

一种新的均匀样条曲线曲面设计方法^{*})

雷开彬 张为群 马志霞

(西南民族大学计算机科学与技术学院 成都 610041) (西南大学计算机科学与技术学院 重庆 400715)

摘要 本文根据均匀 B 样条基函数的 de Boor-Cox 递推公式提出了一种新的样条曲线曲面设计方法。该方法从满足正性、局部支柱性和权性的初始基函数出发,可构造出具有高阶低次或低次高阶的多项式样条基函数和多种函数类型的样条函数。给出了设计这种样条曲线曲面的几种方法和实例,并对基函数的连续可微性进行了证明。该样条基函数和样条曲线曲面具有和均匀 B 样条类似的几何性质,且均匀 B 样条是其特例,可用于曲线曲面的几何造型和样条插值。

关键词 曲线曲面设计,均匀 B 样条,de Boor-Cox 递推公式,初始基函数

A New Designing of Uniform Spline Curves and Surfaces

LEI Kai-Bin ZHANG Wei-Qun MA Zhi-Xia

(College of Computer Science and Technology, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041)

(College of Computer Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715)

Abstract This paper presents a new scheme of design spline curves and surfaces by uniform B-spline de Boor-Cox recursion formula. The scheme can structure "high order and low degree" or "low degree and high order" polynomial spline curves and surfaces, starting from initial basic function of satisfying positivity and local support and weighting property, also can generate many types of spline functions. In this paper, several methods and examples of designing the spline functions are given, and differentiability of the basic functions are proved. This spline curves and surfaces have many similar properties to uniform B-spline, and traditional uniform B-spline is its special case. And it may be used for geometric modeling and interpolation of curves and surfaces.

Keywords Curves and surfaces designing, Uniform B-spline, De Boor-Cox recursion formula, Initial basic function

1 引言

B 样条的理论早在 1946 年由 Schoenberg 提出,但是其论文直到 1967 年才发表。对 B 样条理论和应用作出突出贡献的有 de Boor C. 和 Cox M. G., 他们分别在 1972 年和 1971 年独立地给出了关于 B 样条计算的标准算法,即著名的 de Boor-Cox 递推公式。随着样条函数的理论与应用的成熟,非均匀有理 B 样条(NURBS)在 CAD/CAM 造型系统中被广泛采用,已成为一种工业设计标准。但是,为了满足不同应用的要求,也出现了多种不同的样条曲线的构造方法。Zhang^[3,4]提出了由 $\{1, t, \sin t, \cos t\}$ 的线性组合得到的 C-B 样条,并与传统的三次 B 样条曲线有相似的几何性质。LU^[2]则推广了 Zhang 的方法,给出了函数空间 $\{1, t, \dots, t^{k-3}, \sin t, \cos t\}$ 上的一类广义均匀样条的显示构造方法,得到了类似均匀 B 样条基函数的均匀三角多项式样条基函数。Wang^[1]也在函数空间 $\{1, t, \dots, t^{k-3}, \sin t, \cos t\}$ 上定义了另一种非均匀的代数三角样条基函数,它们都与 B 样条有类似的权性、正性、可微和细分等几何性质。

然而,对 B 样条曲线段和已有的样条曲线都存在以下一些缺陷。其一,控制多边形顶点的个数与基函数多项式的次数是同步增长的,这就限制了在低阶 B 样条曲线中达到高阶连续和在低阶 B 样条曲线中用低次多项式表示的要求。其二,基函数仅有多项式表示的形式,无其他函数类型的表现形式,即样条函数类型单一化。由于样条曲线是由分段曲线构成,各分段曲线之间又满足某种连续性要求的自由曲线。本文利用均匀 B 样条基函数的优良性质,推广 de Boor-Cox 递

