

融合概率和逻辑的推理模型研究^{*})

胡小风 邢永康

(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

摘要 逻辑和概率理论是分属于哲学和数学领域的两个历史悠久的学科,一直以来都是相互独立的两个研究方向。但近年来,伴随着人工智能领域的快速发展,这两种经过长期发展形成的优秀理论逐渐成为计算机科学重要的研究工具。如果将这两种理论有效地结合起来,对于人工智能领域,特别是不确定性研究方向来说,有着重要的研究价值。目前,大致上有两种策略来实现。第一,利用已有的理论基础,实现整合应用。比如,知识的表示采用逻辑的形式,而推理过程则采用概率统计的观点,发挥它们各自的长处,又保持相互的独立性。第二,建立新的模型。通过深入理解逻辑推理和概率推理的本质,挖掘它们之间的区别与联系,发现概率变量数目是区别这两种理论的关键所在,并以此为切入点提出了新的模型,将其称为“逻辑概率模型”。

关键词 逻辑推理,概率变量,逻辑概率模型,背景知识缺失

1 引言

以概率统计学的经典例子:抛掷一枚硬币,猜测其出现的正反面,作为本文开篇的引子。概率统计学的观点认为这枚硬币正,反面出现的机会应该各占 50%,但如果这是枚假币,又或者是来历不明,总之是当这枚硬币的背景来历搞不清楚的时候,结果又会是怎样呢?虽然这两种情况都是不确定性推理的问题,但是显然在第二种情况下,对硬币背景知识的缺乏,严重影响 50% 这个概率值的准确性,从而降低了推理结论的真实性。以上问题可以用概率公式描述如下:我们用 E 表示硬币的真假,用 H 表示硬币正面向上, H 的补,记作: $\bar{H}$ 表示硬币反面向上。在给定证据 E 的情况下,考察这两个互补的待证假设,经典概率理论认为,

$$p(H \text{ 成立} | E) + p(\bar{H} \text{ 成立} | E) = 1$$

也即证据 E 的出现要么会加强 H 成立的可能性,要么会加强 $\bar{H}$ 成立的可能性。而在背景知识缺失的情况下,需要的却是这样一种形式

$$p(H \text{ 成立} | E) + p(\bar{H} \text{ 成立} | E) + p(H, \bar{H} \text{ 均不成立} | E) = 1$$

其中 $p(H, \bar{H} \text{ 均不成立} | E)$ 表示的正是因为背景知识缺乏而导致的差值。本文讨论的逻辑概率模型正是作用于类似此种情况下的不确定性推理。本文组织如下:首先,分别阐述逻辑推理和概率推理各自的基本理论;接着,引入概率变量的思想,将逻辑推理和概率推理归于两种极端情况;最后,结合两种推理形式的优点,得出一个通用模型,即逻辑概率模型。

2 逻辑和概率

为了说明逻辑和概率是怎样发生关系的,拟在引言中所论述的猜硬币的概率事件中加入逻辑推理来说明。举例如下:某位男士想要向他心仪的女子告白,但是心里却为此犹豫不决,于是他想通过抛掷一枚硬币来帮助他做出决定,如果硬币正面向上,他就去告白。那到底这位男士的告白机会会有几成呢?我们将以上问题逻辑概率化,可以得到如下事实作为背景知识:首先,这位男士脑中的假设“如果硬币正面向上就向心仪女子告白”可以用逻辑命题表示为“正面向上 $\rightarrow$ 告白”;其次,对于一枚正常硬币,可以认为 $p(\text{正面向上}) = p(\text{反面向上}) = 1/2$ 。这里我们把“正面向上”看作是“告白”的论据,即“告白”成立的充分条件: $p(\text{“告白”} | E) = p(\text{硬币正面向上}) = 1/2$ 。但是在已知背景知识中并没有出现任何关于不去“告白”的论据,这种情况也是有可能出现的,比如这位男子虽然做出了抛掷硬币的正反面来决定是否去告白的行为,但是事实上他内心已经打定注意要去告白,所以他并没有为自己不去“告白”这件事提供任何可能的前提条件。这个时候我们认为 $p(\neg \text{“告白”} | E)$ 应该是等于零的。这个例子直观地演示了逻辑和概率是怎样结合发生作用的。“正面向上”这个事件在逻辑推理理论中要么是 0 要么是 1 的确定性事件,而逻辑的概率化,正是将这种确定性的事件概率化,即 $p(\text{正面向上})$ 取 $[0, 1]$ 之间的某个概率值。

