直觉模糊集时态逻辑算子及扩展运算性质*)

雷英杰[1,2]　王宝树[1]

(西安电子科技大学计算机学院　西安710071)[1]　(空军工程大学计算机系　陕西三原713800)[2]

摘　要　首先在考察Atanassov直觉模糊集的基本运算的基础上，引入两个典型的作用于直觉模糊集的时态逻辑算子"□(always)"和"◇(sometimes)"，重点研究了直觉模糊集在直觉模糊时态逻辑算子作用下的若干扩展运算及其性质。最后，将这些运算性质归结为一组定理，并给出详细的证明过程。

关键词　模糊集合，直觉模糊集合，时态逻辑算子，直觉模糊逻辑

Properties of Temporal Logic Operators and Extended Operations on Intuitionistic Fuzzy Sets

LEI Ying-Jie[1,2]　WANG Bao-Shu[1]

(School of Computer Science and Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)[1]

(Department of Computer Engineering, Air Force Engineering University, Sanyuan Shaanxi 713800)[2]

Abstract　Two typical temporal logic operators, "□(always)" and "◇(sometimes)", acting on Atanassov Intuitionistic Fuzzy Sets are first introduced on the basis of observing and studying on fundamental operations on IFSs. Then, some extended operations on IFSs are exposed under the actions of intuitionistic fuzzy temporal logic operators with an emphasis on investigating their operational properties. Finally, the operational properties are generalized into a set of theorems with the detailed courses of theorem proving.

Keywords　Fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy sets, Temporal logic operators, Intuitionistic fuzzy logic

在语义描述上，经典的康托尔(Cantor)集合论只能描述"非此即彼"的"分明概念"。Zadeh的模糊集理论[1]是对经典集合的有效扩充，可以描述外延不分明的"亦此亦彼"的"模糊概念"。Atanassov提出的直觉模糊集合(Intuitionistic Fuzzy Sets)[2~4]，是对Zadeh模糊集理论最有影响的一种扩充和发展。直觉模糊集(IFS)增加了一个新的属性参数——非隶属度函数，进而还可以描述"非此非彼"的"模糊概念"，更加细腻地刻画客观世界的模糊性本质，因此引起众多学者的关注。

本文首先考察直觉模糊集的基本运算，然后引入两个典型的作用于直觉模糊集的时态逻辑算子，重点研究直觉模糊集上的若干扩展运算及其性质，最后将这些性质归结为定理，并给出详细的证明过程。

1　引言

Atanassov对直觉模糊集给出如下定义：

定义1　直觉模糊集[2]　设X是一个给定论域，则X上的一个直觉模糊集A为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle|x\in X\}$$

其中$\mu_A(x):X\to[0,1]$和$\gamma_A(x):X\to[0,1]$分别代表A的隶属函数$\mu_A(x)$和非隶属函数$\gamma_A(x)$，且对于A上的所有$x\in X$，$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant1$成立。

当论域X为连续空间时，$A=\int_X\langle\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle/x, x\in X$；当$X$为离散空间时，即当$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A=\sum_{i=1}^{n}\langle\mu_A(x_i),\gamma_A(x_i)\rangle/x_i, x_i\in X, i=1,2,\cdots,n$。直觉模糊集$A$有时可以简记作$A=\langle x,\mu_A,\gamma_A\rangle$。显然，每一个一般模糊子集对应于下列直觉模糊子集$A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|x\in X\}$。

对于X中的每一个直觉模糊子集，我们称$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$为$A$中$x$的直觉指数(Intuitionistic Index)，它是x对A的犹豫程度(Hesitancy degree)的一种测度。显然，对于每一个$x\in X$，$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant1$。对于$X$中的每一个一般模糊子集$A$，$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-[1-\mu_A(x)]=0, \forall x\in X$。

