

量子搜索算法体系的仿真实现及研究

孙 力¹ 须文波²

(江南大学网络教育学院 无锡 214036)¹ (江南大学信息工程学院 无锡 214122)²

摘 要 核磁共振(NMR)技术被认为是最为有效的实现量子计算的物理体系之一。多量子算符代数理论可以将么正变换分解为一系列有限的单量子门和对角双量子门的组合。本文以核磁共振和多量子算符代数理论为基础,提出了实现任意相位旋转角度的一般化量子搜索算法的核磁共振脉冲序列设计方法,并在量子计算仿真程序上进行了双量子位的不同相位旋转角度的量子搜索算法的实验验证。

关键词 核磁共振,一般化量子搜索算法,相位旋转,脉冲序列

Simulation and Investigation of Quantum Search Algorithm System

SUN Li¹ XU Wen-Bo²

(School of Distance Education, Southern Yangtze University, Wuxi 214036)¹

(School of Information Engineer, Southern Yangtze University, Wuxi 214122)²

Abstract NMR technology has been considered as one of the most effective physical system to realize quantum computation. As multiple-quantum operator algebra theory mentioned, any unitary transformation can be decomposed into a sequence of a limited number of one-qubit quantum gates and two-qubit diagonal gates. Based on these backgrounds, we proposed the method to form NMR pulse sequences to realize the generalized quantum search algorithm with arbitrary phase rotation and finished experimentally the algorithm with two-qubit and different phase rotations respectively on a Quantum Computer Emulator.

Keywords NMR, Generalized quantum search algorithm, Phase rotations, Pulse sequences

1 引言

Grover 量子搜索算法由 Grover 于 1996 年提出^[1]。依靠量子并行计算的优势,与传统的搜索算法相比,在遍历搜索问题中该算法可以大大减少搜索成功的运算次数。经过多年的改进,该算法逐步扩展,目前已经出现了一般化量子搜索算法^[2],能够适应各种不同的搜索需求。

量子计算是以量子物理和数学的基本理论为基础,它要求代表量子位(qubits)的二态量子体系之间存在相互作用,并可以用于计算。而且可以通过某种特别的外界作用,从外部来操作和控制它们态的变化,以实现所需的计算过程。除此以外,系统与外界接近独立,以保证量子态的相干性在计算过程中不被破坏。由于核自旋系统与外界的相互作用较弱,每个自旋核具有向上和向下两个独立的自旋态,自旋-自旋耦合即所需的可用于计算的相互作用,通过射频脉冲控制和探测核自旋态(核磁共振, NMR)已是一个成熟的领域。因此, NMR 体系是目前最有希望实现量子计算的物理体系之一。

利用 NMR 实现量子计算,首先必须把量子逻辑操作变成 NMR 脉冲序列。多量子算符代数理论表明,任何量子逻辑操作都可以分解成一系列单量子位的逻辑操作和双量子位 C-Not 门的组合序列^[3]。本文的目的就是应用多量子算符代数理论来分解双量子位不同相位旋转角度的一般化量子搜索算法的逻辑操作,进而设计 NMR 脉冲序列,并利用 NMR 仿真程序^[4,5]进行验证。

2 经典 Grover 算法简介

对于 N 个无序元素组成的集合,在量子计算中可以用 n ($n = \log_2 N$) 量子寄存器的 2^n 个量子基态来表示,每个量子基态对应一个元素,系统的量子态可以看成是这些量子基态的叠加。由于集合中的元素是无序的,也就是说它们出现的概率是相等的,因此可以用一个等概率幅量子组合态 $|\phi_0\rangle$ 来表示无序元素的集合。 $|\phi_0\rangle$ 可以通过对初始态 $|00\cdots 0\rangle$ 进行 Walsh-Hadamard 变换 W 得到,即

$$|\phi_0\rangle = W|00\cdots 0\rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i |\phi_i\rangle = 1/\sqrt{N} \sum_{i=1}^N |\phi_i\rangle \quad (1)$$

每一次 Grover 迭代过程由以下四个步骤组成:

(1) 使所需要查找的态 $|s\rangle$ (其中的某一个基态) 相位旋转 180° , 即相位取反。操作矩阵 I_s 可表示为: $I_s = I - 2|s\rangle\langle s|$ 。

(2) Walsh-Hadamard 变换 W 。

(3) 使态 $|00\cdots 0\rangle$ 相位旋转 180° , 即相位取反。操作矩阵 I_0 可表示为: $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$ 。

