中介逻辑 ML 的语法完全性*)

潘正华

(江南大学理学院数理研究所　无锡 214122)

摘　要　中介逻辑 ML (Medium Logic)是近年提出的一种非经典逻辑。在 ML 的系统特征理论中已证明 ML 具有语义完全(完备)性。本文研究了 ML 的语法完全性，证明了如下结果：(1) ML 中的中介命题逻辑系统 MP 及其扩张 MP^* 是语法完全的，中介谓词逻辑系统 MF 与其扩张 MF^*，以及含有等词的中介谓词逻辑系统 ME 不是语法完全的。(2) 一般地，如果一个协调的逻辑形式系统不是语法完全的，则它的任何协调的扩张系统也不是语法完全的。

关键词　中介逻辑，形式系统，协调性，语义完全性，语法完全性

Syntactic Completeness of Medium Logic (ML)

PAN Zheng-Hua

(School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122)

Abstract　Medium Logic (ML) is a kind of non-classical logic, the semantic completeness of ML had been proven in theory of semantic characteristic. This paper study the syntactic completeness of ML and proved the following results: (1) medium propositional logic MP and its extension MP^* have syntactic completeness, medium first order logic MF and its extensions MF^*, ME have no syntactic completeness. (2) if a consistent logical formal system has no syntactic completeness, then any consistent extensions of this system have no syntactic completeness either.

Keywords　Medium logic (ML), Logical formal system, Consistency, Syntactic completeness, Semantic completeness

1　引言

中介逻辑 ML (Medium Logic)[1,2]是我国学者 1985 年提出的一种非经典逻辑理论。ML 由中介命题逻辑演算系统 MP 及其扩张 MP^*，中介谓词逻辑演算系统 MF 及其扩张 MF^*，以及带等词的中介谓词逻辑演算系统 ME 组成。迄今，该逻辑理论及应用研究已涉及到形式系统理论、自动推理、机器学习、数据库理论及程序设计语言等领域[13,16,17]。关于它的系统特征研究，1987 年潘正华首先给出中介谓词逻辑的语义解释(公式真值集为{0，(0，1)，1})[5~8]，1988 年邹晶、李祥等给出中介逻辑的三值语义解释(公式真值集为{0，1，～})[9~11]，2003 年潘正华给出中介谓词逻辑的 n 值和无穷值语义解释(公式真值集为[0，1])[16,17]，他们在不同的语义模型下证明了中介逻辑具有协调性、可靠性和语义完全(完备)性。然而，一个逻辑形式系统的完全性包括语义的和语法的完全性，虽然中介逻辑已被证明具有语义完全性，但是，中介逻辑是否具有语法完全性，至今未有结果。

所谓逻辑形式系统(即形式化逻辑系统)的语法完全性[3]，有如下定义：

一个协调的逻辑形式系统 S 是语法完全的，当且仅当，若将 S 中任一不可证的合式公式 A 加到 S 上作为公理(或公理模式)，则所得的形式系统是不协调的。

由文[3]知，经典逻辑中的命题逻辑系统是语法完全的，一阶逻辑系统不是语法完全的(本文将给出另一种证明)；在非经典逻辑中，无论是模态命题逻辑系统还是模态一阶逻辑系统，它们都不是语法完全的。由于中介逻辑也是一种非经典逻辑[13]，因而可能认为，它的语法完全性结果可能与模态逻辑无异。然而本文表明，中介逻辑是否语法完全的与模态逻辑结果不同，即中介逻辑的命题逻辑系统及其扩张是语法完全的，而中介谓词逻辑系统及其扩张不是语法完全的。

本文沿用文[1,2]中的符号。

2　逻辑形式系统与其扩张的一些关系和性质

一个逻辑形式系统的语法完全性，从定义可看出，它与扩张的系统以及协调性相关，因此我们首先研究逻辑形式系统与其扩张的一些关系及性质。由于一般逻辑形式系统中都具有分离规则、演绎定理以及 $\vdash \neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$，$(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$ 的特征，因此，为便于讨论，我们约定文中的逻辑形式系统都具有这些特征。