定义2　直觉模糊集基本运算[2~4]　设A和B是给定论域X上的直觉模糊子集，则有

(1)$A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle|\forall x\in X\}$

(2)$A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle|\forall x\in X\}$

(3)$A^c=\{\langle x,\gamma_A(x),\mu_A(x)\rangle|x\in X\}$

(4)$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in X,[\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x0\wedge\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x)]$

(5)$A\subset B\Leftrightarrow\forall x\in X,[\mu_A(x)<\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)>\gamma_B(x)]$

(6)$A=B\Leftrightarrow\forall x\in X,[\mu_A(x)=\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)=\gamma_B(x)]$

2　直觉模糊集扩展运算

在此，引入时态逻辑算子"□(always)"和"◇(sometimes)"，"□A"表示"永远有A"；"◇A"表示"有时有A"。

定义3(直觉模糊集扩展运算)　设A和B是给定论域X上的直觉模糊子集，则有[5~7]

*)基金项目：国防科技预研基金(51406030104DZ0120)，国家教育部高等学校骨干教师资助计划项目(GG-810-90039-1003)。**雷英杰**　博士，教授，博士生导师，研究方向：智能信息处理与智能系统、智能决策等。**王宝树**　教授，博士生导师，研究方向：智能信息处理与模式识别、智能控制等。

(1) $A+B=\{\langle x,\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\gamma_A(x)\cdot\gamma_B(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$

(2) $A\cdot B=\{\langle x,\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\gamma_A(x)+\gamma_B(x)-\gamma_A(x)\cdot\gamma_B(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$

(3) $\Box A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$

(4) $\Diamond A=\{\langle x,1-\gamma_A(x),\gamma_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$

由上述定义(2)可以推知，

$A^2=A\cdot A=\{\langle x,[\mu_A(x)]^2,1-(1-\gamma_A(x))^2\rangle|\forall\ x\in X\}$

$A^3=A^2\cdot A=\{\langle x,[\mu_A(x)]^3,1-[1-\gamma_A(x)]^3\rangle|\forall\ x\in X\}$

一般来说，对于正整数 n，有

(5) $A^n=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$

很容易验证，式子 $0\leqslant[\mu_A(x)]^n+1-[1-\gamma_A(x)]^n\leqslant1$ 对于任意正实数 n 成立，故上面所定义的直觉模糊子集 A^n 对于任意正实数 n 均成立。

对于任意正实数 n，定义 n 与直觉模糊集 A 的乘积 nA 为

(6) $nA=\{\langle x,\mu_{nA}(x),\gamma_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$

式中 $\mu_{nA}(x)=1-[1-\mu_A(x)]^n,\gamma_{nA}(X)=[\gamma_A(x)]^n$，即

$nA=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^n,[\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$

3 直觉模糊时态逻辑算子及运算性质

作用于直觉模糊子集上的时态逻辑算子与直觉模糊子集扩展运算之性质，可以概括为以下几个定理。

定理1 设 A 是给定论域 X 上的直觉模糊子集，n 为一正实数，则有

(a) $\Box A^n=(\Box A)^n$

(b) $\Diamond A^n=(\Diamond A)^n$

(c) 若 $\pi_A(x)=0$，则 $\pi_{A^n}(x)=0$

(d) $A^m\subseteq A^n$，其中 m 和 n 是正实数且 $m\geqslant n$

(e) 若 A 是完全直觉的，则 A^n 也是完全直觉的。

证明：下面给出证明过程。

(a) $\Box A^n=\Box\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-(1-\mu_A(x))]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=(\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\})^n$
$=(\Box A)^n$

(b) $\Diamond A^n=\Diamond\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,[1-\gamma_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,1-\gamma_A(x),\gamma_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}^n$
$=(\Diamond A)^n$

(c) $\pi_A(x)=0\Rightarrow\mu_A(x)+\gamma_A(x)=1$
$A^n=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\Leftrightarrow A^n=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[\mu_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\Leftrightarrow\pi_{A^n}(x)=1-[\mu_A(x)]^n-\{1-[\mu_A(x)]^n\}=0.$

