

粗糙集与直觉模糊特殊集^{*})

邱卫根 杨小平

(广东工业大学计算机学院 广州 510090) (江西财经大学计算机学院 南昌 330013)

摘要 粗糙理论和直觉模糊特殊集理论都是近年来发展起来的一种有效的信息处理理论,尤其在不确定信息处理中各有优势。本文首先讨论了直觉模糊特殊集及其算子的一些性质,并给出了其海明距离的定义和计算。同时研究了粗糙近似空间上一类粗代数结构与直觉模糊特殊集的同态关系。

关键词 粗糙集,直觉模糊特殊集,最小上近似,同态

Rough Sets and Intuitionistic Fuzzy Special Sets

QIU Wei-Gen YANG Xiao-Ping

(Computer Faculty of Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

(Computer Faculty of Jiangxi University Finally & Economics, Nanchang 330013)

Abstract The theory of rough sets and intuitionistic fuzzy special sets are hot-point of computation theory. In this paper, some properties of intuitionistic fuzzy special sets and its operator are discussed, and the algorithm of its hamming distance is presented. The homomorphism relation between a rough algebraic structure on rough approximation space and intuitionistic fuzzy special sets is researched in details.

Keywords Rough set, Intuitionistic fuzzy special set, Minimum upper approximation, Homomorphism

1 引言

Pawlak 的粗糙集理论是数据挖掘中一种重要的理论工具,它的重要特点是数据挖掘过程中只需要利用数据本身提供的信息,不要其他预先的或人为主观的知识。和粗糙集理论一样,直觉模糊集理论克服了模糊集理论中隶属度需要预先人为主观指定的缺点,以一个区域值代替了精确的隶属度指定。在大多数场合下,成员的隶属程度和非隶属程度都无法精确得到,所需要的信息具有很大的不确定性,非常适合于直觉模糊集理论。事实上,Atanassov 的直觉模糊集不仅扩展了 Zadeh 模糊集,而且将其作为自己研究的特例。

本文主要研究了直觉模糊特殊集算子的性质,给出了其海明距离的计算方法,探讨了粗糙近似空间上一类粗代数结构与其直觉模糊特殊集表示之间的同态关系。

2 直觉模糊特殊集

定义 1 设 U 是非空论域, U 上的直觉模糊集 A 具有下面形式的集合 $A^* = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle \mid x \in U\}$, 其中函数 $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 和 $\gamma_A: U \rightarrow [0, 1]$ 分别称为论域 U 中对象 x 属于集合 A 的程度和不属于集合 A 的程度, 且满足 $\forall x \in U, \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$ 。 U 上直觉模糊集全体记为 $IFS(U)$ 。

定义 2 设 U 是非空论域, 直觉模糊特殊集 A 定义为元组 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle$, 其中 $A_1 \subseteq U, A_2 \subseteq U$, 且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1 称为在 A 中的元素集, A_2 称为不在集合 A 中的元素集。记 U 上直觉模糊特殊集全体为 $IFSS(U)$ 。

任意 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle, A \in IFSS(U)$, 记

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_1 \\ 0 & x \notin A_1 \end{cases}, \nu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_2 \\ 0 & x \notin A_2 \end{cases}$$

则 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in U\}$, 由于 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 则

$$\mu_A(x) + \nu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_1 \cup A_2 \\ 0 & x \notin A_1 \cup A_2 \end{cases}$$

即 $\forall x \in U, \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$, $IFSS$ 是 IFS 的特殊情况。

记 U 上模糊集全体为 $F(U)$, 则任意 $A \in F(U), A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in U\}$ 。取 $\gamma_A(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$, 直觉模糊集 $A' = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle \mid x \in U\}$, 则 A' 是 A 的直觉模糊集表示, 即 $F(U)$ 是 $IFS(U)$ 的子集合。模糊集是一种直觉指数为 0 的特殊的直觉模糊集。

