

双二次多项式动力系统的分形图

徐凯¹ 吕菁² 李建丽³

(上海海事大学信息工程学院 上海 200135)¹ (上海海事大学基础部 上海 200135)²

(上海海事大学交通运输学院 上海 200135)³

摘要 本文主要讨论如何利用计算机图形学方法绘制由 A. Douady 在上世纪末期建议研究的双二次动力系统的分形图,并利用这种分形图定性地观测、验证一些双二次动力系统参数空间连通迹 M 和 Julia 集的性质。以往这一领域大量研究都是针对 $f_c(z) = z^2 + c$ 动力系统的性质展开的,本文则重点讨论了性质更为复杂的特殊双二次动力系统 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$,对更一般的双二次动力系统 $f_c(z) = z^4 + az^2 + b$ 绘制出了它 Julia 集的分形图。采用时间逃逸算法,本文在 Visual Basic 6.0 编译器上实现双二次动力系统的分形图像绘制程序,并为方便研究增加了逐级放大观察分形图细部结构的功能,采用了可调节的上色方案。

关键词 双二次多项式, Julia 集, Mandelbrot 集, 连通性, 复杂的非随机运动, 分形几何学, 计算机图形学, 逃逸时间算法, 动力学, 动力系统, 分形图

The Fractal Diagram of the Dynamical System of the Biquadratic Polynomials

XU Kai¹ LU Jing² LI Jian-Li³

(College of Information Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)¹

(Division of Basic Courses, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)²

(College of Transport & Communication, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)³

Abstract This paper is concerned with the fractal diagram of the Julia of the biquadratic polynomials, which is suggested to A. Douady in the last century. By means of the qualitative of those fractal diagram, we verify the property of the connectedness locus of the single parameter of the biquadratic polynomial and Julia set. We draw the Julia set of the biquadratic polynomial.

Keywords Biquadratic polynomial, Julia set, Mandelbrot set, Connectivity, Non-random complicated motions, Fractal geometry, Escape time arithmetic, Dynamics, Dynamical system, Fractal diagram

仅仅是形式简单的 $f_c(z) = z^2 + c$ 迭代后的性质已经相当复杂,对于结构更复杂的双二次多项式动力系统,定量研究进展缓慢。利用计算机图形学方法和“逃逸时间算法”,我们让计算机生成所需精度下的双二次动力系统 $f_c(z) = z^4 + az^2 + b$ 的分形图,通过观察图形,我们可以定性地验证和猜想一些双二次动力系统参数空间连通迹 M 和 Julia 集的性质。这也是本文想要达到的目标。

1 动力系统

一个集合到其自身映射的迭代,就构成了一个离散的动力学系统。

1.1 离散的动力系统

设 D 是 R^n 的一个子集(时常就是 R^n 本身),并且设 $f: D \rightarrow D$ 是一个连续到上的映射。正如通常所使用的, f^k 表示 f 的 k 次迭代,因此 $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots$ 等等;注意如果 $x, f(x), f^2(x), \dots$ 当作在时刻 $0, 1, 2, \dots$ 时某一数量的值。所以,在时刻 $k+1$ 的值是根据在时刻 k 时的值通过函数 f 给出。一个迭代函数图 $\{f^k\}$ 就叫作一个离散的动力系统。

1.2 多项式动力系统

当迭代函数 $\{f^k\}$ 的迭代公式为多项式,而其定义域 D 是复平面时候,称这个离散动力系统为多项式动力系统。

1.3 动力系统的性质

对一个已知的动力系统 $\{f^k\}$,由某一“初始状态”值 x_0 出发,作 $x_1 = f(x_0)$,然后是 $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$,等等。人们感兴趣的是对各种不同的初始点 $x \in D$,迭代序列或轨道 $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 及其它的极限集的性质。 $f^k(x)$ 可能收敛到一个不动点 w ,也就是 D 中使得 $f(w) = w$ 的一个点 w 。 $f^k(x)$ 也可能收敛到周期为 p 的点 $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$ 的轨道,有时 $f^k(x)$ 可能是随机摆动的,但总不是保持趋向于某一个集,这个集可能就是一个分形。