推公式的构造规则,提出了一种新的样条曲线的设计方法,为讨论方便称其为均匀 BC 样条(Uniform de Boor-Cox Spline)。

2 均匀 B 样条的 de Boor-Cox 递推公式

给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, t_i = i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 由下列递推公式所定义^[5,6]的函数 $B_{i,k}(t)$ 称为相应于分割 T 的 k 阶(Order k), $k-1$ 次(Degree $k-1$)均匀样条基函数:

$$\begin{cases} B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} B_{i,k-1}(t) \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t), & k \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

上式称为 de Boor-Cox 递推公式, T 称为节点序列或节点向量, t_i 称为节点(Knot)。

3 均匀 BC 样条基函数的定义及性质

对给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, t_i = i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 和该分割上的一组由 $r(r \geq 1)$ 个区间上的分段函数构成的初始基函数:

$$N_{i,r}(t) = \begin{cases} \varphi_0(t-t_i), & t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \varphi_1(t-t_{i+1}), & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ \dots \\ \varphi_{r-1}(t-t_{i+r-1}), & t \in [t_{i+r-1}, t_{i+r}), \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

且满足如下性质:(1) $\varphi_n(\mu)$ ($n=0, 1, \dots, r-1$) 在 $[0, 1]$ 内任意

^{*}) 论文得到四川省应用基础研究项目(编号:06jy0286)和西南民族大学应用研究项目(编号:03N042)资助。

阶可微, $N_{i,r}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+r}]$ 内有 $m(\geq 0)$ 阶连续可微。(2) 正性和局部支柱性:

$$N_{i,r}(t) \begin{cases} > 0, t \in (t_i, t_{i+r}) \\ = 0, t \notin (t_i, t_{i+r}) \end{cases}, (3) \text{ 权性: } \sum_{n=0}^{r-1} \varphi_n(u) \equiv 1,$$

$u \in [0, 1]$, 则由下列递推公式所定义的函数 $N_{i,k}(t) (k > r)$ 称为相应于分割 T 的 k 阶 (Order k) 均匀 BC 样条基函数,

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t), (k > r) \quad (3)$$

其中, T 称为节点序列或节点向量, t_i 称为节点 (Knot)。显然, 由上式定义均匀 BC 样条基函数具有如下性质:

性质 3.1 正性 (Positivity) 和局部支柱性 (Local support):

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} > 0, t \in (t_i, t_{i+k}) \\ = 0, t \notin (t_i, t_{i+k}) \end{cases}$$

性质 3.2 权性 (Weighting Property):

$$\sum_{i=s-(k-1)}^{s-1} N_{i,k}(t) \equiv \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) \equiv 1, t \in [t_s, t_q], s < q$$

性质 3.3 均匀 B 样条基函数 (B-spline basis):

当 $r=1, m=0$ 时, 取

$$N_{i,r}(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, \text{其他} \end{cases}, k \text{ 阶均匀 BC 样条基函数 } N_{i,k}$$

(t) 为 k 阶 $k-1$ 次均匀 B 样条基函数。

4 均匀 BC 样条基函数的连续可微性及实例分析

根据均匀 BC 样条基函数的定义, 该样条基函数 $N_{i,k}(t)$ 显然在 $[t_i, t_{i+k}]$ 内至少是零阶连续。但是若要求有更高阶的可微连续或光滑性, 必须对给定的初始样条基函数首尾端点的可微性作适当要求。

性质 4.1 若初始样条基函数 $N_{i,r}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+r}]$ 内有 $m(\geq 0)$ 阶连续可微, 且 $\varphi_0^{(m)}(0) = \varphi_{r-1}^{(m)}(1) = 0$, 则 k 阶均匀 BC 样条基函数 $N_{i,k}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+k}]$ 内至少有 m 阶连续可微。

证明: 仅需证明 $N_{i,k}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+k}]$ 上的所有节点处至少有 $m(> 0)$ 阶连续可微。现对 $k > r$ 作数学归纳法。当 $k=r+1$ 时, 考查节点 $t_{i+n} (n=0, 1, \dots, r+1)$ 点的连续可微性。