定义 3 设 U 是一个非空论域, $A, B \in IFSS(U), A = \langle U, A_1, A_2 \rangle, B = \langle U, B_1, B_2 \rangle, \{A_i \mid i \in J\} \subseteq IFSS(U)$, 其中 $A_i = \langle U, A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \rangle$, 则

1) $A \subset B$, 当且仅当 $A_1 \subset B_1$, 且 $B_2 \supset A_2$,

2) $A = B$, 当且仅当 $A \subset B$, 且 $B \subset A$,

3) $A^c = \langle U, A_2, A_1 \rangle$,

4) $\phi^- = \langle U, \phi, U \rangle, U^- = \langle U, U, \phi \rangle$,

5) $A \cap B = \langle U, A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2 \rangle$,

$A \cup B = \langle U, A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2 \rangle$,

$A - B = A \cap B^c = \langle U, A_1 \cap B_2, A_2 \cup B_1 \rangle$,

6) $\square A = \langle U, A_1, A_1^c \rangle, \diamond A = \langle U, A_2^c, A_2 \rangle$,

7) $\bigcup_{i \in J} A_i = \langle U, \bigcup_{i \in J} A_i^{(1)}, \bigcap_{i \in J} A_i^{(2)} \rangle, \bigcap_{i \in J} A_i = \langle U, \bigcap_{i \in J} A_i^{(1)}, \bigcup_{i \in J} A_i^{(2)} \rangle$,

定理 1 对任意 $A, B, C \in IFSS(U), \{A_i \mid i \in J\} \in IFSS(U)$, 下面的结论成立:

1) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c, (A^c)^c = A$;

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup$

^{*})国家自然科学基金(60474072)、广东省自然科学基金(04009465)、赣教科学[2006]230号基金资助项目。

C ;

$$3) A, B \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A, B;$$

$$4) (\phi^-)^c = U^-, (U^-)^c = \phi^-;$$

$$5) B \cap (\bigcup_{i \in J} A_i) = \bigcup_{i \in J} (B \cap A_i), B \cup (\bigcap_{i \in J} A_i) = \bigcap_{i \in J} (B \cup A_i);$$

$$6) (\bigcup_{i \in J} A_i)^c = (\bigcap_{i \in J} A_i^c), (\bigcap_{i \in J} A_i)^c = (\bigcup_{i \in J} A_i^c);$$

$$7) \square(A \cup B) = \square A \cup \square B, \square(A \cap B) = \square A \cap \square B;$$

$$8) \diamond(A \cup B) = \diamond A \cup \diamond B, \diamond(A \cap B) = \diamond A \cap \diamond B.$$

证明: $A, B, C \in IFSS(U)$, 设 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle, B = \langle U, B_1, B_2 \rangle, C = \langle U, C_1, C_2 \rangle; \{A_i | i \in J\} \subseteq IFSS(U)$, 设 $A_i = \langle U, A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \rangle$. 1), 2), 3) (略)

$$4) (\phi^-)^c = \langle \langle U, \phi, U \rangle \rangle^c = \langle \langle U, U, \phi \rangle \rangle = U^-;$$

$$(U^-)^c = \langle \langle U, U, \phi \rangle \rangle^c = \langle \langle U, \phi, U \rangle \rangle = \phi^-;$$

$$5) B \cap (\bigcup_{i \in J} A_i) = \langle U, B_1, B_2 \rangle \cap (\bigcup_{i \in J} \langle U, A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \rangle) = \langle U, B_1, B_2 \rangle \cap \langle U, \bigcup_{i \in J} A_i^{(1)}, \bigcap_{i \in J} A_i^{(2)} \rangle = \langle U, B_1 \cap \bigcup_{i \in J} A_i^{(1)}, B_2 \cup \bigcap_{i \in J} A_i^{(2)} \rangle = \langle U, \bigcup_{i \in J} (B_1 \cap A_i^{(1)}), \bigcap_{i \in J} (B_2 \cup A_i^{(2)}) \rangle = \bigcup_{i \in J} \langle U, B_1 \cap A_i^{(1)}, B_2 \cup A_i^{(2)} \rangle = \bigcup_{i \in J} (B \cap A_i)$$

