

一种基于差异系数的稀疏度自适应图像去噪算法

焦莉娟¹ 王文剑²

(忻州师范学院计算机系 山西 忻州 034000)¹ (山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006)²

摘要 基于压缩感知的 K-means Singular Value Decomposition (K-SVD) 图像去噪算法具有良好的自适应性和细节恢复能力,但需事先给定稀疏度 K 。该方法的去噪效果会受到图像稀疏度的影响。另外,训练初始系数时用到的追踪类算法中通过向量内积值的大小评定图像分量间相关度的方法,因存在大值噪声点,容易造成假相关,从而影响去噪效果。提出基于差异系数的稀疏度自适应 K-SVD 去噪算法,通过引入差异系数来平衡因噪声点造成的假相关问题,同时使用相关度均值作为阈值来自适应地产生稀疏度 K ,避免因给定不恰当的稀疏度而影响去噪效果的问题。在 USC 标准库上的实验结果表明,所提算法在去噪效果方面有一定的优越性。

关键词 图像去噪, K 奇异值分解, 稀疏度自适应, 差异系数

中图分类号 TP391 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.02.016

Sparsity-adaptive Image Denoising Algorithm Based on Difference Coefficient

JIAO Li-juan¹ WANG Wen-jian²

(Department of Computer Xinzhou Teachers University, Xinzhou, Shanxi 034000, China)¹

(School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)²

Abstract With the remarkable adaptability and the details recovery capability, K-SVD is a highly effective method based on sparse representation theory in image denoising. But the sparsity K should be given in advance, and different images have different K values in fact. On the other hand, pursuit algorithms which are used in evaluating the relevance between vectors of an image by calculating vector inner product, are brought into K-SVD to train sparse coefficients. Denoising effect is reduced because a few noisy pixels are likely to cause false relevance. This paper addressed this problem and proposed a novel sparsity-adaptive speeded K-SVD (SASK-SVD) algorithm based on difference coefficient, which can improve the efficiency. The different coefficient is to eliminate false relevance. The sparsity K is adaptively generated by using the average correlation as the threshold. This study conducted extensive experiments to demonstrate these ideas. The experimental results show that the proposed method achieves the state-of-the-art denoising performance.

Keywords Image denoising, K-means singular value decomposition, Sparsity-adaptive, Difference coefficient

1 引言

图像去噪就是在保留图像有用信息的基础上尽可能地去除噪声,或是在去除噪声时尽可能完整地保留图像的边缘、细节等有用信息。传统的滤波去噪法^[1-2]认为图像的有用信息的频率较低,而噪声信号属于高频信号,通过过滤高频信号来达到去噪的目的。但实际信号中难免存在边缘、细节等有用的高频信号,因此经滤波去噪的图像存在失真、模糊等情况。

近年来,提出的基于压缩感知理论^[3]的稀疏去噪方法^[4-5]可有效避免图像信息与噪声信息频带重叠的问题,具有良好的去噪效果。稀疏去噪利用了图像信息间的相关性以及噪声信息的随机性,通过将信号在过完备库中进行稀疏分解达到

分离信号与噪声的目的。该方法具有信号基选取的自适应性及观测信号与真实信号间的不相关性,因而去噪效果良好。作为一种稀疏去噪算法, K-SVD 算法^[6-8]充分利用了稀疏去噪能很好地保留图像细节的优势。但由于算法中存在大量的矩阵运算,影响了去噪速度。文献^[9]基于分簇的思想提出一种快速的 SK-SVD 算法,其在一定程度上解决了原算法的效率问题。

稀疏去噪算法在产生稀疏系数阶段引入了追踪类算法,该算法通过计算残差与过完备基的内积来寻求最相似的原子。经典的正交匹配追踪算法 OMP^[10]是在匹配追踪算法 MP^[11]的基础上,通过对字典原子引入施密特正交化处理演化而来的。算法在每次迭代过程中,通过内积运算求得与信

收到日期:2017-03-19 返修日期:2017-05-03 本文受国家自然科学基金(61673249, 61273291), 山西省回国留学人员科研资助项目(2016-004), 山西省重点实验室开放课题基金(2016002), 山西省社科联重点课题(SSKLZDKT2017126)资助。