(4) Walsh-Hadamard 变换 W 。

(2)、(3)、(4) 构成扩散变换 $D = WI_0W$ 。Grover 证明,经过 $T = (\pi/4)\sqrt{N}$ 次迭代后, $|s\rangle$ 态的概率幅接近 1。即对最终态进行测量,获得 $|s\rangle$ 态的概率接近 1。与经典计算机的搜索算法相比,可以得到平方根数量级的加速。

3 一般化量子搜索算法简介

为了使 Grover 算法的物理实现一般化,应用范围更加广

泛,经过大量的研究工作,经典 Grover 算法得到了扩展,出现了一般化量子搜索算法^[2]。对于由 $N=2^n$ 个量子基态组成的等概率幅量子组合态 $|\phi_0\rangle$,可以通过由以下四个步骤组成的多次迭代来获得某个基态 $|s\rangle$:

(1)使所需要查找的态 $|s\rangle$ 相位旋转 θ 角。操作矩阵 I_s^x 为: $I_s^x = I - (1 - e^{i\theta})2|s\rangle\langle s|$ 。

(2)任意么正变换 U 。

(3)使态 $|00\cdots 0\rangle$ 相位旋转 ϕ 角。操作矩阵 I_0 为: $I_0 = I - (1 - e^{i\phi})|0\rangle\langle 0|$ 。

(4)任意么正变换 U 。

很明显,当 U 变成 W , $\theta = \phi = \pi$ 时,一般化量子搜索算法回归到经典 Grover 算法,即经典 Grover 算法是一般化量子搜索算法的一个特例。经过进一步证明,一般化量子搜索算法只有在满足相位匹配条件时($\theta = \phi$)才是有效的^[6],而且不同的旋转角度,获得搜索结果所需的迭代次数,即算法的开销代价是不同的。

4 一般化量子搜索算法 NMR 脉冲序列设计

4.1 多量子算符代数理论简介

量子计算是一个可逆的过程,可以看成在 Hilbert 空间中一系列么正变换作用于输入态。即: $|\varphi(t)\rangle = \prod_i U_i(t) |\varphi_0\rangle$ 。而且 U 必须遵循量子力学的基本规则——Schrödinger 方程。

$$\frac{dU(t)}{dt} = -iH(t)U(t) \quad (\text{设 } \hbar=1) \quad (2)$$

$H(t)$ 为么正变换算符 U 的哈密顿量。式(2)的解为:

$$U(t) = \exp[-iH(t)t] \quad (3)$$

核磁共振的研究表明^[7],在稳定的多维磁场中,自旋哈密顿量可以表示为:

$$H_0 = h_0 + \sum_{k=1}^N h_k' I_{kz} + \sum_{l>k=1}^N 2J_{kl} I_{kz} I_{lz} + \sum_{m>l>k=1}^N 4J_{klm} I_{kz} I_{lz} I_{mz} + \cdots \quad (4)$$

其中 h_k' 为自旋核 k 相应的普朗克系数, I_{kz} 为自旋核 k 在 Z 方向的角动量算符, J 为自旋耦合作用系数。

$$U(t) = \exp(-ih_0) \prod_{k=1}^N \exp(-ih_k' I_{kz}) \prod_{l>k=1}^N \exp(-i2J_{kl} I_{kz} I_{lz}) \prod_{m>l>k=1}^N \exp(-i4J_{klm} I_{kz} I_{lz} I_{mz}) \cdots \quad (5)$$

忽略常数项 $\exp(-ih_0)$ 和其他常数因素,多量子算符代数理论认为^[3],上式可以进一步分解成一系列单量子位的逻辑操作和双量子位受控非门的乘积。在有两个自旋核,即双量子位的系统中,么正变换算符 $U(t)$ 可表示为:

$$U(t) = \exp(-ih_1' I_{1z}) \exp(-ih_2' I_{2z}) \exp(-iJ_{12} I_{1z} I_{2z}) \quad (6)$$

4.2 基本量子逻辑门、Walsh-Hadamard 门和自旋耦合项

自旋核的角动量算符可以用原子物理中有名的泡利矩阵来表示,其中:

$$I_x = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

使自旋核绕 x 轴转 θ 角,其算符可以表示为:

$$X^\theta = \exp[i\theta I_x], \bar{X}^\theta = \exp[-i\theta I_x], X^{\pi/2} = \exp[i\pi I_x/2] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \bar{X}^{\pi/2} = \exp[-i\pi I_x/2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