定义 1　一个逻辑形式系统 S 是协调的，当且仅当 S 中不存在合式公式 A，A 与 $\neg A$ 都是 S 的定理。

定义 2　设 S_1 是一个协调的逻辑形式系统。若 S_1 的任何合式公式都是形式系统 S_2 的合式公式，S_1 的任何定理都是 S_2 的定理，则称 S_2 是 S_1 的扩张系统。如果 S_1 中不存在合式公式 A，A 与 $\neg A$ 都是 S_2 的定理，则称 S_2 是 S_1 的协调的扩张系统。

显然，若扩张系统 S_2 是协调的，则原系统 S_1 必定协调。否则，根据定义 1，S_1 中存在合式公式 A，有 $\vdash_{S1} A$ 且 $\vdash_{S1} \neg A$，由定义 2，则有 $\vdash_{S2} A$ 且 $\vdash_{S2}\neg A$，即 S_2 是不协调的。

定理 1　逻辑形式系统 S_1 的一个扩张 S_2 是协调的，当且仅当 S_1 中存在一个合式公式，它不是 S_2 的定理。

证明：设 S_2 是协调的。则由定义 2，对于 S_1 的任何合式公式 A，A 与 $\neg A$ 不能都是 S_2 的一个定理。

反之，假设 S_2 不是协调的。我们证明 S_1 中不存在不是 S_2 的一个定理的合式公式，即 S_1 中任何合式公式都是 S_2 的定理。令 A 为 S_1 的任一合式公式，则 A 也是 S_2 的合式公式，因 S_2 不协调，则由定义 1，S_2 中存在合式公式 B，有 $\vdash_{S2} B$ 且 $\vdash_{S2}\neg B$。由于 $\vdash \neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$，即 $\vdash_{S1}\neg B\rightarrow(B\rightarrow A)$，而

*)国家自然科学基金(60575038)资助课题。

S_2 为 S_1 的一个扩张，因此有 $\vdash_{S2} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$。现在，两次运用分离规则，我们得到 $\vdash_{S2} A$，即 S_1 的任一合式公式 A 都是 S_2 的定理。 □

引理 1 设逻辑形式系统 S_1 的一个扩张 S_2 是协调的，令 A 是 S_1 的一个公式且不是 S_2 的定理。那么，将 $\neg A$ 增加为 S_2 的公理(或公理模式)而得到的扩张 S_2^* 是协调的。

证明：令 A 是 S_1 的一个公式且不是 S_2 的定理，假设 S_2^* 不是协调的。则存在公式 B，有 $\vdash_{S2^*} B$ 与 $\vdash_{S2^*} \neg B$。如定理 1 的证明，可得 $\vdash_{S2^*} A$。令 S_2 的公理集为 Γ，则 $\vdash_{S2^*} A$ 等价于 $\Gamma, \neg A \vdash_{S2} A$，据演绎定理，$\Gamma \vdash_{S2} \neg A \rightarrow A$，即 $\vdash_{S2} \neg A \rightarrow A$。由于 $\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$，即 $\vdash_{S1} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$，因此，$\vdash_{S2} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$。由分离规则，得到 $\vdash_{S2} A$，即 A 是 S_2 的一定理。这与 A 不是 S_2 的定理矛盾。因此，S_2^* 是协调的。 □

上述结论给出了逻辑形式系统的一个扩张保持协调性的充分条件，即存在公式不是扩张系统的定理。并且，由语法完全性定义表明，扩张系统如果不是语法完全的，则还可对扩张系统再进行扩充得到新的协调的扩张系统。扩充中一旦协调性失去，扩张系统就失去意义。至此我们可证明，一个逻辑形式系统与其扩张关于语法完全性具有如下关系：