现考察 $t=t_i, t_{i+r+1}$ 的可微性, 当 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 时,

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) = \frac{1}{r} [(t-t_i)\varphi_0(t-t_i)]^{(m)} \\ = \frac{1}{r} [m\varphi_0^{(m-1)}(t-t_i) + (t-t_i)\varphi_0^{(m)}(t-t_i)]$$

因此, $N_{i,k}(t)$ 在 $t=t_i$ 处 $m(> 0)$ 阶连续可微, 同理在 $t=t_{i+r+1}$ 处 $m(> 0)$ 阶连续可微。

现考察 $t=t_{i+1}, t_{i+r}$ 的可微性, 当 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 时, 由上式 $N_{i,r+1}^{(m)}(t) |_{t=t_{i+1}} = \frac{1}{r} [m\varphi_0^{(m-1)}(1) + \varphi_0^{(m)}(1)]$, 当 $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ 时,

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) = \frac{1}{r} [(t-t_i)\varphi_1(t-t_{i+1}) - (t-t_{i+r+1})\varphi_0(t-t_{i+1})]^{(m)} \\ = \frac{1}{r} [m\varphi_1^{(m-1)}(t-t_{i+1}) + (t-t_i)\varphi_1^{(m)}(t-t_{i+1})] \\ - \frac{1}{r} [m\varphi_0^{(m-1)}(t-t_{i+1}) + (t-t_{i+r+1})\varphi_0^{(m)}(t-t_{i+1})]$$

于是

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) |_{t=t_{i+1}}^+ = \frac{1}{r} [m\varphi_1^{(m-1)}(0) + \varphi_1^{(m)}(0)]$$

$$- \frac{1}{r} [m\varphi_0^{(m-1)}(0) + \varphi_0^{(m)}(0)],$$

由已知条件 $\varphi_0^{(m)}(0) = 0$ 和 $N_{j,r}(t)$ 在 $[t_j, t_{j+r}]$ 内有 $m(\geq 0)$ 阶连续可微得知, $\varphi_0^{(m)}(1) = \varphi_1^{(m)}(0)$, 故 $t=t_{i+1}$ 处 $m(> 0)$ 阶连续可微, 同理在 $t=t_{i+r}$ 处 $m(> 0)$ 阶连续可微。

现考察 $t=t_{i+n}, n=2, \dots, r-1$ 的可微性, 当 $t \in [t_{i+n-1}, t_{i+n}]$ 时,

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) = \left[\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i} \varphi_{n-1}(t-t_{i+n-1}) + \frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} \varphi_{n-2}(t-t_{i+n-1}) \right]^{(m)}$$

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) |_{t=t_{i+n}}^- = \frac{1}{r} [m\varphi_{n-1}^{(m-1)}(1) + n\varphi_{n-1}^{(m)}(1)]$$

$$- \frac{1}{r} [m\varphi_{n-2}^{(m-1)}(1) + (r+1-n)\varphi_{n-2}^{(m)}(1)]$$

$$\text{当 } t \in [t_{i+n}, t_{i+n+1}] \text{ 时, } N_{i,r+1}^{(m)}(t) = \left[\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i} \varphi_n(t-t_{i+n}) + \frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}} \varphi_{n-1}(t-t_{i+n}) \right]^{(m)}$$

$$N_{i,r+1}^{(m)}(t) |_{t=t_{i+n}}^+ = \frac{1}{r} [m\varphi_n^{(m-1)}(0) + n\varphi_n^{(m)}(0)]$$

$$- \frac{1}{r} [m\varphi_{n-1}^{(m-1)}(0) + (r+1-n)\varphi_{n-1}^{(m)}(0)]$$

当 $t \in [t_{i+n}, t_{i+n+1}]$ 时,

由局部支柱性有 $\varphi_0^{(m)}(0) = \varphi_{n-1}^{(m)}(1) = 0$ 及 $N_{j,k}(t) (k > r)$ 的可微性有 $\varphi_{n-1}^{(m)}(1) = \varphi_n^{(m)}(0)$, ($n=0, 1, \dots, r-1$) 得 $N_{i,r+1}^{(m)}(t)$ 在 t_{i+n} 处至少 m 阶连续可微。