易知, $X^{\pi/2} |0\rangle = (1/2^{1/2})(|0\rangle + i|1\rangle)$, $X^{\pi/2} |1\rangle = (1/2^{1/2})$

$(i|0\rangle + |1\rangle)$ 。

因此, $X^{\pi/2}$ 和 $X^{-\pi/2}$ 可以作为量子计算中最基本的一位逻辑门。

$$\text{同样 } Y^\theta = \exp[i\theta I_y], Y^\theta = \exp[-i\theta I_y]$$

$$Y^{\pi/2} |0\rangle = (1/2^{1/2})(|0\rangle - |1\rangle), Y^{\pi/2} |1\rangle = (1/2^{1/2})(|0\rangle + |1\rangle)$$

在核磁共振中,射频脉冲只能从 X 或 Y 方向射入。因此,使自旋核绕 Z 轴旋转可以通过 X 和 Y 方向的组合来实现。 $Z^\theta = Y^{\pi/2} X^\theta Y^{\pi/2}$, $\bar{Z}^\theta = Y^{\pi/2} \bar{X}^\theta Y^{\pi/2}$ 。

$$Z^{\pi/2} |0\rangle = \exp[i\pi/4] |0\rangle, Z^{-\pi/2} |0\rangle = \exp[-i\pi/4] |0\rangle。$$

$$Z^{\pi/2} |1\rangle = \exp[-i\pi/4] |1\rangle, Z^{-\pi/2} |1\rangle = \exp[i\pi/4] |1\rangle。$$

单量子位的 W-H 门是单量子逻辑门,可以通过以下组合来实现:

$$W = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (X^{\pi/2})^2 \bar{Y}^{\pi/2} = Y^{\pi/2} (X^{\pi/2})^2 \quad (7)$$

n 个量子位的 W-H 变换可以表示成一系列单量子位 W-H 门的有序乘积:

$$W^n = W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n \quad (8)$$

双量子位的自旋耦合项为 $G = \exp[-2\pi i J_{12} I_{1z} I_{2z} t]$, $t = (2\pi - \theta)/2J_{12}\pi$ 。

$$\text{可得: } G = \exp[-i(2\pi - \theta) I_{1z} I_{2z}] \quad (9)$$

4.3 变换矩阵的 NMR 脉冲序列实现

依据式(6)至(9),我们设计的双量子位一般化量子搜索算法所需的各变换矩阵的 NMR 脉冲序列如下:

W-H 变换矩阵为:

$$W^2 = (X^{\pi/2})^2 \bar{Y}^{\pi/2} (X^{\pi/2})^2 \bar{Y}^{\pi/2} \quad (10)$$

以 $|00\rangle$ 为目标态的相位旋转操作矩阵为:

$$I_0 = Y^{\pi/2} \bar{X}^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} Y^{\pi/2} \bar{X}^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} G \quad (11)$$

以 $|10\rangle$ 为目标态的相位旋转操作矩阵为:

$$I_0^x = Y^{\pi/2} X^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} Y^{\pi/2} \bar{X}^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} G \quad (12)$$

以 $|01\rangle$ 为目标态的相位旋转操作矩阵为:

$$I_0^y = Y^{\pi/2} \bar{X}^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} Y^{\pi/2} X^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} G \quad (13)$$

以 $|11\rangle$ 为目标态的相位旋转操作矩阵为:

$$I_0^z = Y^{\pi/2} X^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} Y^{\pi/2} X^{\pi/2} \bar{Y}^{\pi/2} G \quad (14)$$

量子搜索算法的 NMR 脉冲序列为:

$$Q_j^s |\phi_0\rangle = (W^2 I_0^s W^2 I_j^s)^T W^2 |\phi_0\rangle \quad (15)$$

其中 j 是相应的搜索目标态, $|\phi_0\rangle$ 为系统初始态 $|00\rangle$, T 为迭代次数。

5 仿真实验过程与结果

量子计算仿真器(QCE)^[4,5]是一套在传统计算机上设计的对于在封闭的量子系统中、绝对温度为零度时进行理想化 NMR 实验的模拟程序。在 QCE 中,任何对核自旋的操作,即外加的射频脉冲,都可以通过微指令(MI)来实现。若干 MI 可以组成量子程序(QP),可以构成量子逻辑门和最终的量子算法实现程序。而 MI 的设计关键在于操作时间 $\tau/2\pi$,以及 J 、 h 等参数的设定。