定理 2 设 S_2 是逻辑形式系统 S_1 的任一协调的扩张系统。若 S_1 不是语法完全的，则 S_2 也不是语法完全的(或者说，若 S_2 是语法完全的，则 S_1 必定语法完全)。

证明：因 S_1 不是语法完全的，则由语法完全性定义，S_1 中存在不可证公式 A(记为 $\Vdash_{S1} A$)，将 A 加到 S_1 上作为公理(或公理模式)得到的扩张 S_1^* 是协调的。由于在协调的逻辑形式系统中任取一命题词 q，有 $\Vdash q$ 与 $\Vdash \neg q$，因此，在 S_1^* 中存在命题词 $r\ (\neq A)$，有 $\Vdash_{S1^*} r$，$\Vdash_{S1^*} \neg r$。

假设 S_2 是语法完全的。则 S_1^* 是语法完全的(因 S_1^* 是 S_1 的一个协调的扩张)。因 $\Vdash_{S1^*} \neg r$，由语法完全性定义，将 $\neg r$ 加到 S_1^* 上作为公理(或公理模式)而得到的扩张系统不是协调的。然而，又因 $\Vdash_{S1^*} r$，则根据引理 1，将 $\neg r$ 加到 S_1^* 上作为公理(或公理模式)得到的扩张系统却是协调的。因此，矛盾。所以 S_2 不是语法完全的。 □

3 中介逻辑系统的语法完全性

定理 3 中介命题逻辑系统 MP 及扩张 MP*、中介一阶逻辑系统 MF 及扩张 MF* 与 ME 都具有协调性，可靠性和语义完全性[5~12,16,17]。

定理 4 中介命题逻辑系统 MP 和扩张 MP* 是语法完全的。

证明：设 Λ 是 MP 的合式公式模式，而不是 MP 的定理模式。把 Λ 加到 MP 上作为公理模式，则得到一新的形式系统 MP^+。

令 Λ 中的所有命题变元为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，由假设，则有许多具有 Λ 模式的 MP 中的合式公式不是 MP 的定理，令其中一个为 A^*，A^* 中分别相应于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的子公式为 $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_n^*$。

因 MP 是弱完全的，所以 A^* 不是常真的。因此存在 MP 的语义解释 I，如 $I: \langle D, \psi \rangle$[5~11]，在其赋值 ψ 下，$\psi(A^*) = 0$ 或 $\psi(A^*) = t$。

我们作如下替换：

(1)在 A^* 中，将 $\psi(A^*) = 0$ 时使得 $\psi(A_i^*) = 1$ 的 A_i^* 替换为 $P \rightarrow P$，使 $\psi(A_i^*) = 0$ 的 A_i^* 替换为 $\urcorner (P \rightarrow P)$，使 $\psi(A_i^*) = t$ 的 A_i^* 替换为 $\sim (P \rightarrow P)$，其结果令为 A^{**}。

(2)在 A^* 中，将 $\psi(A_i^*) = t$ 时作(1)中同样的替换，其结果令为 A^{***}。

A^{**}，A^{***} 显然分别是具有 Λ 模式的合式公式，故都是 MP^+ 的定理，即 $\vdash_{MP^+} A^{**}$，$\vdash_{MP^+} A^{***}$。

然而，对于 MP 的任何解释[5~12],[16,17]，在其赋值 Φ 下，$\Phi(P \rightarrow P) = 1$，$\Phi(\urcorner (P \rightarrow P)) = 0$ 和 $\Phi(\sim (P \rightarrow P)) = t$，因而，$\Phi(A^{**}) = 0$，$\Phi(A^{***}) = t$，即表明 A^{**} 与 A^{***} 都是 MP 的不可满足的合式公式。由于 $\Phi(A^{**}) = 0$ 时 $(\urcorner A^{**}) = 1$，$\Phi(A^{***}) = t$ 时 $\Phi(\sim A^{***}) = 1$，因此，根据 MP 的弱完全性，$\urcorner A^{**}$ 与 $\sim A^{***}$ 都是 MP 的定理。