现假设 $k-1$ 时成立, 而

$$N_{i,k}^{(m)}(t) = \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right]^{(m)}$$

$$= mN_{i,k-1}^{(m-1)}(t) + \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}^{(m)}(t)$$

$$- mN_{i+1,k-1}^{(m-1)}(t) - \frac{t-t_{i+k}}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}^{(m)}(t)$$

由可微函数的和、差、积得证上述的可微性。

性质 4.2 对给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 和该分割上的一组满足条件的二阶初始样条基函数定义如下:

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_i), t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 1-\varphi(t-t_{i+1}), t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

且有 $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1, \varphi'(0)=\varphi'(1)$, 则按(3)定义的三阶均匀 BC 样条基函数二阶连续可微的充要条件是 $\varphi''(0)=\varphi''(1)+6\varphi'(0)$ 。四阶均匀 BC 样条基函数二阶连续可微的充要条件是 $\varphi''(0)=\varphi''(1)$ 。

实际上可根据三阶、四阶均匀 BC 样条基函数的定义直接验证即可。该性质给出了如何构造二阶初始基函数的方法。下面的例 4.1 和 4.2 是用该方法设计的具有低阶高次多项式样条和三角函数类的样条基函数。

实例 4.1 三阶均匀四次多项式 C^2 连续的 BC 样条基函数

对给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 二阶三次 C^0 连续的多项式的初始基函数如下:

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-2\mu^3+3\mu^2+2\mu), \mu=t-t_i, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{3}(2\mu^3-3\mu^2-2\mu+3), \mu=t-t_{i+1}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

设 $\varphi(\mu) = \frac{1}{3}(-2\mu^3 + 3\mu^2 + 2\mu)$, 则 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi'(0) = \varphi'(1) = 2/3, \varphi''(0) = 2, \varphi''(1) = -2$, 由(3)式定义的三阶均匀 BC 样条基函数为,

$$N_{i,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(-2\mu^4 + 3\mu^3 + 2\mu^2), & \mu = t - t_i, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{6}(4\mu^4 - 8\mu^3 - \mu^2 + 3\mu + 1), & \mu = t - t_{i+1}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \frac{1}{6}(-2\mu^4 + 5\mu^3 - \mu^2 - 5\mu + 3), & \mu = t - t_{i+2}, t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

显然, 满足 $\varphi''(0) = \varphi''(1) + 6\varphi'(0)$, 因此由性质 4.2, 该三阶均匀 BC 样条基函数具有 C^2 连续(图 1)。

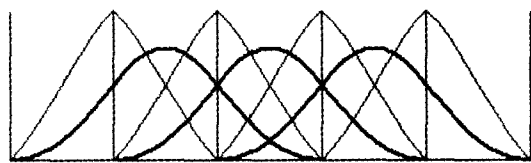


图 1 三阶均匀四次多项式 C^2 连续的 BC 样条基函数的形成

实例 4.2 四阶均匀三角多项式 C^2 连续的 BC 样条基函数

对给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 二阶 C^2 连续的三角多项式的初始基函数如下:

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}[4\sin(\pi\mu/2) - 4\cos(\pi\mu/2) + \cos(\pi\mu) + 3], & \mu = t - t_i, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{6}[-4\sin(\pi\mu/2) + 4\cos(\pi\mu/2) - \cos(\pi\mu) + 3], & \mu = t - t_{i+1}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

