

基于虚警概率最大准则的小波阈值去噪算法研究^{*})

付 炜 许山川

(燕山大学信息学院通信与电子工程系 秦皇岛 066004)

摘 要 本文分析了随机噪声的小波变换系数在不同尺度上的传递特性和噪声信号奇异性与小波模极大值的关系,阐述了基于阈值的正交小波变换去噪法,在此基础上提出了一种基于能量元和 Neyman-pearson 准则的小波阈值去噪算法。其小波阈值的选取是依据设定虚警概率后得到的检测概率最大的准则,并且阈值是随各尺度独立的。通过仿真实验,验证了该算法的有效性和优异性。

关键词 小波变换,能量元, Neyman-Pearson 准则,信噪比

Research on Algorithm of Wavelet Threshold Value De-noising Based on Maximum Criterion of False Alarm Probability

FU Wei XU Shan-Chuan

(Department of Communication & Electronic Engineering of Information Institute, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract According to the characteristics of random noise wavelet transform on the different scale and the relationship between of noise Lipschitz and its wavelet transform modulus maxima, the orthogonal wavelet threshold de-noising method is explained, and then a de-noising method based on energy-member and Neyman-Pearson Criterion is proposed. The selection of its threshold is according to the criterion that the detection probability is maximized in given false alarm rate probability, and it is independent on each scale. Numerical simulations show that this de-noising method is effective and excellent.

Keywords Wavelet transform, Energy-member, Neyman-pearson criterion, SNR

1 引言

目前无论在理论研究还是工程应用中,信号噪声的去除都是一个热点问题。传统的去噪方法是运用线性算法如维纳滤波等。当前非线性方法在信号去噪中得到广泛的应用,如运用小波进行信号分析。小波变换是一种信号的时-频分析,它具有多分辨率的特点,可以方便地从混有强噪声的信号中提取原始信号,被誉为分析信号的显微镜。有许多学者对小波理论及其应用进行了研究,早期的如 Weaver^[1]等,后来 Donoho 和 Johnston 提出了硬阈值和软阈值方法^[2,3],其中软阈值方法由于具有很好的去噪效果,应用比较广泛。很多学者针对如何确定阈值进行了深入的研究,如 L. K. Shark 和 L. Yu 提出了最优模糊阈值消噪方法^[4]。

本文首先分析了随机噪声的小波变换特性,然后阐述了基于阈值的正交小波变换去噪算法,然后提出了基于能量元和 Neyman-pearson 准则的小波阈值去噪算法,最后通过实验验证了该方法的有效性和优异性。

2 随机噪声的小波变换特性

2.1 模极大值和信号奇异性与尺度的关系

小波变换的一个非常吸引人的特点是能够刻画信号的奇异性^[3]。

设 x_0 为信号 $f(x)$ 的局部突变点(奇异点),对于 x_0 的邻域 x ,即 $x \in x_0$,则 $f(x)$ 的小波变换在 x_0 取得极大值,有:

$$|W_{2^j} f(x_0)| \geq |W_{2^j} f(x)| \quad x \in \delta x_0 \quad (1)$$

且有

$$|W_{2^j} f(x)| \leq K(2^j)^\alpha \quad (2)$$

对式(2)取对数得:

$$\log_2 |W_{2^j} f(x)| \leq \log_2 K + \alpha j \quad (3)$$

式(3)中 K 为非零常数,称为 Lipschitz 指数,它是用来表征信号突变,尖锐,陡峭程度(即奇异性)的特征值。

式(3)表明,如果 $f(x)$ 在 x 处的奇异性大于零(即 $\alpha > 0$),则随着小波变换的尺度 j 增加,小波变换模极大值 $|W_{2^j} f(x)|$ 的对数值也变大;若 $\alpha < 0$,则具有负的奇异性。

2.2 模极大值的传播特性

这里说明白噪声具有负的奇异性。设 $n(x)$ 是实的方差为 σ^2 的白噪声, $W_{2^j} n(x)$ 是其二进小波变换,求其方差:

$$\begin{aligned} E[|W_{2^j} n(x)|^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[n(u)n(v)] \Psi_{2^j}(x-u) \Psi_{2^j}(x-v) dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \Psi_{2^j}(x-u) du \end{aligned} \quad (4)$$