因 MP 是 MP^+ 的子系统，所以，$\urcorner A^{**}$、$\sim A^{***}$ 亦是 MP^+ 的定理，即 $\vdash_{MP^+} \urcorner A^{**}$，$\vdash_{MP^+} \sim A^{***}$。

至此，有 $\vdash_{MP^+} A^{**}$ 且 $\vdash_{MP^+} \urcorner A^{**}$、$\vdash_{MP^+} A^{***}$ 且 $\vdash_{MP^+} \sim A^{***}$。据 MP 的一致性定义[5~12],[16,17]，MP^+ 是不一致的。由定义 1，MP 是语法完全的。

由于 MP* 是在 MP 中增加联结词"$<$"得到的[1]，并且，$A < B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$，因而，同理我们可证明，MP* 是语法完全的。 □

文[3]证明了经典命题逻辑具有语法完全性。由上述结果，我们可得到一个更为简便的证明方法：因为经典命题逻辑是中介命题逻辑 MP 的子系统[13]，即 MP 是经典命题逻辑的一个协调的扩张系统，因此，据定理 2 和定理 4，即可得知经典命题逻辑是语法完全的。

采用语形的推演方法可证明经典的一阶逻辑系统不是语法完全的[4]，我们也可用下面语义的方法予以证明。因为经典一阶逻辑具有协调性、可靠性和弱完全性，它的语义解释是一个二元结构 $\langle D, \psi \rangle$，D 是非空个体域，ψ 是 D 上的一个赋值函数，系统的解释个数与 D 中个体数 k 相关。因此，若要表明系统的一个公式 A 是永真的，则系统的弱完全性要求公式 A 在 k 为任何值的系统解释下都为真。然而，经典一阶逻辑系统中存在许多公式，它们在 $k = i$ 时的系统解释下可为真，但在 $k = j (k \neq j)$ 时的系统解释下可为假，因而，决定了经典一阶逻辑系统是否语法完全有如下结果。

定理 5 经典一阶逻辑系统不是语法完全的。

证明：令 A_k 为经典一阶逻辑系统 L 的一个公式：$\exists x F(x) \rightarrow \forall x F(x)$。我们可对 L 给予一个解释 $I_1: \langle D_1, \psi_1 \rangle$。$D_1 = \{d_1, d_2\}$，$\psi_1(x) = d_1$，$\psi_1(F) = \{d_1\}$；若 A, B 为公式，则有 $\psi_1(A) = 1$ 当且仅当 $\psi_1(\neg A) = 0$；$\psi_1(A) = 0$ 当且仅当 $\psi_1(\neg A) = 1$；$\psi_1(A \rightarrow B) = 1$ 当且仅当，$\psi_1(A) = 0$ 或 $\psi_1(B) = 1$；$\psi_1(A \rightarrow B) = 0$ 当且仅当，$\psi_1(A) = 1$ 且 $\psi_1(B) = 0$。

A_k 在 I_1 解释下，可得

(1) $\psi_1(\exists x F(x)) = 1$，

(2) $\psi_1(\forall x F(x)) = 0$，因为存在 x，$\psi_1(F(x)) = 0$(即 $\psi_1(x) = d_2$ 时，$\psi_1(F(x)) = 0$)，所以，$\psi_1(\exists x F(x) \rightarrow \forall x F(x)) = 0$，即 A_k 不是永真公式。

由于 L 具有可靠性[3,4]，因此，A_k 不是 L 的定理。将 A_k 作为公理加到 L 中，得到 L 的一个扩张系统 L^*。

我们可对 L^* 给予一个解释 $I_2: \langle D_2, \psi_2 \rangle$。$D_2 = \{d_1\}$，$\psi_2(x) = d_1$，$\psi_2(F) = \{d_1\}$；若 A, B 为公式，则有 $\psi_2(A) = 1$ 当且仅当 $\psi_2(\neg A) = 0$；$\psi_2(A) = 0$ 当且仅当 $\psi_2(\neg A) = 1$；$\psi_2(A \rightarrow B) = 1$ 当且仅当，$\psi_2(A) = 0$ 或 $\psi_2(B) = 1$；$\psi_2(A \rightarrow B) = 0$ 当且仅当，$\psi_2(A) = 1$ 且 $\psi_2(B) = 0$。