我们称 D 的子集 F 为 f 的吸引子,如果 F 是一个闭集,并且在 f 的作用下是不变的(也就是 $f(F) = F$),使得对包含 F 的一个开集 V 中的所有点 $x, f^k(x)$ 到 F 的距离随 k 趋于无穷大而趋于零。集 V 叫作 F 的吸引域^[3]。

2 分形图

多项式的动力系统的定性方面的研究包含对它的形式和 Julia 填充集的几何刻画,这里的“几何刻画”指的就是动力系统的“分形图”。

2.1 分形图像的性质

在欧氏空间中,通常人们习惯于整数维数。分形理论把维数视为分数,fractal(分形)是用来描述传统欧几里得几何学所不能描述的一大类复杂无规的几何对象^[4]。分形几何与

传统几何相比有以下特点:

- (1) 从整体上看,分形几何图形是处处不规则的。
- (2) 在不同尺度上,图形的规则性又是相同的,称为“自相似”。

3 分形图绘制的计算机图形方法

1979年,人们运用计算机图形方法,借助高速大功率计算机生成了一个名为 Mandelbrot 集的分形图,对动力系统的兴趣才开始迅速增长。这一进步使得理论分析能够与数值研究同时进行。

3.1 逃逸时间算法

在众多分形图的绘制算法中,近似算法“逃逸时间算法”是一种比较有效的算法,其精度可以根据要求调节。该算法类 Pascal 伪代码如下:

```
n=0;
while ((n++ < Nmax) && ((Real(Z)^2 + Imag
(Z)^2) < Rmax)){ Z=...; {这里加入迭代方程}}
(其中: Nmax 为最大迭代次数 Rmax 为逃离界限)
退出 while 循环有两种情况:
```

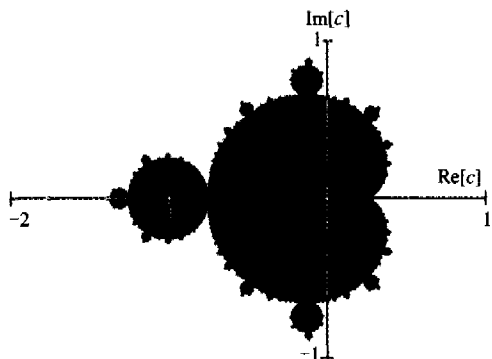


图1 Mandelbrot 集的黑白分形图

第一种情况是: $(\text{Real}(Z)^2 + \text{Imag}(Z)^2) \geq R_{\max}$, 属于这种情况的点相当于“Z 值没有界限增加(趋向无穷)”,为定常吸引子,我们把这些区域着成白色。

第二种情况是: $n \geq N_{\max}$ 属于这种情况的点相当于“Z 值衰减(趋向于零)”或“Z 值是变化的”,我们把这些区域着成黑色。

所以,对于 Mandelbrot 集的绘制,黑色区域即为“Mandelbrot 集”(图1);对于 Julia 集的绘制,黑色区域图形的边界处即为“Julia 集合”。

3.2 迭代产生分形图案的上色

要想获得较好的艺术效果,一般对 n 做如下处理(类 Pascal 伪代码):

```
Red = n * Ar + Br;
Grn = n * Ag + Bg;
Blu = n * Ab + Bb;
if ((Red & 0xFF) > 0xFF) Red = Red ^ 0xFF;
if ((Grn & 0xFF) > 0xFF) Grn = Grn ^ 0xFF;
if ((Blu & 0xFF) > 0xFF) Blu = Blu ^ 0xFF;
```

其中: Ar、Ag、Ab 及 Br、Bg、Bb 为修正量。

获得的 Red(红色)、Grn(绿色)、Blu(蓝色)为 RGB 三基色,着色效果为周期变化,具有较强的艺术感染力,而且等位线也蕴藏在周期变化的色彩之中。

4 典型的多项式动力系统及其分形图像

目前研究得最多的典型多项式动力系统是:

$$\begin{cases} z_0 = z \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, (n=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