又是 $n(x)$ 白噪声,对 $n(x)$ 求自相关得:

$$E[n(u)n(v)] = \sigma^2 \delta(u-v) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)中,并且由于 $\Psi_{2^j}(x) = \frac{1}{2^j} \Psi(\frac{x}{2^j})$,从而得到:

$$\begin{aligned} E[|W_{2^j} n(x)|^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \delta(u-v) \Psi_{2^j}(x-u) \Psi_{2^j}(x-v) dudv \\ &= \frac{\|\Psi\|^2}{2^j} \sigma^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)表明 $|W_{2^j} n(x)|^2$ 的平均幅度反比于尺度 j ,即白噪声有负的奇异性。

^{*}) 基金项目:河北省自然科学基金博士基金项目(No. B2004129)。付 炜 教授,博士,博导,主要从事遥感、资源环境信息系统与计算机信息处理的科研与教学工作。

3 正交小波阈值去噪算法

假设有一组观测序列 $y(i) = x(i) + n(i), i = 1, 2, \dots, N, N$ 为数据长度, 其中 $x(i)$ 是信号在 i 时刻的值, $N(i)$ 是独立同分布的高斯白噪声 $N(0, \sigma^2), \sigma^2$ 为方差。为了书写方便, 简记为 $y = x + n$ 。运用正交小波阈值进行去噪, 它是基于多分辨分析原理, 由于信号和噪声具有不同的奇异性, 即随着尺度的增加, 信号的小波模极大值也增大, 而噪声则相反。利用此特性, 通过尺度变换, 进行阈值处理, 能够有效地去除噪声, 其中分硬阈值法和软阈值法。

硬阈值函数如下:

$$y_h(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq t \\ 0, & |x| < t \end{cases} \quad (5)$$

而软阈值函数公式如下:

$$y_s(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x)(|x| - t), & |x| \geq t \\ 0, & |x| < t \end{cases} \quad (6)$$

Donoho 提出的基于阈值的正交小波变换去噪方法中阈值的选取主要基于两个滤波前提: (a) 光滑性: 滤波后信号 \hat{x} 依概率和原始信号 x 至少有同样的光滑度。(b) 适应性: \hat{x} 可得到一个最小均方误差估计。

4 基于能量元和 Neyman-Pearson 准则的小波阈值去噪法

能量元的定义: 设某数据序列为 $\{x_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ 。则该序列的能元为 $E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N x_i^2$, 其中 $E_i = x_i^2, i = 1, 2, \dots, N$ 称为能量元, N 为序列中的数据长度。根据以上分析, 将同一分辨率上小波变换后得到的小波系数从小到大排列, 可以认为较小的那部分小波系数对应噪声的小波系数, 较大的那部分小波系数对应信号的小波系数。而在临界区中, 信号和噪声的小波系数比较接近, 甚至可能混叠在一起, 这里将小波系数序列转化为能元可以将临界区内信号和噪声对应的小波系数之间的差异放大, 更有利于 Neyman-Pearson 准则中虚警概率 α 的确定。再利用该准则来确定各尺度上小波阈值, 进行信号去噪处理。

考虑到转化为能量元的过程中相当于将小波系数的数值作平方处理, 而一个数平方处理后并不一定比原来大, 因此必须满足一定的前提条件。假设临界区域内某一个信号值对应的小波系数的绝对值为 a , 某个噪声值对应的小波系数的绝对值为 b , 满足 $b = a - \lambda, \lambda > 0$ 。进行能元转化得到 $e = a^2 - b^2 = 2a\lambda - \lambda^2$ 。我们希望转化为能量元以后, 将噪声和信号之间的差异放大, 即满足 $e > \lambda$, 从而有:

$$e - \lambda = 2a\lambda - \lambda^2 - \lambda > 0 \quad (7)$$

$$\text{又 } \lambda > 0, \text{ 则有: } a > \frac{1 + \lambda}{2} \quad (8)$$

又由 $a = b + \lambda$, 代入式(8)中得:

$$b > \frac{1 - \lambda}{2} \quad (9)$$

又 $a > b > 0$, 由式(9)得到:

$$a > \frac{1 - \lambda}{2} \quad (10)$$

再将式(8)和式(10)相加得到: $a > \frac{1}{2}$ 。即当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 小波系数转化为能量元可以将信号和噪声对应的小波系数之间的差异放大。对含噪信号序列进行小波分解时, 随着分解层数的增加, 分析频率的降低, 高频系数的标准差将由信号和噪声共同决定, 高频系数的标准差也逐渐变大, 小波分解第一层的噪

声小波系数的标准差在所有分解层中是最小的。即当第一层的高频小波系数(这里可以将它看着完全由噪声决定) $a_1 > \frac{1}{2}$ 时, 就可以进行能量元转化, 从而有利于对虚警概率的确定。而对于 $a_1 \leq \frac{1}{2}$ 的情况, 进行了幅度拉伸处理, 将每一层