我们按如下规则来设计实验所需的 2 自旋核(即 2qubits)NMR 的微指令(MI)。

在理想化的 2 自旋核 NMR 环境中,任何一个射频脉冲所形成的对自旋核的操作可以表示为: $U(t) = \exp(-iH\tau)$

$$(16)$$

$$H = -J I_{1z} I_{2z} - h_1^x I_{1x} - h_2^x I_{2x} - h_1^y I_{1y} - h_2^y I_{2y} - h_1^z I_{1z} -$$

$$h_z^2 I_{2z} \quad (17)$$

对于, $X_j^q = \exp[i\theta I_{jz}]$, $H = -h_j^z I_j^z$, 可得: $ih_j^z I_{jz} \tau = i\theta I_{jz}$ ($j=1,2$),

因此操作 X_j^q 的设计满足:

$$\tau/2\pi = \theta/2\pi h_j^z \quad (18)$$

同样可得 Y_j^q 的设计满足:

$$\tau/2\pi = \theta/2\pi h_j^y \quad (19)$$

自旋耦合项 $G = \exp[-i(2\pi - \theta) I_{1z} I_{2z}]$, $H = -J I_{1z} I_{2z}$ 可得:

$$\tau/2\pi = (2\pi - \theta)/2\pi J \quad (20)$$

我们在仿真实验中分别设计了相位旋转角度为 π , $3\pi/4$ 和 $\pi/2$ 三种情况下的一般化量子搜索算法, 来得到获得搜索目标态所需的迭代次数。各相应的微指令(MI)设计参数见表 1。

表 1 MI 设计参数取值表

MI	$\tau/2\pi$	H_1^x	H_2^x	H_1^y	H_2^y	H_1^z	H_2^z	J_{12}^z
$X_1(\pi/2)$	0.25	1	0	0	0	0	0	0
$X_2(\pi/2)$	0.25	0	1	0	0	0	0	0
$X_1(-\pi/2)$	0.25	-1	0	0	0	0	0	0
$X_2(-\pi/2)$	0.25	0	-1	0	0	0	0	0
$Y_1(\pi/2)$	0.25	0	0	1	0	0	0	0
$Y_2(\pi/2)$	0.25	0	0	0	1	0	0	0
$Y_1(-\pi/2)$	0.25	0	0	-1	0	0	0	0
$Y_2(-\pi/2)$	0.25	0	0	0	-1	0	0	0
$X_1(3\pi/8)$	0.1875	1	0	0	0	0	0	0
$X_2(3\pi/8)$	0.1875	0	1	0	0	0	0	0
$X_1(-3\pi/8)$	0.1875	-1	0	0	0	0	0	0
$X_2(-3\pi/8)$	0.1875	0	-1	0	0	0	0	0
$X_1(\pi/4)$	0.125	1	0	0	0	0	0	0
$X_2(\pi/4)$	0.125	0	1	0	0	0	0	0
$X_1(-\pi/4)$	0.125	-1	0	0	0	0	0	0
$X_2(-\pi/4)$	0.125	0	-1	0	0	0	0	0
$G(\pi)$	5×10^5	0	0	0	0	0	0	-1×10^{-6}
$G(3\pi/4)$	6.25×10^5	0	0	0	0	0	0	-1×10^{-6}
$G(\pi/2)$	7.5×10^5	0	0	0	0	0	0	-1×10^{-6}

其中, $\tau/2\pi$ 对应于 QCE 中 MI 的参数 Time step, 参数 Main steps 和 Intermediate step 均为 1, Unit 取 2π , 其余表 1 中未列出的参数均为 0。

在建立了组成量子程序所需的 MI 以后, 依照式(10)至(15)分别建立了在三种相位旋转角度下各变换矩阵的仿真量子程序, 并组成量子搜索算法的迭代过程。在三种旋转角度下实现查找 $|00\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|11\rangle$ 的一般化量子搜索算法仿真分别如图 1 至 3 所示。通过仿真实验我们发现, 当相位旋转角度为 π , 即经典 Grover 算法时, 只需一次迭代即可获得目标态; 相位旋转角度为 $3\pi/4$ 时, 迭代次数为 3 次; 相位旋转角度为 $\pi/2$ 时, 迭代次数为 6 次。其中, 旋转角度为 $\pi/2$ 的结果与 Long GL^[8] 通过 NMR 实验实现查找 $|11\rangle$ 时的结论是一致的。