4.1 Julia 集和它的分形图

每个二次多项式的 Julia 集合(有无限多个点)都由一个常数 c 决定,它是一个复数。现在您在复平面上任意取一个点,其值是复数 Z_0 ,将其代入下面方程中进行反复迭代运算: $Z_{n+1} = Z_n^2 + c \quad c \in C$

P_0 内的点可以被解释为吸引域,原点 $z = 0$ 为吸引点。这个迭代还有另一个吸引点:无穷远点,它的吸引域就是逃逸集 E 。这两个吸引域的共同边界就是 Julia 集。

所有 $f_c(z) = z^2 + c$ 对应的 Julia 集可以分为连通和完全不连通两类,也有一种 Julia 集的图像是连通的,但是却不是简单闭合的,例如: $c = -1$ 对应的 Julia 集。完全不连通的 Julia 集都具有 Cantor 集的性质^[2]。

另外,从 Julia 集的逐级放大图中(图2), Julia 集的分形图显现出自相似的特征。

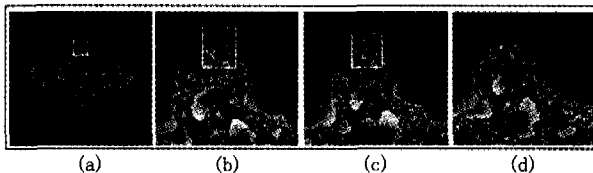


图2 Julia 集分形图逐级放大图

4.2 Mandelbrot 集和它的分形图

二次多项式 $f_c(z) = z^2$ 对应的 Mandelbrot 集 M 由使 $z = 0$ 迭代产生的序列收敛的所有复数 c 定义而成。如果 C 表示复数集且 $c \in C$, 则 Mandelbrot 集可被记为:

$$M = \{c \in C \mid \text{迭代} \begin{cases} z_0 = c \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases} \text{保持收敛}\}$$

利用 3.1.3.2 节介绍的“逃逸时间算法”和分形图上色算法,我们可以得到 Mandelbrot 集的分形图。通过对这个分形图的逐级放大,我们可以发现这个分形图和 Julia 集分形图一样具有自相似性质。

4.3 Mandelbrot 集与 Julia 集的关系

Mandelbrot 集合和 Julia 集合是紧密联系在一起的。Julia 集合有若干类型,分别对应着 Mandelbrot 集合中不同的参数取值(如图3)。



图3 Mandelbrot 集和 Julia 集的关系

5 双二次动力系统的分形图像的绘制和实验分析

下面,借鉴对 $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ 的分形图像的绘制方法,我们将在 Microsoft 公司的 Visual Basic 6.0 编译器上实现双二次动力系统的分形图像绘制程序。

5.1 分形图像绘制程序的前期准备

其中几个较为主要的程变量、序段和函数:

表1 程序中主要子程序和函数

子程序、函数	功能说明
Function RGBcolor(clr As Long) As Long	根据输入的 clr 迭代次数, 确定如何上色。
Sub AdjustAspect()	调整到合适的现示比例。
Sub DrawJulia()	绘制 Julia 集。
Sub DrawForm1()	绘制参数空间分形图。
Sub ScaleFactor(fact As Double)	图像放大时参数换算。
Sub RulerImage()	为分形图加上标尺刻度。

其中,用以实现调色板功能的函数 RGBcolor(clr)的代码如下,其算法请参考本文 3.2 节中的介绍。

```
Public Function RGBcolor(clr As Long) As Long
    Rcolor = (clr * Ar + Br) Mod 256
    Gcolor = (clr * Ag + Bg) Mod 256
    Bcolor = (clr * Ab + Bb) Mod 256
    RGBcolor = RGB(Rcolor, Gcolor, Bcolor)
End Function
```