的小波系数乘上拉伸系数 $\beta = \frac{0.5}{\sigma_1}$, 从而满足上述条件, 在进行阈值处理后再将系数还原(详见后面的实验步骤)。下面讨论 Neyman-Pearson 准则。

该准则的目的在于给定虚警概率的条件下, 使检测概率最大。运用似然比检测可以达到这一目的。设 H_0 表示信号 x 的小波变换系数 WX 不存在, 即只存在噪声 WN ; H_1 表示 WX 存在。即有:

$$H_0: WY = WN \quad (11)$$

$$H_1: WY = WX + WN \quad (12)$$

用 $p(H_0 | WY)$ 和 $p(H_1 | WY)$ 分别表示给定 WY 时 H_0 为真的概率和为 H_1 真的概率。似然比 $\lambda(WY) = p(H_0 | WY) / p(H_1 | WY)$ 。设 λ 为检测阈值, 当 $\lambda(WY) \leq \lambda_0$ 时, H_0 为真; 当 $\lambda(WY) > \lambda_0$ 时, H_1 为真。其等效检验是当 $WY \leq t$ 时, H_0 为真; 当 $WY > t$ 时, H_1 为真, t 为阈值。设定虚警概率 $\alpha \in (0, 1)$, 为了使得检测概率最大, 根据 Neyman-Pearson 准则, 阈值满足:

$$2 \int_t^{+\infty} p(H_0 | WY) d(WY) = 2 \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \alpha \quad (13)$$

解得: $t = u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma$

其中, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为标准正态分布关于 $\frac{\alpha}{2}$ 的上侧分位数。

在实际处理中, 由于噪声方差 σ^2 在各个尺度上不同, 有如下关系: $\sigma_j^2 = \sigma^2 / 2^j$, 从而可以得到各尺度上的阈值 $t_j = u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_j = u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / 2^{j/2}$, 它随各尺度独立。

基于能量元和 Neyman-pearson 准则的小波阈值去噪步骤如下:

- (1) 对信号观察序列作正交小波变换, 得到小波变换系数;
- (2) 对第一层小波系数进行判断, 若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则进行幅度拉伸处理, 否则直接将临界区域内的小波系数作能元转化。这里保持每个小波系数的正负号不变, 从而将信号和噪声的小波系数差异放大, 更有利于确定虚警概率;
- (3) 在确定虚警概率后, 运用 Neyman-Pearson 准则, 得到小波各尺度上的阈值;
- (4) 进行阈值处理得到新的小波变换系数, 再对新的小波系数进行还原处理;
- (5) 通过新的小波变换系数进行小波逆变换, 得到原始信号的估计。

5 实验结果及分析

为了说明本文算法在去噪中的有效性和优越性, 分别采用传统的硬、软阈值方法和本文算法进行了大量的实验。这里举两例加以说明。实验中分别针对 Heavy sine 和 Blocks 信号进行了处理。其中, 含噪信号信噪比 $SNR = 8\text{dB}$, 信号长度为 2048 个, 分别运用软阈值法、硬阈值法以及本文算法进行了去噪处理, 采用的小波基为 sym8, 最大分解尺度为 5。其中得到虚警概率 $\alpha = 0.001$, 则 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 3.3, t_j = 3.3\sigma / 2^{j/2}, j = 1, 2, \dots, 5$, 其阈值各尺度独立。实验结果如图 1~图 2 所示。