焦莉娟(1978—), 女, 硕士, 副教授, CCF 会员, 主要研究方向为图像信号处理; 王文剑(1968—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究方向为机器学习、数据挖掘、人工智能等, E-mail: wjwang@sxu.edu.cn(通信作者)。

号残差最相关的一列过完备基与之匹配,然后计算新的信号残差,不断迭代直到生成 K 稀疏的稀疏系数为止。每次迭代只引入一列原子,不仅影响算法效率,还可能产生过度匹配的情况。改进的正则化正交匹配追踪算法 ROMP^[12]在每次迭代过程中可选择 K 列原子,解决了 OMP 中的过匹配问题,但 K 值需事先给定。稀疏度自适应匹配追踪算法 SAMP^[13]引入了稀疏度自适应思想,但仍需要事先给定一个初始步长方可开始。压缩采样匹配追踪算法 CoSAMP^[14]通过引入回溯策略提高算法精度,但算法效率受到影响。分段正交匹配追踪算法 StOMP^[15]采用分段思想进一步提高了算法效率,但因固定参数大小,影响了去噪精度。近年来,提出的多路径匹配追踪算法 MMP^[16]通过多条路径迭代的策略有效提高了算法的重构速度。以上追踪类的改进算法都不同程度地改善了算法的去噪效果并提高了去噪效率,但稀疏度固定或半固定问题始终是限制去噪效果的问题之一。而不同图像经稀疏变换后其稀疏度不尽相同,采用不同变换基对同一幅图像进行变换得到的稀疏度一般也会不同。因此,SK-SVD 去噪方法将一个固定不变的 K 值作为已知参数必将影响算法的去噪效果。另外,算法中采用内积运算计算相关性进行过完备基匹配的运算中,若含噪图像中存在大值噪声等奇点元素,也会导致内积增大。因此,仅仅通过内积值的大小判定其相关性也会影响去噪效果。

针对因稀疏度固定以及假相似造成的图像去噪效果不佳的问题,本文提出一种基于差异系数的稀疏度自适应 SK-SVD 图像去噪算法 (Sparsity Adaptive SK-SVD, SASK-SVD),该算法在稀疏训练阶段自适应计算稀疏度 K ,并将此 K 值反馈到 SK-SVD 去噪过程中,提高了算法的自适应性;另外,在选择原子列的计算中,通过引入“差异系数”来修正因病态的数学奇点元素造成的假相似性。

2 稀疏去噪模型

为方便理解,本节以 SK-SVD 算法为例,对稀疏去噪模型进行简单介绍。SK-SVD 去噪模型将样本块按照灰度方差分为平滑簇和内容簇两部分,并分别进行去噪。其中,内容簇采用的 K-SVD 去噪过程主要由稀疏系数训练、字典训练和图像去噪三部分组成。

K-SVD 算法中原始信号 y 在过完备字典 D 上可线性表示为:

$$y = D\alpha, \text{ s. t. } \|y - D\alpha\|_p \leq \epsilon \quad (1)$$

在追踪算法产生的初始稀疏系数 α 的基础上,迭代训练逐列更新字典的候选原子列和稀疏系数,直到迭代次数满足预设条件为止,目标函数为:

$$\{\hat{Y}, \hat{D}, \hat{\alpha}\} = \arg \min \left\{ \lambda \|Y - X\|_2^2 + \sum_{ij} \mu_{ij} \|\alpha_{ij}\|_0 + \sum_{ij} \|D\alpha_{ij} - R_{ij}Y\|_2^2 \right\} \quad (2)$$

式(2)分别对信号的去噪误差、图像块的稀疏度及其重构误差做了限制。其中, α_{ij} 表示以第 i 行第 j 列像素点为中心的图像块对应的稀疏系数, R_{ij} 表示该图像块的索引。该算法的优势体现在字典逐列更新,将目标最小化到原子列,使每列

候选原子都能发挥最大的重构作用,充分减小整体重构误差。

$$\begin{aligned} \|Y - D\alpha\|_F^2 &= \left\| \left(Y - \sum_{i \neq k} d_i \alpha_i^T \right) - d_k x_k^T \right\|_F^2 \\ &= \|E_k - d_k x_k^T\|_F^2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, E_k 为第 k 列原子的重构误差:

$$E_k = Y - \sum_{i \neq k} d_i \alpha_i^T \quad (4)$$

去噪模型为:

$$\hat{Y} = (I + \sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij})^{-1} (\lambda x + \sum_{ij} R_{ij}^T D \hat{\alpha}_{ij}) \quad (5)$$