这段程序可为生成的分形图任意地修改配色方案,得到不同的图像(图 4)。下文实验中配色方案为“红:13、绿:17、蓝:27”,不再复述。



图4 不同的三基色配色方案下,同一个分形图显出不同的效果

图4 不同的三基色配色方案下,同一个分形图显出不同的效果

为了可以更直观地观察分形图的自相似性,通过 Mouse-Down、MouseMove、MouseUp 这三个鼠标事件驱动的子程序,实现了分形图的局部放大功能。下文将利用这一功能验证一些动力系统的性质。

5.2 二次动力系统 $Z_{n+1} = (Z_n^2 - 2C^2)Z_n^2$ 的参数空间的分形图绘制

双二次多项式族 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统相对于一般的双二次多项式 $f_c(z) = z^4 + az^2 + b$ 更容易研究,所以我们先从这里入手,绘制分形图。

我们研究 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 的参数空间的分形图,也就是用图形标记出由使初始值 $z=c$ 迭代后收敛的 c 组成的集合。我们令 $f'_c(z) = 0$ 可以求得 $z=0$ 或 $z=\pm c$,而 $z=0$ 为初值时这个迭代恒为零,即 0 为迭代不动点,所以我们选取 $z=c$ 为初始值。

下面是绘制参数空间分形图的子程序,其算法使用的是本文 3.1 节阐述的“逃逸时间”算法:

```
Private Sub DrawForm1() (已略去部分程序)
    For i = 0 To wid
        For j = 0 To hgt
            clr = 0
            Do While clr < MaxIterations
                ReaZ = (.....)
                ImaZ = (.....)
                clr = clr + 1
            Loop
            Picture1.PSet (i, j), RGBcolor(clr)
        Next j
    Next i
End Sub
```

最终得到的程序执行结果(图 5 左侧)中黑色部分即为我们所感兴趣的集合。

5.3 双二次动力系统 $Z_{n+1} = (Z_n^2 - 2C^2)Z_n^2$ 的 Julia 集的分形图绘制

采用“逃逸时间”算法,同 5.2 节可编制出绘制 Julia 集的分形图像的程序。

对应于一些 c 的取值,我们可以得到一些典型的 Julia 集图像(图 5)。

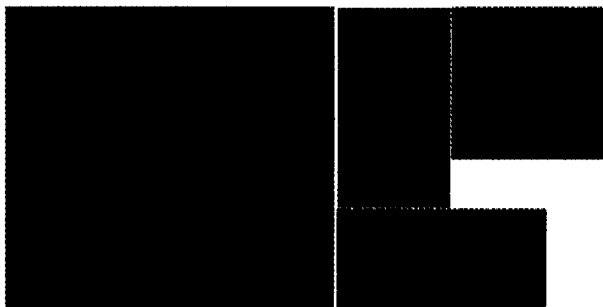


图5 多项式 $Z_{n+1} = (Z_n^2 - 2C^2)Z_n^2$ 动力系统的参数空间分形图及参数 c 对应的不同 Julia 集图像举例

5.4 二次动力系统 $Z_{n+1} = (Z_n^2 - 2C^2)Z_n^2$ 的性质验证实验

实验验证 1:一族双二次多项式 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$,如果参数 c 是参数平面连通迹上的点,那么在 0 点直接超吸引域边界是 Jordan 曲线。

例如:图 5 中 c 的取值都是在连通迹上的,可以看到对应的 Julia 集的中间最大的黑色部分就是 0 点直接超吸引域,它的边界就是 Jordan 曲线。图 6 所示的 Julia 集在 0 点直接超吸引域边界也是 Jordan 曲线,而且这个 Julia 集是连通的。

实验验证 2:多项式 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统的连通迹是单连通的。

通过对图 6 的观察,很容易发现, $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统的连通迹是单连通的。