同理可证明 $B \cup (\bigcap_{i \in J} A_i) = \bigcap_{i \in J} (B \cup A_i)$.

$$6) (\bigcup_{i \in J} A_i)^c = \langle U, \bigcup_{i \in J} A_i^{(1)}, \bigcap_{i \in J} A_i^{(2)} \rangle^c = \langle U, \bigcap_{i \in J} A_i^{(2)}, \bigcup_{i \in J} A_i^{(1)} \rangle = \bigcap_{i \in J} \langle U, A_i^{(2)}, A_i^{(1)} \rangle = (\bigcap_{i \in J} A_i^c)$$

同理可证明 $(\bigcap_{i \in J} A_i)^c = (\bigcup_{i \in J} A_i^c)$;

$$7) \square(A \cup B) = \square(\langle U, A_1, A_2 \rangle \cup \langle U, B_1, B_2 \rangle)$$

$$= \square(\langle U, A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2 \rangle) = \langle U, A_1 \cup B_1, (A_1 \cup B_1)^c \rangle$$

$$= \langle U, A_1 \cup B_1, A_1^c \cap B_1^c \rangle = \langle U, A_1, A_1^c \rangle \cup \langle U, B_1, B_1^c \rangle = \diamond A \cup \diamond B$$

同理可证明 $\diamond(A \cap B) = \diamond A \cap \diamond B$,

$$8) \diamond(A \cup B) = \diamond(\langle U, A_1, A_2 \rangle \cup \langle U, B_1, B_2 \rangle)$$

$$= \diamond(\langle U, A_1 \cup B_1, A_2 \cap B_2 \rangle) = \langle U, (A_2 \cap B_2)^c, A_2 \cap B_2 \rangle$$

$$= \langle U, A_2^c \cup B_2^c, A_2 \cap B_2 \rangle = \langle U, A_2^c, A_2 \rangle \cup \langle U, B_2^c, B_2 \rangle = \diamond A \cup \diamond B,$$

同理可证明 $\diamond(A \cap B) = \diamond A \cap \diamond B$.

定义 4 设 U 是非空论域, 记 U 上某种类型的集合全体为 $\Xi(U)$, 设 $A, B, C \in \Xi(U)$, 称映射 $d_{\Xi}: \Xi(U) \times \Xi(U) \rightarrow [0, 1], \forall A, B \mapsto d_{\Xi}(A, B)$ 为 $\Xi(U)$ 上的距离, 如果其满足下面的条件:

$$1) d_{\Xi}(A, B) \geq 0, d_{\Xi}(A, A) = 0;$$

$$2) d_{\Xi}(A, B) = d_{\Xi}(B, A);$$

3) $d_{\Xi}(A, C) \leq d_{\Xi}(A, B) * d_{\Xi}(B, C)$, 其中 $*$ 是 $[0, 1]$ 上定义的某种运算.

定理 2 记有限论域 U 上经典子集全体为 $P(U)$, 映射 $d_P: P(U) \times P(U) \rightarrow [0, 1]$, 任意 $X, Y \in P(U)$,

$$d_P(X, Y) = \text{card}(X \cup Y - X \cap Y) / \text{card}(U)$$

则映射 d_P 满足上述距离的公理化条件, 称为 $P(U)$ 上的规范化海明距离.

证明: 显然映射 d_P 满足: $\forall A, B \in P(U), d_P(A, B) \geq 0$, $d_P(A, A) = 0$, 且 $d_P(A, B) = d_P(B, A)$. 现证明 $\forall A, B, C \in P(U), d_P(A, C) \leq d_P(A, B) + d_P(B, C)$.