(d) $A^m=\{\langle x,[\mu_A(x)]^m,1-[1-\gamma_A(x)]^m\rangle|\forall\ x\in X\}$
$A^n=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\because m\geqslant n$ 且 $0\leqslant\mu_A(x)\leqslant1,0\leqslant\gamma_A(x)\leqslant1$
$\therefore[\mu_A(x)]^m\leqslant[\mu_A(x)]^n$ 且 $1-[1-\gamma_A(x)]^m\geqslant1-[1-\gamma_A(x)]^n$
$\Leftrightarrow A^m\subseteq A^n$

(e) 由定义可直接得知。

定理2 设 A 是给定论域 X 上的直觉模糊子集，n 为一正实数，则有

(a) $\Box nA=n\Box A$

(b) $\Diamond nA=n\Diamond A$

(c) 若 $\pi_A(x)=0$，则 $\pi_{nA}(x)=0$

(d) $mA\subseteq nA$，其中 m 和 n 是正实数且 $m\leqslant n$。

(e) 若 A 是完全直觉的，则 nA 也是完全直觉的。

证明：下面给出详细的证明过程。

(a) $\Box nA=\Box\{\langle x,\mu_{nA}(x),\gamma_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,\mu_{nA}(x),1-\mu_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^n,[1-\mu_A(x)]^n\rangle\forall\ x\in X\}$
$=n\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=n\Box\{\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=n\Box A$

(b) $\Diamond nA=\Diamond\{\langle x,\mu_{nA}(x),\gamma_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,1-\gamma_{nA}(x),\gamma_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,1-[\gamma_A(x)]^n,[\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=n\{\langle x,1-\gamma_A(x),\gamma_A(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=n\Diamond A$

(c) $\pi_A(x)=0\Rightarrow\mu_A(x)+\gamma_A(x)=1$
$nA=\{\langle X,\mu_{nA}(x),\gamma_{nA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\Leftrightarrow nA=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^n,[\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\Leftrightarrow\pi_{nA}(x)=1-\{1-[1-\mu_A(x)]^n\}-[r_A(x)]^n$
$\Leftrightarrow\pi_{nA}(x)=[1-\mu_A(x)]^n-[1-\mu_A(x)]^n$
$\Leftrightarrow\pi_{nA}(x)=0$

(d) $mA=\{\langle x,\mu_{mA}(x),\gamma_{mA}(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\Leftrightarrow mA=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^m,[\gamma_A(x)]^m\rangle|\forall\ x\in X\}$
$nA=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^n,[\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\because m\leqslant n$ 且 $0\leqslant1-\mu_A(x)\leqslant1,0\leqslant\gamma_A(x)\leqslant1$
$\therefore 1-[1-\mu_A(x)]^m\leqslant1-[1-\mu_A(x)]^n$ 且 $[\gamma_A(x)]^m\geqslant[\gamma_A(x)]^n$
$\Leftrightarrow mA\subseteq nA$

(e) 由定义可直接得知。

定理3 设 A 和 B 是给定论域 X 上的直觉模糊子集，n 为一正实数，则有

(a) 若 $A\subseteq B$，则 $A^n\subseteq B^n$　(b) 若 $A\subseteq B$，则 $nA\subseteq nB$

(c) $(A\cap B)^n=A^n\cap B^n$　(d) $(A\cup B)^n=A^n\cup B^n$

(e) $n(A\cap B)=nA\cap nB$　(f) $n(A\cup B)=nA\cup nB$

证明：下面给出(a)，(b)，(c)，(f)的证明过程，其余证明类似。

(a) $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\ x\in X,[\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x)]$
$A^n=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n,1-[1-\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$B^n=\{\langle x,[\mu_B(x)]^n,1-[1-\gamma_B(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\because[\mu_A(x)]^n\leqslant[\mu_B(x)]^n$ 且 $1-[1-\gamma_A(x)]^n\geqslant1-[1-\mu_B(x)]^n$
$\therefore A^n\subseteq B^n$，即 $A\subseteq B\Rightarrow A^n\subseteq B^n$.