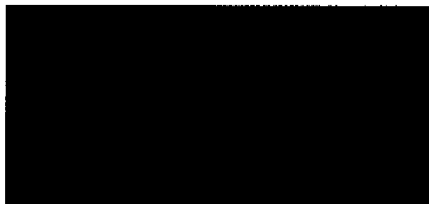


图6 典型的连通 Julia 集分形图

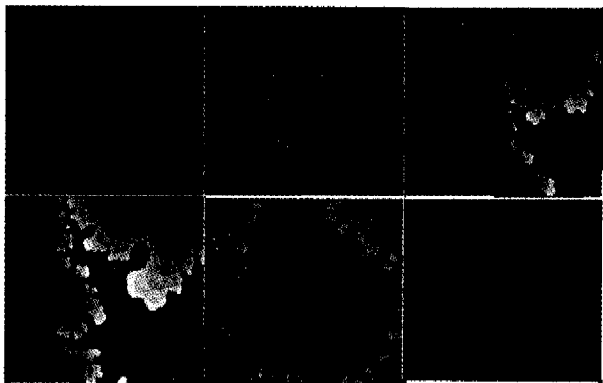


图7 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统分形图逐级放大和 Mandelbrot 集

实验验证 3:双二次多项式族 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统的 M 上可以迁入无穷多个 Mandelbrot 集, ∂M 在其他点均

是局部连通的,并且每个捕获分支的边界是 Jordan 曲线。

从在双二次多项式族 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统分形图的逐级放大图(图 7)中可以看到,第三个放大图中包含了 Mandelbrot 集,事实上,由于这个分形图有自相似性,因此其中还包含着无数个 Mandelbrot 集。在逐级放大图 7 中,我们还可以观察到参数空间的每个捕获分支的边界是 Jordan 曲线。

5.5 双二次多项式 $f_{a,b}(z) = z^4 + az^2 + b$ 的 Julia 集的分形图绘制和性质

仍然采用本文 3.1 节阐述的“逃逸时间”算法,我们设计出绘制出双二次多项式 $f_c(z) = z^4 + az^2 + b$ 的 Julia 集的分形图像的程序。在程序中选择一些特定的参数值 a, b 我们就可以得到一些特定的 Julia 集分形图像,这里列举一些 Julia 集的分形图和对应的参数(图 8)。

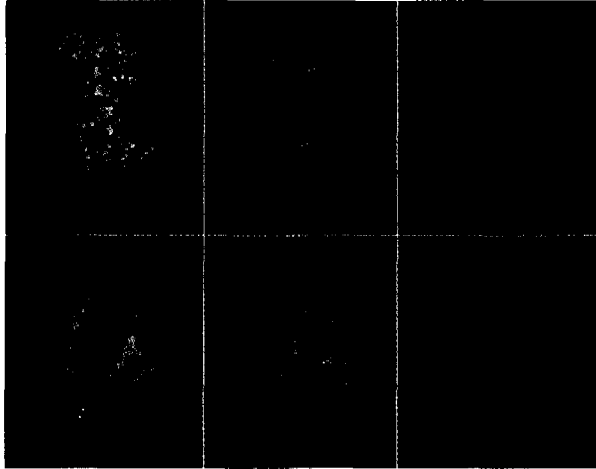


图 8 双二次动力系统的 Julia 集分形图举例

通过对图 8 中参数取值和 Julia 集分形图对应关系的观

察,可以观察到以下性质,而这些性质已经在我的导师吕菁的论文《双二次多项式动力学》中得到证明^[1]:

性质 1 $f_{a,b}$ 的 Julia 集是连通的是当且仅当它所有临界点的轨道是有界的。

性质 2 $f_{a,b}$ 的 Julia 集是完全不连通的当且仅当它任何临界点的轨道不在填充 Julia 集的周期分支内。

性质 3 当 $f_{a,b}$ 不属于上面两种情形, $f_{a,b}$ 的 Julia 集有可数个多于一点的连通分支,其余为不可数个单点集。

结论 本文通过借鉴二次多项式动力系统的 Mandelbrot 集和 Julia 集的定性研究方法,在 Visual Basic 6.0 编译器上实现双二次动力系统的分形图像绘制程序,并为方便研究增加了逐级放大观察分形图细部结构的功能,采用了可调节的上色方案。利用这些功能我们对 $f_c(z) = z^4 - 2c^2 z^2$ 动力系统的参数空间、Julia 集进行了数学试验,验证了我的导师吕菁在论文《双二次多项式动力学》中所用理论方法证明的双二次动力系统的性质。并通过假设不同的参数,观察 $f_c(z) = z^4 + az^2 + b$ 动力系统的 Julia 集图像,归纳出一些性质,这些性质也已经被证明^[1],说明这些工作对于更好地研究双二次动力系统的性质有指导意义。