其中, I 为单位矩阵。

3 基于差异系数的稀疏度自适应去噪

文献[9]通过分簇去噪方法提高了算法的去噪效率,但稀疏度 K 为事先给定的固定值,并且在稀疏系数训练阶段通过向量内积运算确定与残差最相似的原子,这些都会影响图像最终的去噪效果。因此,本文将相似度均值作为阈值来替代原算法中的 K 值,并通过设置最小残差自适应生成稀疏度 K ;另外,在计算相似度时引入“差异因子”作为系数,以修正因内积运算造成的假相似现象。

3.1 差异系数

含噪信号的图像块向量中难免会有因噪声点产生的病态的数学奇点元素,这些元素会导致内积值增大从而造成假相似的情况。这种向量间的相似性弱,但奇点元素会导致假相似性,为此可以通过具体分析两个向量对应维度间的差异来抑制这种情况。为解决这一问题,可通过计算向量差,然后分析差值中大于某阈值 ϵ 的元素个数来确定两向量间的相似程度,并由此产生差异系数,将此差异系数引入向量内积计算中以平衡奇点造成的假相似。向量 a 和向量 b 之间的差异系数 δ_{ab} 的计算公式如下:

$$\delta_{ab} = 1 - \frac{n_{ab}}{n} \quad (6)$$

其中, n_{ab} 表示向量 a 与向量 b 的差值中绝对值大于阈值 ϵ 的元素个数, n 表示向量 a, b 的维度。对于 ϵ ,则通过实验取得最小重构误差时的值。式(6)中, $\frac{n_{ab}}{n}$ 体现了 a, b 两图像块向量中的差异值大于某一阈值的像素比例,因此差异系数 δ_{ab} 体现了两个向量整体的相似程度,即两向量差异值大于某一阈值的像素点越多,则差异系数值越小。将此能体现整体相似性的差异系数引入相似度计算公式,可解决因局部噪声点导致的相似度计算误差偏离的问题。改进后的原子相关性的计算公式为:

$$G_{ij} = \delta_{ij} \langle r^{(i-1)}, d_j \rangle \quad (7)$$

3.2 稀疏度自适应

为提高算法的效率和重构精度,SK-SVD 算法中只通过非 0 系数对列入候选的字典原子进行更新,因此字典的更新结果依赖于信号的稀疏度 K 值。本文选取 USC 标准图像库中的“boat”“house”和“bridge”3 幅图像进行实验说明。图 1 对比了不同 K 值的去噪效果。结果表明,在稀疏度 K 值从 25 变化到 45 的过程中,去噪图像的 PSNR 值基本呈先增后减的趋势,且不同样本的 PSNR 值达到顶峰所对应的 K 值不相同。实验中,3 幅图像分别在 K 值取 35, 32 和 28 时的去噪

效果最好,说明不同图像具有不同的稀疏度,而原SK-SVD算法中采用固定稀疏度必将影响图像的去噪效果。

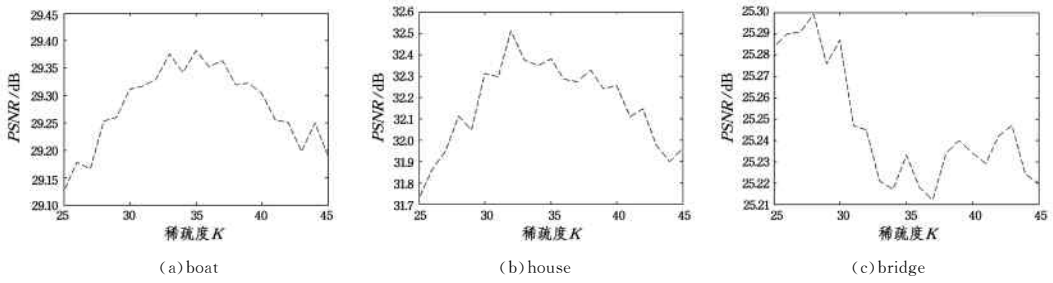


图1 去噪效果随稀疏度变化的情况

Fig.1 Denoising effect with change of sparse degree

为解决这一问题,本文在稀疏训练阶段采用稀疏度自适应的算法。该算法将原算法中每次迭代引入固定的 K 列原子改为每次自适应地引入 n 列原子,其中 n 值由本次迭代中信号残差 r 与字典原子的相关度均值作为阈值自适应产生,将相关度绝对值大于相关度均值绝对值的所有 n 列原子纳入候选。同样地,算法中通过投影计算残差 r^{j-1} 与字典原子 d_j 的相关性 G_{ij} :