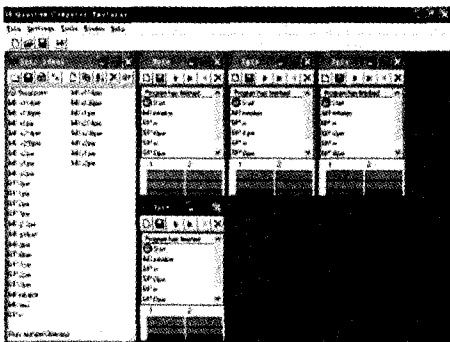


图 1 QCE 运行图(旋转角度= π)

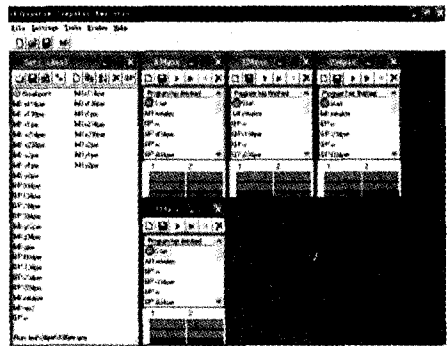


图 2 QCE 运行图(旋转角度= $3\pi/4$)

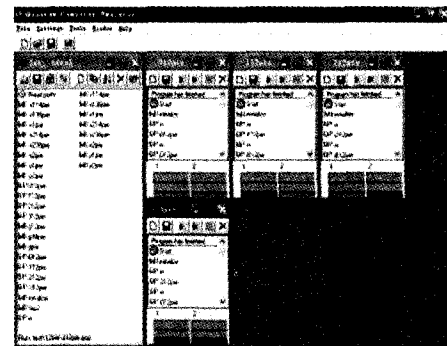


图 3 QCE 运行图(旋转角度= $\pi/2$)

结论 仿真实验的结果表明, 我们对一般化量子搜索算
(下转第 277 页)

1,再由定义 5,可知进程 A 与 H 功能相关 $A \rightarrow H$ 。

推论 1 若进程 A 与 K 间存在可达路径 $R[A \sim K]$,但不存在可达路径 $R[K \sim A]$,则进程 A 与 K 功能相关。

推论 2 若进程 A 与 K 间既不存在可达路径 $R[A \sim K]$,也不存在可达路径 $R[K \sim A]$,则进程 A 与 K 相互独立。

推论 3 若进程 A 与 K 间既存在可达路径 $R[A \sim K]$,又存在可达路径 $R[K \sim A]$,则进程 A 与 K 或状态相关或功能双向相关。

对推论 1 进行证明,用反证法。若进程 A 与 K 非功能相关,则可能是其它 3 种情况:相互独立、状态相关、功能双向相关。若进程 A 与 K 相互独立,按定义 6,A 与 K 相互不可达,即不存在可达路径 $R[A \sim K]$,与假设矛盾。若进程 A 与 K 状态相关或功能双向相关,由定义 6,进程 A 与 K 相互可达,再由定义 7,两进程间必存在一条可达路径 $R[K \sim A]$,与假设矛盾。因此进程 A 与 K 必为功能相关。对于推论 2,3,可用类似方法推出。

由以上分析,要确定各进程间的重启相关性,需以下步骤:

- ①确认初始进程和终结进程,因为可达路径是单向的。
- ②查找从初始进程到终结进程的所有可达路径。
- ③按每一条可达路径求初始进程和终结进程间的重启相关度。
- ④确定初始进程和终结进程的最终重启相关度及重启相关性。

按以上步骤可得图 1 所示的进程关系结构图,对应的各进程间的重启相关度如表 2 所示。

表 2 图 1 中任意进程间重启相关度

重启相关度 初始进程 \ 终结进程								
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	4	1	1	1	1	1	1	1
B	-1	4	0	1	1	1	1	1
C	-1	0	4	0	0	1	1	0
D	-1	-1	0	4	2	0	0	2
E	-1	-1	0	2	4	0	0	2
F	-1	-1	-1	0	0	4	3	0
G	-1	-1	-1	0	0	3	4	0
H	-1	-1	0	2	2	0	0	4

当具体实施该策略时,首先确定各影响因素的损耗阈值。当其到达该阈值时,查找问题进程,确定其直接耦合进程与耦合性,在此基础上判定进程间的重启相关性,进而得到进程重

启群。之后开始执行重启,实现进程级软件抗衰,防止软件失效。

结论 要执行进程级的软件抗衰,进一步降低抗衰成本和提高软件可靠性,需具备 3 个前提条件:一是系统中各部分运行情况可监控;二是进程间耦合关系及直接耦合进程可确定;三是在二的基础上查找非直接耦合进程间的路径,确定该进程与其它进程间的重启相关性,建立合理的进程重启群。一般的软件系统都满足第一个条件,问题的关键就在于查找直接耦合进程。