(b) $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\ x\in X,[\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x)]$
$nA=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)]^n,[\gamma_A(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$nB=\{\langle x,1-[1-\mu_B(x)]^n,[\gamma_B(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$\because 1-[1-\mu_A(x)]^n\leqslant1-[1-\mu_B(x)]^n$ 且 $[\gamma_A(x)]^n\geqslant[\mu_B(x)]^n$
$\therefore nA\subseteq nB$，即 $A\subseteq B\Rightarrow nA\subseteq nB$.

(c) $A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$(A\cap B)^n=\{\langle x,[\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)]^n,1-[1-\gamma_A(X)\vee\gamma_B(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,[\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)]^n,1-[1-(1-\gamma_A(x))\wedge(1-\gamma_B(x))]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,[\mu_A(x)]^n\wedge[\mu_B(x)]^n,[1-(1-\gamma_A(x))^n]\vee[1-(1-\gamma_B(x))^n]\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=A^n\cap B^n.$

(f) $A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle|\forall\ x\in X\}$
$n(A\cup B)=\{\langle x,1-[1-\mu_A(x)\vee\mu_B(x)]^n,[\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,1-[(1-\mu_A(x))\wedge(1-\mu_B(x))]^n,[\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=\{\langle x,[1-(1-\mu_A(x))^n]\vee[1-(1-\mu_B(x))^n],[\gamma_A(x)]^n\wedge[\gamma_B(X)]^n\rangle|\forall\ x\in X\}$
$=nA\cup nB.$

结论 Zadeh 模糊集理论及应用，特别是在知识处理中的应用虽然也在进一步发展，但已趋成熟[7]，而 Atanassov 直觉模糊集理论用于知识处理领域，尚正在发展之中，且其数学描述较之 Zadeh 模糊集理论更加符合客观世界模糊对象的本质，因而形成新的研究热点。从已经发表的文献来看，国内仅少数学者对直觉模糊开展研究，且多局限于纯数学范畴，在知

(下转第205页)

(三)挖掘"中心知识":即产生一个基于距离的分类结果;

(四)产生"浮动域"和"正确度因子":给定一组 Q 和 *min_correctness* 将会产生对应的"浮动域"和"正确度"因子;

(五)重复(二)~(四)步。

4.2 实验结果

在此,我们列出了进行上述实验的部分结果,表1、表2、表3分别显示了五次不同抽样的结果。

表1 第一次随机抽样结果 (n=201,λ=0.8)

经验系数 Q	0.6	0.8	0.9	0.98
中心知识 $K(X)$	6类	6类	6类	6类
浮动域 $E(X)$	6类	6类	6类	6类
最小正确度 *min_correctness*	0.5	0.5	0.5	0.5
实际正确度 C	(0.60, 0.65,1,1, 1,0.5)	(0.60, 0.68,0.93, 1,1,0.5)	(0.60, 0.68,0.93, 1,1,0.5)	(0.60, 0.68,0.93, 1,1,0.5)

表2 第二次随机抽样结果 (n=158,λ=0.8)

经验系数 Q	0.6	0.8	0.9	0.98
中心知识 $K(X)$	6类	6类	6类	6类
浮动域 $E(X)$	4类	4类	4类	4类
最小正确度 *min_correctness*	0.66	0.66	0.66	0.66
实际正确度 C	(0.87, 0.87,0.67, 1,1,1)	(0.87, 0.87,0.67, 1,1,1)	(0.87, 0.87,0.67, 1,1,1)	(0.87, 0.87,0.67, 1,1,1)