$$|G_{ij}| = |\langle r^{j-1}, d_j \rangle| \quad (8)$$

其中, r^{j-1} 表示上次迭代后的信号残差。

3.3 去噪算法的模型

本文提出的基于差异系数的 SASK-SVD 算法中稀疏系数及稀疏度的生成步骤如下。

输入:过完备字典 D ,原始信号 y

输出:系数逼近系数 x ,稀疏度 K

初始化:残差 $r^0 = y$,索引集 $I_0 = \Phi, K=0, t=1$

- Step1 用式(6)计算残差 r^{t-1} 与字典原子的差异系数 δ ;
- Step2 用式(7)计算 r^{t-1} 与字典原子的相关性 G_{ij} 及其均值 \bar{G} ;
- Step3 原子初选:选择满足条件的 n 个原子,对应下标为 J ;
- Step4 正则化筛选:在以 J 为下标的原子集中选择满足正则化条件的 k_t 个原子,满足 $|U_i| \leq 2|U_j|$,对应下标为 J_0 ;
- Step5 更新: $I = I \cup J_0, K = K + k_t$;
- Step6 判断是否满足条件 $r^t > E$,满足则转 Step2,否则结束。

由原图像通过某种变换生成过完备初始字典 D_0 ,用以上改进的算法训练生成初始稀疏系数,同时自适应产生稀疏度 K ,转入 SK-SVD 算法进行去噪。

4 实验结果及分析

本文仿真实验均在 Matlab7 环境中实现,操作系统为 64 位的 Windows7,主要硬件环境为 Intel3.6G 双核处理器,8GB 内存。实验中差异系数阈值 ϵ 取 35。本文选取了 USC 标准图像库中的图像作为训练样本,添加了方差为 25、均值为 0 的高斯加性噪声。图 2(a)及图 2(b)给出了“boat”“house”等 5 幅图像的原图与噪声图。

(1)稀疏度自适应方法的去噪结果

输入图 2 中的噪声图像,采用原算法中计算内积的方法计算图像向量与字典基的相关性,采用本文提出的相关性均值作为阈值选取候选原子。产生稀疏系数的同时,将稀疏度 K 也作为参数输出。

图 3 为 5 幅图像的稀疏度柱状图。



图2 SK-SVD与本文方法去噪的效果图

Fig.2 Denoising effect of SK-SVD algorithm and the proposed algorithm

从图 3 可以看出,采用自适应稀疏度的 SK-SVD 算法的去噪效果明显好于原来稀疏度固定的去噪效果,平均去噪峰值信噪比 $PSNR$ 比原算法有提高,但每个样本各自的 $PSNR$ 值的提高程度不一,这与图片本身的稀疏度有关。另外,将图 3 中的 K 值与图 1 所示的实验结果进行对比,可看到本算法

自适应生成的稀疏度与手工调试得到的去噪效果最佳的稀疏度基本吻合。

(2) 差异系数对去噪结果的影响

输入图 2 中的噪声图像,在原 SK-SVD 算法的基础上,通过式(6)计算差异系数,并将此系数引入相似性计算公式。结果表明,对于大部分样本,引入差异系数后的去噪效果优于无差异系数的情况,但也有个别样本改进后的去噪效果提升不明显。这是因为本文提出的差异系数只用于修正“假相似性”元素造成的去噪误差,而算法并未对含噪样本中的相似性的真伪加以判断和区别。

(3) 同时引入差异系数及稀疏度自适应的去噪结果

本实验将以上两种改进做了融合,在已经验证了自适应稀疏度与差异系数各自有效性的基础上,验证将二者融合后改进算法的有效性。实验结果表明,本文改进的 SASK-SVD 去噪算法较原 SK-SVD 去噪算法在去噪效果方面有明显改善。