A_k 在 I_2 解释下，可得

$\psi_2(\exists x F(x)) = 1$，$\psi_2(\forall x F(x)) = 1$

所以，$\psi_2(\exists x F(x) \rightarrow \forall x F(x)) = 1$。

由于 L^* 的其它公理都是 L 的公理，L^* 的推理规则都是 L 的推理规则，它们在任何解释下都应取值 1，因而 L^* 的任何定理在解释 I_2 下都为 1 值。

但是,因为 $\psi_2(\neg(\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)))=0$,即 A_k 的否定 $\neg A_k$ 在解释 I_2 下取值不是 1,所以,L 的公式 $\neg A_k$ 不是 L^* 的定理。据定理 1,则 L_* 是协调的。因此,由语法完全性定义,L 不是语法完全的。 □

在各种一阶逻辑形式系统中,经典一阶逻辑是最基本的系统[14,15],而中介一阶逻辑系统 MF 为经典一阶逻辑的扩张[13],因此,由定理 2,我们可得到结果:

定理 6 中介一阶逻辑系统 MF 及其扩张 MF^*、ME(带等词的扩张)都不是语法完全的。

参 考 文 献

1 朱梧槚,肖奚安. 中介逻辑的命题演算系统(I),(II),(III). 自然杂志,1985, 8(4): 315, 8(5): 394, 8(6):473

2 肖奚安,朱梧槚. 中介逻辑的谓词演算系统(I),(II). 自然杂志,1985, 8(7): 540, 8(8): 601

3 周礼全. 模态逻辑引论. 上海:上海人民出版社,1986. 51~59, 88~115, 152~165

4 Hamilton A G. Logic for mathematicians. Cambridge University Press, 1978. 27~45, 71~100

5 Pan Zhenghua. On the Completeness of Medium Proposition Logic MP. In: Proc of International Symposium Fuzzy System and Knowledge Engineering. Guangzhou: Guangzhou University Press, 1987

6 Pan Zhenghua. Construction of a Model of Medium Logical Calculus System (ML). In: Proc of Workshop on Knowledge-Based Systems and Models of Logical Reasoning. Egypt: Cairo University Press, 1988

7 Pan Zhenghua. On the Reliability of the Predicate Calculus System (MF) of Medium Logic. In: Proc of IEEE -The Nineteenth International Symposium On Multiple-Valued Logic. Washington: IEEE Computer Society Press, 1989. 64~69

8 Pan Zhenghua. On the Reliability and Completeness of the Predicate Calculus System MF of Medium Logic. In: Proc of North American Fuzzy Information Society' 90. Toronto: University of Toronto Press, 1990. 323~325

9 邹晶. 中介逻辑的命题演算系统 MP^* 的语义解释及可靠性,完备性. 数学研究与评论,1988, 8(3): 263~265

10 邹晶. 带等词的中介谓词逻辑系统 ME^* 的语义解释及可靠性,完备性. 科学通报,1988, 33(13): 863~864

11 李祥,李广元. "中介逻辑"的特征问题. 科学通报,1988, 33(22): 686~1689

12 Zhu JY, Xiao XA, Zhu WJ. A Survey of the Development of Medium Logic Calculus System and the Research of Its Semantic. A Friendly Collection of Mathematical Papers I. Jilin: Jilin University Press, 1990. 183~189

13 朱梧槚,肖奚安. 数学基础概论. 南京:南京大学出版社,1996. 186~382

14 张玉平. 计算机科学中的一些逻辑理论的推理性质研究. 1999, 22(6): 571~576

15 Buss S R, Kechris A S, Pillay A, Shore R A. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century. The Bulletin of Symbolic Logic, 2001, 7(2):169~196