参 考 文 献

- 1 吕菁. 双二次多项式动力学:[上海:复旦大学数学系博士论文], 2004
- 2 Glaser F, Robles A J. A Hyperpolar Image of the Mandelbrot Set. GLASER, ROBLES, Fall 1998, 139~146
- 3 吕以攀. 复解析动力系统. 科学出版社, 2002. 10~96
- 4 [英]肯尼思·法尔科内. 分形几何-数学基础及应用. 东北大学出版社, 1991. 220~289
- 5 李水根. 分形. 高等教育出版社, 2004. 20~27
- 6 任福尧主编. 复解析动力系统. 复旦大学出版社, 1991. 4~35

(上接第 209 页)

在低通滤波、边缘检测等车辆图像预处理环节,本文所采用的核心算法的耗时非常低,达到了预期的效果。

表 1 系统各处理环节成功率、所花费的时间及比率

处理过程	样本数量	成功数量	失败数量	成功率	耗时(us)	耗时比率
车牌定位	42	37	5	88.0%	101	1.27%
字符分割	41	37	4	90.2%	387	4.88%
字符识别	38	30	8	78.9%	100	1.26%
整体状况	42	30	12	71.4%	7937	100%

结论 车牌的识别问题是现代交通工程领域中研究的重点和热点问题之一,本文就汽车牌照的定位与分割及自动识别等问题进行了研究,提出了汽车牌照自动识别系统的思路 and 总体设计方案。通过对大量实际拍摄的车牌图像的反复研究比较,对车牌识别系统的图像预处理、车牌定位、字符分割、字符识别等环节所涉及的技术和算法进行了设计、改进,完成了车牌识别系统的基于 VC++ 6.0 的实现。由于本文介绍的系统在车牌识别技术的研究中,主要是使用灰度图像,没有用到车牌图像的色彩特征,这在一定程度上影响了车牌自动识别系统的性能。车牌本身是彩色物体,其底色和字符的颜色是有限的几种,而且摄像设备和计算机性能的提高使彩色图像的实时处理变得容易。因此,充分利用车牌的色彩信息,并

结合计算机彩色视觉技术,则可以更有效地实现车牌字符的分割和识别。

参 考 文 献

- 1 Da Rocha Gesualdi A, De Albuquerque M P, MARCELO PORTES DE ALBUQUERQUE. Recognition of characters in plates of private Brazilian vehicles using neural networks [J]. IEEE, 2000
- 2 Ter M H, Brugge, Stevens J h, Nijhuis J A G. License Plate Recognition Using DTCNNs. In: Proceeding of the IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Application, 1998. 212~217
- 3 Wang Li, Pavlidis T. Direct gray-scale extraction of features for character recognition [J]. IEEE Trans on PAMI, 1993, 15(10): 1053~1067
- 4 左奇, 史忠科. 一种基于数学形态学的实时车牌图像分割方法. 中国图像图形学报, 2003, 8A(3): 281~285
- 5 刘伟铭, 赵雪平. 一种基于扫描行的汽车车牌定位算法. 计算机工程与应用, 2004. 223~225
- 6 宋加涛, 刘济林. 车辆牌照上英文和数字字符的结构特征分析及提取. 中国图像图形学报, 2002, 7A(3): 945~949
- 7 郭大波, 陈礼民, 卢朝阳, 等. 基于车牌底色识别的车牌定位方法. 计算机工程与设计, 2003, 4(5): 81~89