以上实验结果如表 1 所列。

表 1 SK-SVD 与本文方法去噪效果的比较

Table 1 Comparison of SK-SVD and the proposed algorithm

样本	PSNR _{IN}	PSNR _{OUT}			
		SK-SVD	稀疏度 自适应	差异系数	SASK-SVD
boat	20.1975	31.3643	32.0820	31.8233	32.7451
house	20.1615	32.9557	33.8900	33.3442	34.6210
bridge	20.1641	28.2985	29.1123	29.2529	29.3429
lena	20.1866	32.2217	33.5143	33.3926	33.7701
peppers	20.1245	30.2834	31.2792	30.2123	31.2430
平均	20.1668	31.0247	31.9755	31.6051	32.3444

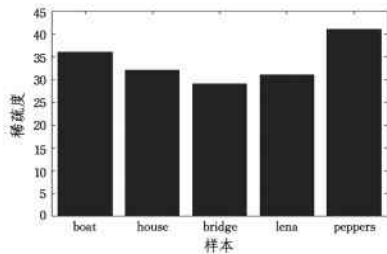


图 3 不同样本的稀疏度柱状图

Fig. 3 Sparse degree histogram of different samples

(4) 算法的鲁棒性

为进一步说明 SASK-SVD 算法在去噪效果方面的鲁棒性,本文选取“house”图像,添加方差为 10, 20, 30, 40, 50 的高斯加性噪声生成 5 个含噪样本,分别用 SK-SVD 和 SASK-SVD 算法去噪。图 4 为两种去噪算法的输出峰值信噪比随加入的噪声方差的变化情况,可直观地看到,本文算法在去噪效果方面优势明显,基本不受噪声方差大小的影响。

(5) 同类去噪算法的比较

本文算法主要在稀疏分解阶段进行了优化,提高了算法精度。为了验证本文算法在去噪方面的优越性,本实验将 OMP^[10], ROMP^[12], MMP^[16] 3 种算法以及本文算法分别应用于 SK-SVD 法对 5 幅样本进行去噪处理,去噪结果如表 2 所列。由实验结果可知,本文算法在去噪精度方面比现有算法有所提高。

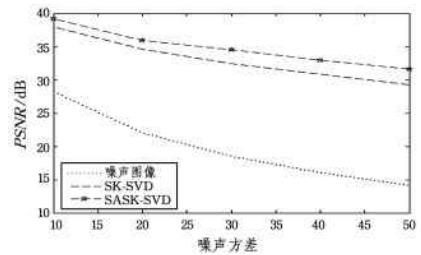


图 4 SK-SVD 与本文算法在噪声方差递增变化时的去噪效果对比

Fig. 4 Comparison of denoisy result of SK-SVD and SASK-SVD when increasing value of σ

表 2 OMP, ROMP 及 MMP 与本文 SASK-SVD 方法的去噪效果比较
Table 2 Comparison of denoisy result of OMP, ROMP, MMP and the proposed algorithm

样本	PSNR _{IN}	PSNR _{OUT}			
		OMP	ROMP	MMP	本文方法
boat	20.1975	31.3643	31.8846	31.3200	32.7451
house	20.1615	32.9557	33.5547	33.1376	34.6210
bridge	20.1641	28.2985	28.4556	28.3491	29.3429
lena	20.1866	32.2217	31.3922	32.2573	33.7701
peppers	20.1245	30.2834	30.8927	30.9681	31.2430
平均	20.1668	31.0247	31.2360	31.2064	32.3444

结束语 针对 SK-SVD 算法需事先确定图像稀疏度且稀疏度固定不变,以及因向量内积造成的假相似而影响去噪效果的问题,在前期工作的基础上,本文引入了体现图像间实际差别程度的差异系数来计算向量间的相似性,并以相关度均值为阈值,每次选取不固定列数的原子,实现了稀疏度的自适应生成,有效地避免了假相关问题,取得了很好的实验结果。但实验中引入差异系数的去噪效果在稳定性方面稍有欠缺,如何正确识别奇异点并有针对性地引入差异系数,是下一步的研究工作。

参考文献

- [1] YUAN S Q, TAN Y H. Difference-type noise detector for adaptive median filter[J]. IEEE Electronics Letters, 2006, 42(8): 454-455.
- [2] MAGGIONI M, KATKOVNIK V, EGIAZARIAN K. Nonlocal transform-domain filter for volumetric data denoising and reconstruction [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(1): 119-133.
- [3] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [4] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [5] LIU Q, ZHANG C, GUO Q, et al. Adaptive sparse coding on PCA dictionary for image denoising[J]. The Visual Computer, 2016, 32(4): 535-549.
- [6] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.