设 $\varphi(\mu) = \frac{1}{6}[4\sin(\pi\mu/2) - 4\cos(\pi\mu/2) + \cos(\pi\mu) + 3], \mu \in [0, 1]$ 显然满足 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi'(0) = \varphi'(1) = \pi/3$ 和 $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$, 于是四阶均匀 BC 样条基函数有二阶连续可微。由(3)式定义的四阶均匀 BC 样条基函数(图 2)为,

$$N_{i,4}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}\mu\varphi(\mu), & \mu = t - t_i, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{6}[(1+\mu)^2 + (-\mu^2 + 2\mu + 1)\varphi(\mu)], & \mu = t - t_{i+1}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \frac{1}{6}[(-2\mu^2 + 4) + (3\mu^2 - 4\mu)\varphi(\mu)], & \mu = t - t_{i+2}, t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \\ \frac{1}{6}(1-\mu)^2(1-\varphi(\mu)), & \mu = t - t_{i+3}, t \in [t_{i+3}, t_{i+4}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

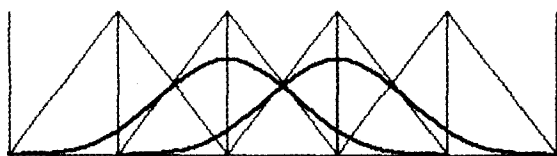


图 2 四阶均匀三角多项式 C^2 连续 BC 样条基函数的形式

实例 4.3 由已知的均匀 B 样条基函数构造高阶初始基函数。

给定参数 t 轴的一个等距分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 对定义上的四阶三次均匀 B 样条作参数变换即可得到八阶 C^2 连续的多项式初始基函数(图 3), $N_{i,8}(t)$ 如下,

$$N_{i,8}(t) = \begin{cases} \frac{1}{96}\mu^3, & \mu = t - t_i, t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \frac{1}{96}(1 + 3\mu + 3\mu^2 + \mu^3), & \mu = t - t_{i+1}, t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ \frac{1}{96}(8 + 12\mu + 6\mu^2 - 3\mu^3), & \mu = t - t_{i+2}, t \in [t_{i+2}, t_{i+3}] \\ \frac{1}{96}(23 + 15\mu - 3\mu^2 - 3\mu^3), & \mu = t - t_{i+3}, t \in [t_{i+3}, t_{i+4}] \\ \frac{1}{96}(32 - 12\mu^2 + 3\mu^3), & \mu = t - t_{i+4}, t \in [t_{i+4}, t_{i+5}] \\ \frac{1}{96}(23 - 15\mu - 3\mu^2 + 3\mu^3), & \mu = t - t_{i+5}, t \in [t_{i+5}, t_{i+6}] \\ \frac{1}{96}(8 - 12\mu + 6\mu^2 - \mu^3), & \mu = t - t_{i+6}, t \in [t_{i+6}, t_{i+7}] \\ \frac{1}{96}(1 - 3\mu + 3\mu^2 - \mu^3), & \mu = t - t_{i+7}, t \in [t_{i+7}, t_{i+8}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

显然, 该初基函数 $N_{i,8}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+8}]$ 是二阶连续可微, 满足正性和局部支柱性, 且 $\varphi_0^{(2)}(0) = \varphi_0^{(2)}(1) = 0$, 因此由(3)式定义的 BC 样条基函数至少二阶可微连续, 从而获得高阶低次样条的设计方法。

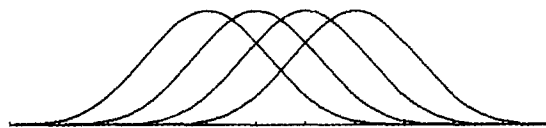


图 3 八阶 C^2 连续的多项式的初始基函数

5 均匀 BC 样条曲线的定义及性质

设 $\{p_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3, N_{i,k}(t)$ 是相应于参数 t 轴上的均匀分割 $T: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, t_i = i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的 k 阶均匀 BC 样条基函数, 则称

$$p(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) p_i \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}, n \geq k \quad (10)$$

为相应于节点向量 T 的 k 阶均匀(Uniform)BC 样条曲线, 称 p_i 为控制顶点, 称 $p_1 p_2 \dots p_n$ 为控制多边形。由此定义的 BC 样条曲线具有下列性质。

