. A, 1992,45:7058～7064

57 Katayama R,Kaihei,Kuwata,Kajitani Yuji,et al. Embedding dimension estimation of chaotic time series using self-generating radial basis function network [J]. Fuzzy Sets and Systems,1995, 71:311～327

58 Jones A J,Margetts S,Durrant P. Nonlinear modeling and chaotic neural networks. SBRN 2000. 7～14

59 蒋传文,侯志俭,李承军. 求取混沌时间序列嵌入维数的一种神经元网络方法 [J]. 水电能源科学,2000,18(4):12～13

60 陈哲,冯天瑾,张海燕. 基于小波神经网络的混沌时间序列分析与相空间重构 [J]. 计算机研究与发展,2001,38(5):591～596

61 段虞荣,段绍光,曾昭才. 基于径向基函数网络的混沌时间序列分析 [J]. 重庆大学学报(自然科学版),1999,22(6):113～120

62 秦卫阳, 孟光. 采用小波方法计算关联维数 [J]. 机械科学与技术,1999,19(6):925～926

63 何岱海,徐健学,陈永红. 非线性动力学相空间重构中小波变换方法研究 [J]. 振动工程学报,1999,12(1):27～32