$\forall x \in A - C$, 则 $x \in A, x \notin C$, 若 $x \in B$, 则 $x \in B - C$, 若 $x \notin B$, 则 $x \in A - B$, 即 $\forall x \in A - C$, 则 $x \in (A - B) \cup (B - C)$, 即 $A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C)$. 同理 $C - A \subseteq (C - B) \cup (B - A)$. 因此

$$\text{card}(A \cup C - A \cap C) = \text{card}((A - C) \cup (C - A))$$

$$\leq \text{card}((A - B) \cup (B - C) \cup (C - B) \cup (B - A))$$

$$= \text{card}(((A - B) \cup (B - A)) \cup ((B - C) \cup (C - B)))$$

$$\leq \text{card}((A - B) \cup (B - A)) + \text{card}((B - C) \cup (C - B))$$

$$= \text{card}(A \cup B - A \cap B) + \text{card}(B \cup C - B \cap C)$$

$$\text{故 } d_P(A, C) \leq d_P(A, B) + d_P(B, C).$$

引理 1 $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in P(U), A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$, 则

$$d_P(U - A_1 - A_2, U - B_1 - B_2) = d_P(A_1, B_1) + d_P(A_2, B_2) - 2\text{card}(A_1 \cap B_2 \cup A_2 \cap B_1) / \text{card}(U)$$

证明: 注意到: $(U - A_1 - A_2) \cup (U - B_1 - B_2) - (U - A_1 - A_2) \cap (U - B_1 - B_2)$

$$= (U - (A_1 + A_2)) \cap (B_1 + B_2) - (U - (A_1 + A_2)) \cup (B_1 + B_2)$$

$$= (A_1 + A_2) \cup (B_1 + B_2) - (A_1 + A_2) \cap (B_1 + B_2)$$

$$= A_1 \cup B_1 + A_2 \cup B_2 - A_1 \cap B_2 - A_2 \cap B_1 - A_1 \cap B_1 - A_2 \cap B_2$$

$$\text{因此 } d_P(U - A_1 - A_2, U - B_1 - B_2) = d_P(A_1 + A_2, B_1 + B_2).$$

$$\text{card}((A_1 + A_2) \cup (B_1 + B_2) - (A_1 + A_2) \cap (B_1 + B_2))$$

$$= \text{card}(A_1 \cup B_1 - A_1 \cap B_1) + \text{card}(A_2 \cup B_2 - A_2 \cap B_2) - 2\text{card}(A_1 \cap B_2 \cup A_2 \cap B_1)$$

$$\text{即 } d_P(A_1 + A_2, B_1 + B_2) = d_P(A_1, B_1) + d_P(A_2, B_2) - 2\text{card}(A_1 \cap B_2 \cup A_2 \cap B_1) / \text{card}(U).$$

记 U 上直觉模糊特殊集合全体为 $IFSS(U)$, 则映射 $d_{IFSS}: IFSS(U) \times IFSS(U) \rightarrow [0, 1]$, 任意 $IFSS(U)$ 中集合 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle, B = \langle U, B_1, B_2 \rangle$,

$$d_{IFSS}(A, B) = [d_P(A_1, B_1) + d_P(A_2, B_2) + d_P(U - A_1 - A_2, U - B_1 - B_2)] / 2$$

也满足上述距离的公理化定义, 称为 $IFSS(U)$ 上的规范化海明距离.

显然, 映射 d_{IFSS} 具有非负性和对称性. $\forall A, B, C \in IFSS(U)$, 设 $A = \langle U, A_1, A_2 \rangle, B = \langle U, B_1, B_2 \rangle, C = \langle U, C_1, C_2 \rangle$,