性质 5.1(凸包性) 曲线 $p(t) (t_j \leq t < t_{j+1}, j = k, k+1, \dots, n)$ 位于 k 个控制顶点 $p_{j-k+1}, p_{j-k+2}, \dots, p_j$ 的凸包 H_j 内, 整条曲线 $p(t) (t_k \leq t \leq t_{n+1})$ 位于凸包 H_j 的并集 $H = \bigcup_{j=k}^n H_j$ 之内。

性质 5.2(几何不变性和仿射不变性) 曲线的形状和位置与坐标系的选择无关, 曲线作放射变换, 只须作控制顶点的仿射变换。

性质 5.3(局部性) 变动一个 k 阶均匀 BC 样条曲线的控制顶点, 至多引起与该控制顶点有关的 k 段曲线的形状发生变化。

性质 5.4(连续阶) 若 k 阶均匀 BC 样条基函数是 m 阶连续可微的, 则 k 阶均匀 BC 样条曲线 $p(t) (t_k \leq t \leq t_{n+1})$ 是 m

阶连续可微。

性质 5.5(部分细分性) k 阶均匀 BC 样条曲线的求值可表示为(如图 4),其中

$$p_i^{[l]}(t) = \begin{cases} p_i, l=0, i=j-k+1, j-k+2, \dots, j \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k-l}-t_i} p_i^{[l-1]}(t) + \frac{t_{i+k-l}-t}{t_{i+k-l}-t_i} p_{i+1}^{[l-1]}(t) \\ l=1, \dots, k-r+1, i=j-k+l+1, \dots, j \\ l \leq k-r+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) p_i = \sum_{i=j-k+1}^j N_{i,k}(t) p_i \\ &= \sum_{i=j-k+2}^j N_{i,k-1}(t) p_i^{[1]}(t) = \dots \\ &= \sum_{i=j-r+1}^j N_{i,r}(t) p_i^{[k-r]}(t), t_j \leq t < t_{j+1} \end{aligned}$$

6 均匀 BC 样条曲线实例

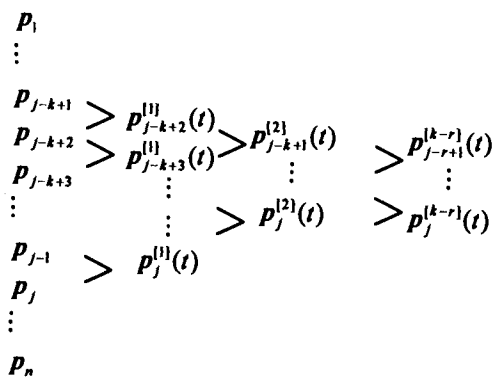


图 4 k 阶均匀 BC 样条曲线的部分细分过程

根据均匀 BC 样条曲线的定义,图 5(曲线 1)是(5)式定义的三阶均匀四次多项式 C^2 连续的 BC 样条基函数所确定的均匀 BC 样条曲线,实际上该样条曲线与三阶均匀二次多项式 C^1 连续的 B 样条曲线基本一致;图 5(曲线 2)是(7)式定义的四阶均匀三角多项式 C^2 连续 BC 样条基函数所确定的均匀 BC 样条曲线,实际上该样条曲线与四阶均匀三次多项式 C^2 连续的 B 样条曲线基本一致。图 6 是(8)式定义的二阶三次 C^2 多项式初始基函数确定的均匀 BC 样条曲线(曲线 1)与均匀八阶七次 B 样条曲线(曲线 2)及均匀四阶三次 B 样条曲线(曲线 3)的比较。