- 葛启承,林锦国,肖迪.基于信息熵的图像阈值选取算法[J].江苏科技大学学报(自然科学版),2010,24(5):485-488.
- [6] CHEN S W, LIU Y C. Improved Canny Edge Detection Algorithm Based on Minimum Cross Entropy[J]. Video Engineering, 2013, 37(1): 165-168. (in Chinese)
陈世文,刘越畅.一种基于最小交叉熵的Canny边缘检测算法[J].电视技术,2013,37(1):165-168.
- [7] LUN X M, HOU Y M. Optimal threshold selection for image segmentation utilizing entropy-max algorithm[J]. Computer Engineering and Design, 2015, 36(5): 1265-1268. (in Chinese)
伦向敏,侯一民.运用迭代最大熵算法选取最佳图像分割阈值[J].计算机工程与设计,2015,36(5):1265-1268.
- [8] WEN K F, YE S T, WAN Z P. Infrared target segmentation algorithm based on maximum entropy threshold in complex background[J]. LASER & INFRARED, 2016, 46(1): 103-108. (in Chinese)
温凯峰,叶仕通,万智萍.复杂背景下的最大熵阈值红外目标分割算法[J].激光与红外,2016,46(1):103-108.
- [9] WANG L, DUAN H C H, WANG J L. A fast algorithm for three-dimensional Otsu's thresholding method[C]// IEEE International Symposium on IT in Medicine and Education. 2008: 136-140.
- [10] XU L M, LV J D. Improved PCNN bayberry image segmentation algorithm based on minimum cross entropy[J]. Journal of Northwest Normal University (Natural Science), 2016, 52(1): 43-46. (in Chinese)
徐黎明,吕继东.基于最小交叉熵的改进PCNN杨梅图像分割算法[J].西北师范大学学报(自然科学版),2016,52(1):43-46.
- [11] BUI T D, CHUNSOO A, JITAE S. Fast localized active contour for inhomogeneous image segmentation[J]. IET Image Processing, 2016, 10(6): 483-494.
- [12] CHEN Y Q, DUAN J, ZHU Y, et al. Research on the image complexity based on texture features[J]. Chinese Optics, 2015, 8(3): 407-412. (in Chinese)
陈燕芹,段锦,祝勇,等.基于纹理特征的图像复杂度研究[J].中国光学,2015,8(3):407-412.
- [13] DONG Z Y, JIANG L X, WANG J Y, et al. Modified One-dimensional Otsu Algorithm Based on Image Complexity[J]. Computer Science, 2015, 42(6A): 171-174. (in Chinese)
董忠言,蒋理兴,王俊亚,等.基于图像复杂度的一维otsu改进算法[J].计算机科学,2015,42(6A):171-174.
- [14] ANDREW M, GHANG D. Fast algorithm for least-squares based image prediction[J]. IET Image Processing, 2016, 10(8): 582-589.
- (上接第97页)
- [7] ROMANO Y, ELAD M. Improving K-SVD denoise by post-processing its method-noise[C]// Proceedings of International Conference on Image Processing. 2013: 435-439.
- [8] RAJA H, BAJWA W U. Cloud K-SVD: A Collaborative Dictionary Learning Algorithm for Big, Distributed Data [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 4(1): 173-188.
- [9] JIAO L J, WANG W J. A Speeded-up K-SVD Image Denoising Algorithm[J]. Mini-Micro Systems, 2016, 37(7): 1608-1612. (in Chinese)
焦莉娟,王文剑.一种快速的K-SVD图像去噪方法[J].小型微型计算机系统,2016,37(7):1608-1612.
- [10] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [11] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [12] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.
- [13] DO T T, GAN L, NGUYEN N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing[C]// IEEE 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2008: 581-587.
- [14] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301-321.
- [15] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [16] KWON S, WANG J, SHIM B. Multipath matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(5): 2986-3001.