^{*}) 本研究得到国家自然科学基金青年基金资助(编号:60403009)。胡小风 硕士研究生,主要研究方向为不确定性推理,贝叶斯网。邢永康 博士,副教授,主要研究方向为人工智能、贝叶斯网。

3 逻辑推理

逻辑理论的历史可以追溯到古希腊哲学家亚里斯多德时期,一直以来是属于哲学的范畴,现在也演变成了数学和计算机科学的重要研究课题。它的基本思想是:用一个句子的集合 Σ 来作为知识表示的基础,所有合理的句子的集合 Γ 构成了人类所使用的描述语言。假设有一个待证的句子 h ,如果它是 Σ 的逻辑结论,则记为 $\Sigma \models h$,否则, $\Sigma \not\models h$ 。换句话说,逻辑推理就是考察在已知 Σ 上 h 的可证性。同时为了考察背景知识的不完整性对于待证结论的影响,引入 $\neg h$,从而划分出以下四种不同情况:

LI: $\Sigma \not\models h, \Sigma \not\models \neg h$; Σ 不支持关于 h 的任何结论存在。

LT: $\Sigma \models h, \Sigma \not\models \neg h$; 在 Σ 看来, h 为真, $\neg h$ 为假。

LF: $\Sigma \not\models h, \Sigma \models \neg h$; 在 Σ 看来, h 为假, $\neg h$ 为真。

LC: $\Sigma \models h, \Sigma \models \neg h$; 背景知识不连贯,导致自相矛盾的结论。

LT和LF所表示的正是经典逻辑事件,是可以给出明确答案的,而LI所表示的是引言中所讨论的背景信息缺失,致使 $p(h, \neg h)$ 均不可证(Σ)不为0的情况。这反映了逻辑推理的一个重要特征:推理过程中所需信息的缺失会阻止有意义的假设。最后一种LC的情形,通常不连贯的知识都具有排它的,它无法吸收新的知识,也就无法进行判断,本文将这种情况视为一种不合法的情形,排除在外。也就是默认背景知识 Σ 是具备连贯性的。

为了便于找出逻辑模型和概率模型的共性特征,我们统一采用“支持度”的概念来度量模型的背景知识对假设 H 的支持程度。以上对待证假设 h 的支持度可以表示为: $\text{dos}(h) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \Sigma \not\models h \\ 1, & \text{当 } \Sigma \models h \end{cases}$

单调性是逻辑推理的显著特征,它表现在对于已有知识库 Σ 中的知识,即使是 Σ 增加了新的知识,也不会改变对原有知识的判断。也就是说,逻辑推理不会发生从LT(LF)到LF(LT)的演变。我们都知道人类思维通常是非单调的过程,就像是一个小时候认为某件事是正确的,但随着年龄的增长,新知识的灌输,有可能现在的他已经完全改变了以前的想法,这就是一个典型的非单调性过程,发生了从LT到LF的转变,改变了对原有知识的判断。逻辑推理的这种单调性特质一直是为人所诟病的地方,这一点在本文所讨论的逻辑概率模型中,利用概率模型在此项的长处进行了优化。目前也有许多研究人员针对这个问题,提出了对非单调性逻辑推理的研究。