16 潘正华. 中介谓词逻辑系统的 λ-归结. 软件学报,2003, 14(3): 345~349

17 Pan Zheng-hua, Zhu Wu-jia. An Interpretation of Infinite Valued for Medium Proposition Logic. In: Proc of IEEE-Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics. IEEE Catalog Number: 04EX826, ISBN: 0-7803-8403-2, 2004, 4(7): 2495~2499

(上接第 125 页)

准则层的求解结果,"对目标层的值"是方案层对目标层的求解结果,即"评价值"乘此指标在目标层占的权值。

表 1 方案层在性能指标的评价值

软件	A	B	C	D	评价值	对目标层的值
A	1	7	3	2	0.495	0.1980
B	1/7	1	1/3	1/4	0.064	0.0256
C	1/3	3	1	1/2	0.165	0.0660
D	1/2	4	2	1	0.276	0.1104

$\lambda_{max}=4.0206$ $C.I.=0.0068$ $C.R.=0.007<0.1$

表 2 方案层在扩展和可维护性指标的评价值

软件	A	B	C	D	评价值	对目标层的值
A	1	1	7	7	0.4375	0.0656
B	1	1	7	7	0.4375	0.0656
C	1/7	1/7	1	1	0.0625	0.0094
D	1/7	1/7	1	1	0.0625	0.0094

$\lambda_{max}=4$ $C.I.=0$ $C.R.=0<0.1$

表 3 方案层在存储冗余指标的评价值

软件	A	B	C	D	评价值	对目标层的值
A	1	1/7	1/3	1/5	0.063	0.0063
B	7	1	2	1	0.391	0.0391
C	3	1/2	1	1/2	0.187	0.0187
D	5	1	2	1	0.359	0.0359

$\lambda_{max}=4.0107$ $C.I.=0.036$ $C.R.=0.004<0.1$

4.4 映射方法灰度关联分析

由表 1~4 的数据构造评价指标最优参照数列,记为 X_0,以此作为评价的标准,则 $X_0=\{0.1980, 0.0656, 0.0391, 0.2366\}$,根据式(2)关联系数矩阵为:

表 4 方案层在查询处理指标的评价值

软件	A	B	C	D	评价值	对目标层的值
A	1	7	5	8	0.676	0.2366
B	1/7	1	1/2	1	0.086	0.0301
C	1/5	2	1	2	0.156	0.0546
D	1/8	1	1/2	1	0.082	0.0287

$\lambda_{max}=4.0122$ $C.I.=0.004$ $C.R.=0.005<0.1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0.7783 & 1 \\ 0.4005 & 1 & 1 & 0.3580 \\ 0.4659 & 0.6720 & 0.8495 & 0.3875 \\ 0.5679 & 0.6720 & 0.9730 & 0.3564 \end{matrix}$$

加权关联度为(0.9446, 0.6896, 0.5937, 0.6423),映射方法综合排序为(A,B,D,C)。

结束语 映射方法性能的综合评价是一项复杂的系统评价过程,涉及的影响因素众多。本文仅就影响映射方法综合性能的基本要素,运用 AHP 方法建立层次评价体系并对定性指标定量化分析,应用灰色关联分析对继承关系的四种映射方法进行了综合评价,得出定量综合评价结果,可供 O/R 映射时决策参考。本方法理论上先进,技术上可行,与传统评价方法相比,具有更高的整体性和精确性,在 O/R 映射领域具有推广、应用价值。但是影响映射方法综合性能的因素是相当复杂的,综合评价的结果也与指标的选取有关,在具体决策中,还应结合具体实际情况进行一定的定性分析,优化评价因素的筛选机制,做出更为合理的判断。

参 考 文 献

1 Ambler S W. The fundamentals of mapping objects to relational database, 1997

2 Keller W. Mapping Objects to Tables, 2003

3 吴祈宗. 运筹学与最优化方法[M]. 北京:机械工业出版社,2003

4 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1993