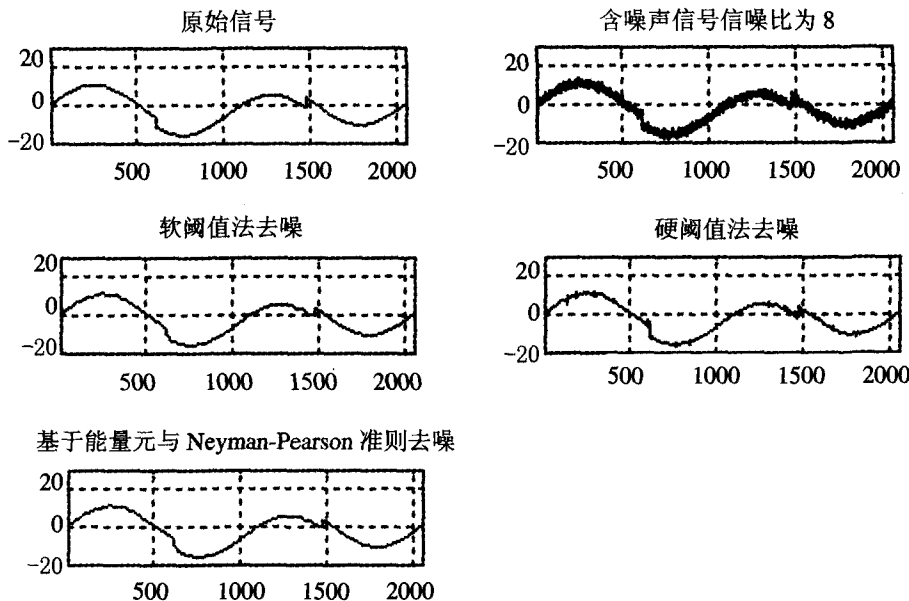


图 1 Heavy sine 信号实验图

从图 1~图 2 中可以看出硬阈值法去噪效果不如软阈值法,软阈值法不能够很好地反映原始信号,应该出现尖峰的地方被平滑了以及不连续的点被反映成连续。而本文算法能够兼顾传统两种方法的优点。不仅去噪效果优异,而且能够很好地反映原始信号。这里采用最小均方误差(MSE)作为依据,即 $MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i) - \hat{X}(i))^2$ 。其中 $X(i)$ 为原始信号, $\hat{X}(i)$ 为估计信号。三种方法处理 Blocks 信号后的输出信噪比以及最小均方误差比较如表 1 所示。

表 1 三种方法的信噪比和均方误差比较

| 性能测定相标 | 硬阈值法 | 软阈值法 | 本文算法 |
|----------|--------|--------|--------|
| 输出信噪比/dB | 20.123 | 26.432 | 26.846 |
| MSE | 0.3145 | 0.3759 | 0.2985 |

实验表明,本文算法的去噪效果明显,而且能够很好地保持原始信号的特征,具有较大的应用价值。

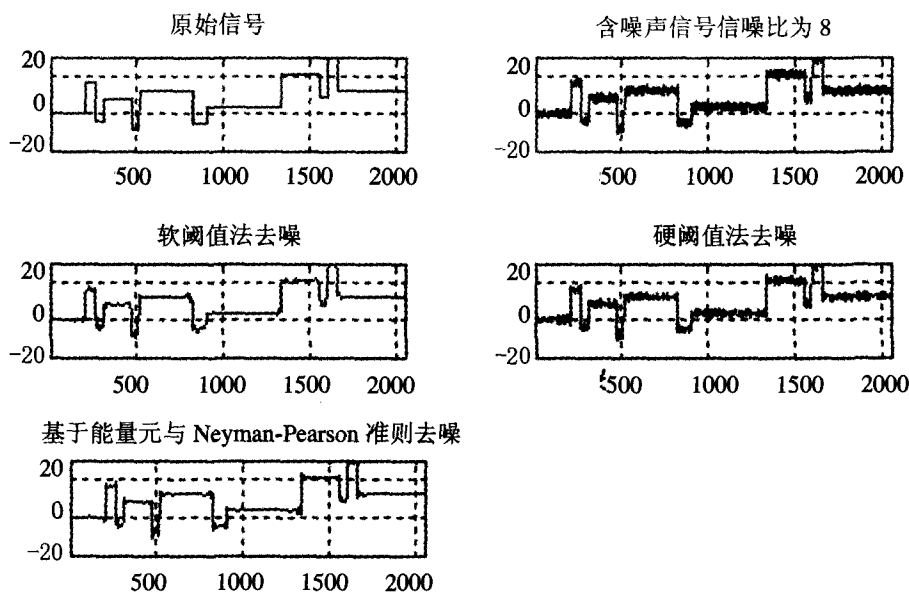


图 2 Blocks 信号实验图

结论 本文提出了一种基于能量元和 Neyman-pearson 准则的小波阈值去噪法,通过对小波系数进行能量元转化,更有利于虚警概率的估计,而小波阈值的选取是依据设定虚警概率后使得检测概率为最大的准则,并且各尺度独立。该方法能够有效地去除噪声,且保留了信号的一些重要特征。

参考文献

1 Weaver J B, YanSun X. Filtering noise from images with wavelet

transforms. *Magnetic Resonance in Medicine*, 1991, 24(6): 288~295
 2 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(4): 524~455
 3 Donoho D L. De-noising by soft thresholding. *IEEE Trans. In for Theory*, May 1995, 41(3): 613~627
 4 Shark L K, Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain. *IEEE Electronics letters*, 2000, 36(6): 581~582