4 概率推理

概率的理论研究虽然没有逻辑理论那么悠久的历史,但也可以追溯到公元17世纪。它的研究目的是想通过后验概率来修正对某一假设 H 的先验认识。

$$p'(H) = p(H|E) = p(H \cap E) / P(E)$$

其中 E 是观察的证据, $P'(H)=1$ 表示在 E 看来, H 的发生是必然事件,反之 $P'(H)=0$ 则认为 H 是不可能事件,而介于0,1之间的值则表示了对 H 发生的可能性的度量。典型的概率推理过程,是从一个多变量模型开始,它包含一个变量的集合 V ,以及 V 上的先验概率分布 $P(V)$ 。在进行概率推理时,当模型的变量数超过了一定值,那么基于这所有变量上的全概率分布的计算是现实不可达的。Pearl于1988年提出贝叶斯网理论,成为概率研究的重要工具。贝叶斯网的基本思想是:将概率变元对应于一个个的节点,各节点间如果有直接的影响关系,就用一条带箭头的将它们连接起来,从而形成一个有向无环图DAG。DAG图的结构优势解决了对大量变元的先验概率分布的计算问题,同时贝叶斯公式又为后验概率的计算提供了行之有效的计算理论。例如:给定 $V=\{X,Y\}$, H 的后验概率 $P'(H)$ 在 $E \neq \emptyset$ 的情况下, $P'(H) = k \times \sum_{x \in H \cap E} P(X)$ 其中 $k = P(E)^{-1}$ 。类比之前讨论的逻辑推理,概率推理也有4种划分:

PU: $E \neq \emptyset, 0 < P'(H) < 1$; 在 E 和 $P(V)$ 看来, H 是可能性事件。

PT: $E \neq \emptyset, P'(H) = 1$; 在 E 和 $P(V)$ 看来, H 是必然事件。

PF: $E \neq \emptyset, P'(H) = 0$; 在 E 和 $P(V)$ 看来, H 是不可能事件。

PC: $E \neq \emptyset, P'(H)$ 无定义; 没有观察值,无法修正先验概率。

其中PT,PF和PC基本上与逻辑模型的LT,LF和LC三种情形一一对应,所不同的是PU与LI。首先,考虑PU。在集合论里, H 与 H 的补集构成了全集,即必然事件,用概率表示为 $P'(H) + P'(\bar{H}) = 1$ 。这是与逻辑模型LI有本质区别的地方,也是它不能表示背景知识缺失对推理结论的影响的原因所在。与逻辑推理相比,概率推理的优势在于它的非单调性。也就是说,原有知识认为是真(假)的事情,通过加入新的证据进行学习修正,可以推翻原有认识,得到新的认识,表现在PU的改变上,可以从PT(PF)演变到PF(PT)。

5 逻辑概率模型

逻辑概率模型的目标是融合逻辑模型和概率模型的优点,即同时满足两个条件:1)能容许背景信息

缺失情况下继续合理的推理过程; 2) 推理过程是非单调性的。要建立一个统一的模型的关键在于认识到, 概率模型是以基于所有变量的概率分布为前提的, 而逻辑推理却没有为它的任何变量处理概率分布问题。如果把已指定了概率分布的变量称作概率变量, 那么概率变量数目的多少正是区分逻辑模型和概率模型的关键点。根据这个思路, 以抛掷硬币告白为例, 新模型的描述如下: $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是所有相关变量的集合, A 是 V 中所有概率变量的集合 $A \subseteq V$, $p(A)$ 是基于 A 的概率分布函数, 在抛掷硬币的例子中, $V = \{\text{抛掷硬币}, \text{告白}\}$, $A = \{\text{抛掷硬币}\}$ 。显然在经典的概率模型中 $A = V$, 而经典的逻辑模型中 $A = \emptyset$ 。在我们讨论的逻辑概率模型中 A 的元素个数可以是任意的。