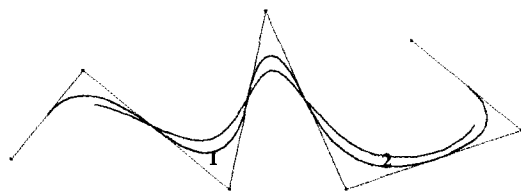


图 5 (1)实例 4.1 定义的多项式 BC 样条
(2)实例 4 定义的三角多项式 BC 样条曲线

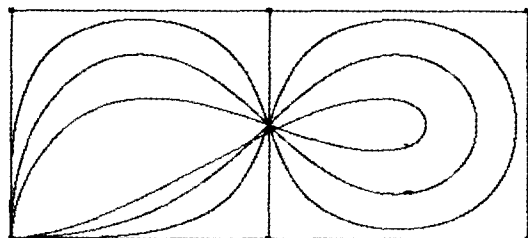


图 6 均匀 B 样条曲线与均匀 BC 样条曲线的比较

7 均匀 BC 样条曲面的定义与实例

设控制网格的 $(m+1) \times (n+1)$ 个控制顶点 $\{p_{i,j}\} \in \mathbb{R}^3, i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n, N_{p,q}(t)$ 是式(3)定义的相应与参数 t 轴上的均匀分割 $T: \{t_p\}_{p=-\infty}^{+\infty}, t_p = p, p=0, \pm 1, \pm 2, \dots, q$ 阶均匀 BC 样条基函数,则称

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) p_{i,j} \quad (11)$$

$$i_k \leq u \leq t_{m+1}, t_l \leq v \leq t_{n+1}, m \geq k, n \geq l$$

为相应于节点向量 T 的 $k \times l$ 阶均匀(Uniform)BC 样条曲面。

由此张量积定义的 BC 样条曲面具有与 BC 样条曲线相同的性质。图 7 是由式(6)定义的 2×2 的曲面片,同样具有二阶连续。

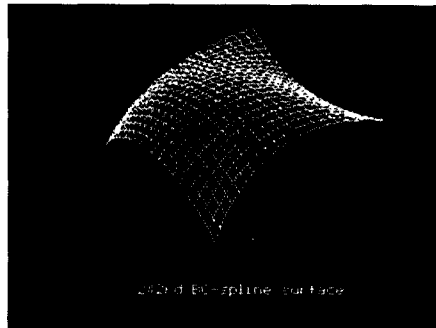


图 7 由式(6)定义的 2×2 的曲面片

结论 本文根据均匀 B 样条基函数的 de Boor-Cox 递推公式,从满足正性、局部支柱性、权性和连续性的初始基函数出发,给出了均匀 BC 样条基函数的和均匀 BC 样条曲线曲面的一般定义方法,并讨论了均匀 BC 样条基函数和曲线曲面的定义及其基本性质。本文还对不同基函数连续可微性进行了分析和证明,并得到了设计多项式和三角多项式构成的均匀 BC 样条基函数方法,包括低阶高次多项式、高阶低次多项式和三角多项式 BC 样条具体实例。这些样条基函数和样条曲线曲面具有和均匀 B 样条类似的几何性质。我们可利用该方法构造具有不同应用所需要的各种函数类型、不同连续阶的样条曲线曲面。因此,这种样条曲线曲面方法可用于样条曲线曲面的几何造型和插值算法。对于该样条可进一步研究初始基函数更一般的构造方法和在曲线曲面在插值算法中的应用。

参考文献

- 1 Wang G Z, Chen Q Y, Zhou M H. NUAT B-spline curves. Computer Aided Geometric Design 21, 2004, 193~205
- 2 Lu Y G, Wang G Z, Yang X N. Uniform trigonometric polynomial B-spline Curves. Science in China (Series F), 2002, 45(5): 334~343
- 3 Zhang J W. C-curves: an extension of cubic curves. Computer Aided Geometric Design 13, 1996, 199~217
- 4 Zhang J W. Two different forms of C-B splines. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14: 31~41
- 5 王国瑾,汪国昭,郑建民. 计算机辅助几何设计. 施普林格-高等教育出版社, 2001
- 6 朱心雄,等. 自由曲线曲面造型技术. 科学出版社, 2000