表3 第三次随机抽样结果 (n=99,λ=0.8)

经验系数 Q	0.6	0.8	0.9	0.98
中心知识 $K(X)$	4类	4类	4类	4类
浮动域 $E(X)$	7类	7类	7类	7类
最小正确度 *min_correctness*	0.6	0.6	0.6	0.6
实际正确度 C	(0.61,1, 0.85,1)	(0.61,1, 0.85,1)	(0.61,1, 0.85,1)	(0.61,1, 0.85,1)

说明:n 表示抽样的样本个数;λ 表示聚类的 λ 截集水平,λ 取不同值时会对整个分类以及"部分重复性模型"产生非常大的影响,但是,在这里我们仅讨论 λ 取定值(0.8)时"部分重复性模型"的变化情况。

结论 文章讨论了一种软件层次的数据挖掘方法:首先收集不同的软件系统,然后从中抽取特征来标示它们,最后用聚类的方法将它们归类。目前,对软件数据进行处理是软件工程学目前研究的热点和难点,本文试图将数据挖掘的技术和方法应用于软件工程,并从中寻找有用的知识。这一探索对于全面、深入进行软件数据挖掘的研究提供了有益的思路和可借鉴的方法。大量仿真实例表明,这种软件层次的数据挖掘方法对于软件代价预测、复杂度评估是非常有效的。

参考文献

1 Paulk M C. Capability Maturity Model Version1. 1[J]. IEEE Software, 10 4, July 1993

2 Boehm B. Software Engineering Economics[J]. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1981

3 Zhang C Q, Zhang S C. Association Rule Mining Models and Algorithms[M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002

4 Zhang S C, Zhang C Q. Discovering Causality in Large Databases [J]. Applied Artificial Intelligence, 2002

5 Feldman R, Hirsh R. Finding Associations in Collections of text. Machine Learning and Data Mining: Methods and Applications [M]. John Wiley Sons, 1998. 223~240

6 Salton G. Automatic Text Processing[M]. Addison-Wesley, 1989

7 Za O R, Li Z N, Chiang J Y, Chee S. Multimedia-miner: A System Prototype for Multimedia Date Mining[C]. ACM-SIGMOD Conf. On Management of Data, 1998. 581~583

8 Han J, Dong G, Yin Y. Efficient Mining of Partial Periodic Patterns in Time Series Database[C]. In: proc. ACM-SIGMOD Int. Conf. Management of Data, 1997. 553~556

9 Bettini C, Wang X S, Jajodia S. Mining Temporal Relationships with Multiple Granularities in Time Sequences[J]. Data Engineering Bulletin, 1998, 21: 32~38

10 Martin T, McClure C. Software Maintenance: The Problem and Its Solutions[M]. Prentice-Hall, Inc., 1993

(上接第181页)

识处理领域的研究尚处于起步阶段。

本文的主要工作是在考察直觉模糊集基本运算的基础上,引入两个典型的作用于直觉模糊集的时态逻辑算子,研究了直觉模糊集上的若干扩展运算及其性质,将这些性质归结为一组定理,并给出详细的证明过程,从而进一步夯实直觉模糊时态逻辑算子的理论基础,深化了直觉模糊集理论在知识处理领域中的应用研究。

参考文献

1 Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8 (3): 338~353

2 Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1) : 87~96

3 Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (1) : 37~46

4 Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61 (1) : 137~142

5 Atanassov Krassimir T, Janusz K, Eulalia S, et al. On Separability of Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2003, 2715 : 285~292

6 Vaughan P. Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics [J]. Theoretical Computer Science, 2003, 294 (3) : 439~471

7 雷英杰,王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究[J]. 计算机科学, 2004:31(11):4~6

8 刘新. 直觉模糊时态逻辑算子及其性质[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2003, 24 (2) : 37~38, 54

9 雷英杰,王宝树. 拓展模糊集之间的若干等价变换[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(11):1414~1418