为了统一支持度的定义, 需要从两个角度加以考虑。第一, 对于证据集 $E \subseteq N_V$, 其中 N_V 是 V 中所有原子变量按照一定的语义组成的句子的全集。例如, 对于表示向量的 $V = \{X, Y\}$, 其中 $N_V = \theta X \times \theta Y$, 即对于任意向量 $(x, y) \in N_V$ 。E 的出现不但约束了 N_V , 也约束了 N_A 。假定 V 中的元素均为连续变量。同时让 E 投影到 N_A 上, 得到 $E^{\dagger A} \subseteq N_A$, 把 N_A 中的元素称为 s , $E^{\dagger A}$ 就是包含了与 E 相关的所有 s 的集合。这样就为 A 的后验概率提供了计算形式, $p'(A) = p(A|E^{\dagger A})$, 它表示 A 可以用 $E^{\dagger A}$ 来修正自身的先验概率。

第二, 考虑从 N_A 到 N_V 这个方向。如果给定 N_A 中与事实相符的元素 s , 它同样会使得与 V 相关的证据集 E 划分成条件证据 $E|S$ 。

对于所有 $s \in E^{\dagger A}$, 有 $E|S \neq \emptyset$ 。其它 $s \in N_A$ 但 $s \notin E^{\dagger A}$, 有 $E|S = \emptyset$ 。当同时满足 $s \in N_A$ 和 $E|S \subseteq H$, 那么我们说 H 是 E 和 s 的逻辑结论。这就意味着 s 是 H 成立的假设性条件, 将这样的 s 所组成的集合, 用 $\text{sup}(H)$ 表示为 $\text{sup}(H) = \{s \in E^{\dagger A} \text{ 且 } E|S \subseteq H\}$, 并且规定 $\text{sup}(\emptyset) = \emptyset$, $\text{sup}(N_V) = E^{\dagger A}$ 。我们把 $\text{sup}(H)$ 中的元素称为 H 的论据。在这个基础上, 对支持度的定义就呼之欲出了。考虑将 $s \in \text{sup}(H)$ 对 H 为真的支持强度定义为 H 的支持度, 同时

用 s 的后验概率 $p'(s)$ 来度量这种强度, 于是有 $\text{dos}(H) = p'(\text{sup}(H)) = \sum_{s \in \text{sup}(H)} p'(s)$ 。因为并不要求 $\text{sup}(H)$ 和 $s \in \text{sup}(H)$ $\text{sup}(H^c)$ 是强互补关系, 所以允许 $\text{dos}(H) + \text{dos}(H^c) \leq 1$ 。这就扩展了在背景知识缺失情况下的推理。逻辑概率模型改进了经典概率模型对所有变量都指定概率分布的缺点, 只在概率论据变量的集合 A 上指定概率分布。以上就是本文所提出的逻辑概率模型。

结论 本文在引入了概率论据作为信息缺失推理的理论基石的同时, 阐述了两个重要概念, 支持度的表示和非单调性。支持度的概念本质上是可证性的概率化, 它包含了从逻辑推理模型抽象出的可证性, 和从概率推理模型抽象出的概率表示。概率变量的数量是区分这两种理论的关键。这两种用于自动推理的经典理论能融合在概率论据的理论中, 并且成为两种极端的情况, 其关键还在于概率论据理论能够允许任意多个数量的概率变量的存在。

本文研究适用于多个领域。例如在人工智能领域的自动推理方向, 可以把逻辑率模型作为一种融合了逻辑模型和概率模型优点的新模型加以应用。在需要考虑信息缺失可能性的决策系统中也能发挥重要作用。同时逻辑概率模型也从另外一个角度重新审视了哲学, 数学以及统计学领域的某些课题。

参 考 文 献

- 1 Cohen L J. The Probable and the Provable Clarendon Press, Oxford, 1977
- 2 Kolmogorov A N. Foundations of the Theory of Probability. Chelsen Publishing Company, New York, 1950
- 3 Walley P. Towards a unified theory of imprecise probability. International Journal of Approximate Reasoning, 2000
- 4 Peal J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1988
- 5 Ruspini E H. The logical foundations of evidential reasoning. [Technical Report 408]. AI Center, CA, 1986
- 6 Shafer G. The Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976