本文根据通常的软件系统提供的信息及进程间控制、调用及数据访问关系,给出了进程耦合关系的分类,分析了进程间的耦合程度,确定了查找直接耦合进程的途径,并给出了进程重启相关性及相关度的判定方法。据此可确定进程重启群,实现了进程级软件抗衰。从而更大程度上为实现细粒度的软件抗衰提供了支持,更有效地节约了抗衰成本,提高了软件的可靠性。

参考文献

- 1 Garg S, Moorsel A V, Vaidyanathan K. A Methodology for Detection and Estimation of Software Aging. Proceedings of the 9th International Symposium on Software Reliability Engineering, Paderborn, Germany, 1998
- 2 Huang Y, Kintala C, Kolettis N. Software Rejuvenation: Analysis, Module and Applications. In: Proc. of FTCS-25, Pasadena, CA, 1995
- 3 Castelli V, Harper R E, Heidelberger P. Proactive Management of Software Aging. IBM JRD, 2001, 45(2):311~332
- 4 Hong Y, Chen D, Li L. Closed Loop Design for Software Rejuvenation. Workshop on Self-Healing, Adaptive and self-MANaged Systems (SHAMAN), New York, 2002
- 5 Xie W, Hongb Y, Trivedi K. Analysis of a two-level software rejuvenation policy. Reliability Engineering and System Safety. 2005, 87(1):13~22
- 6 Patterson D, Brown A, Broadwell P. Recovery Oriented Computing (ROC): Motivation, Definition, Techniques, and Case Studies. [Technical Report]. UC Berkeley Computer Science UCB/CSD-02-1175, 2002
- 7 Candea G, Fox A. Recursive Restartability: Turning the Reboot Sledgehammer into a Scalpel. 8th Workshop on Hot Topics in Operating Systems, Schloss Elmau, Germany, 2001
- 8 Candea G, Kawamoto S, Fujiki Y. Microreboot - A Technique for Cheap Recovery. 6th Symposium on Operating Systems Design and Implementation, San Francisco, CA, 2004
- 9 Candea G, Cutler J, Fox A. Improving Availability with Recursive Microreboots: A Soft-State System Case Study. Performance Evaluation Journal, 2004, 56(1-3):213~248
- 10 游静,徐建,张琨. 计算系统软件抗衰重启技术研究[J]. 信息与控制(已录用,待发)
- 11 Tanenbaum A S. Modern Operating Systems[M]. 北京:机械工业出版社,1999
- 12 王庆育. 软件工程[M]. 北京:清华大学出版社,2004

(上接第 252 页)

法 NMR 脉冲序列的设计方法基本上是合理的。同时,尽管一般化量子搜索算法对经典 Grover 算法进行了有效的扩展,但在具体应用时,经典 Grover 算法的实现开销还是最经济的。量子算法在传统计算机上进行的 NMR 模拟实现,对量子计算理论研究,量子算法的理论、可行性和正确性研究,以及量子计算机的物理实现都具有一定的参考价值。

参考文献

- 1 Grover L K. A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search[C]. In: Proc. of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1996, 212~219
- 2 Grover L K. Quantum computers can search rapidly by using al-

most any transformation[J]. Phys Rev Lett A 80, 1998, 4329~4332

- 3 Miao X. Universal Construction of Unitary Transformation of Quantum Computation with One- and Two-body Interactions[J]. <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0003068>
- 4 Michielsen K, Raedt H D. QCE: A Simulator for Quantum Computer Hardware[J]. Turk J Phys, 2003, 27:129
- 5 <http://rugth30.phys.rug.nl/compphys>
- 6 Long G L, Li Y S, Zhang W L, et al. Phase matching in quantum searching[J]. Phys Lett A, 1999, A262:27~34
- 7 Chuang I L, Gershenfeld N A, et al. Bulk quantum computation with nuclear magnetic resonance: theory and experiment[J]. Proc R Soc Lond A, 1998, 454:447~467
- 8 Long G L, Yan H Y, Li Y S, et al. Experimental NMR realization of a generalized quantum search algorithm[J]. Phys Lett A, 2001, A286:121~126