$$d_{IFSS}(A, C) = [d_P(A_1, C_1) + d_P(A_2, C_2) + d_P(A_1 + A_2, C_1 + C_2)] / 2,$$

$$\leq [(d_P(A_1, B_1) + d_P(B_1, C_1)) + (d_P(A_2, B_2) + d_P(B_2, C_2))]$$

$$+ (d_P(A_1 + A_2, B_1 + B_2) + d_P(B_1 + B_2, C_1 + C_2)) / 2$$

$$= [d_P(A_1, B_1) + d_P(A_2, B_2) + d_P(A_1 + A_2, B_1 + B_2)] / 2$$

$$+ [d_P(B_1, C_1) + d_P(B_2, C_2) + d_P(B_1 + B_2, C_1 + C_2)] / 2$$

$$= d_{IFSS}(A, B) + d_{IFSS}(B, C)$$

即映射 d_{IFSS} 完全满足距离的公理化条件. 容易证明

$$d_{IFSS}(A, B) = d_P(A_1, B_1) + d_P(A_2, B_2) - \text{card}(A_1 \cap B_2 \cup A_2 \cap B_1) / \text{card}(U).$$

3 粗糙近似空间

设 U 是非空有限论域, R 是 U 上的等价关系, (U, R) 是粗糙近似空间, 任意 $X \subseteq U, x \in U$, 记

$$[x]_R = \{y \in U | (x, y) \in R\}, \underline{R}X = \{[x]_R | [x]_R \subseteq X\}, \bar{R}X = \{[x]_R | [x]_R \cap X \neq \emptyset\},$$

任意 $X \subseteq U$, 当且仅当 $\bar{R}X = \underline{R}X$, 称 X 可定义.

引理 2 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 任意 $X, Y \subseteq U$, 则

$$\underline{R}(\underline{R}X \cup Y) = \underline{R}X \cup \underline{R}Y, \bar{R}(\bar{R}X \cap Y) = \bar{R}X \cap \bar{R}Y$$

定理 3 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 任意 $X \subseteq U$, 记 $P_R(X) = \{Y \subseteq U | Y - X \text{ 可定义}\}$, 则 $(P_R(X), \cup, \cap)$ 是一个代数结构.

证明: $\phi \in P_R(X)$, $\forall Y_1, Y_2 \in P_R(X)$, 则 $(Y_1 \cup Y_2) - X = (Y_1 \cup Y_2) \cap X^c = (Y_1 \cap X^c) \cup (Y_2 \cap X^c) = (Y_1 - X) \cup (Y_2 - X)$, 即 $Y_1 \cup Y_2 \in P_R(X)$ 。同时 $(Y_1 \cap Y_2) - X = (Y_1 \cap Y_2) \cap X^c = (Y_1 \cap X^c) \cap (Y_2 \cap X^c) = (Y_1 - X) \cap (Y_2 - X)$, 即 $Y_1 \cap Y_2 \in P_R(X)$ 。

这样 $(P_R(X), \cup, \cap)$ 构成一个代数结构。

推论 1 当 $X = \phi$ 时, $P_R(\phi)$ 是 (U, R) 上全体可定义集合的全体, $(P_R(\phi), \cup, \cap)$ 是一个 σ -代数结构。

定理 4 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 若 $\bar{R}X = \phi$, 则任意 $Y_1, Y_2 \in P_R(X)$, $\bar{R}Y_1 \cup \bar{R}Y_2 = \bar{R}(Y_1 \cup Y_2)$ 。

证明: $\bar{R}Y_1 \cup \bar{R}Y_2 = \bar{R}((Y_1 \cap X) \cup (Y_1 - X)) \cup \bar{R}((Y_2 \cap X) \cup (Y_2 - X))$

$$= \bar{R}(Y_1 \cap X) \cup \bar{R}(Y_1 - X) \cup \bar{R}(Y_2 \cap X) \cup \bar{R}(Y_2 - X)$$

$$= \bar{R}(Y_1 \cap X) \cup \bar{R}(Y_2 \cap X) \cup \bar{R}(Y_1 \cup Y_2 - X) = \bar{R}(Y_1 \cup Y_2 - X)$$

$$= \bar{R}(Y_1 \cup Y_2 - X) \cup \bar{R}((Y_1 \cup Y_2) \cap X) = \bar{R}(Y_1 \cup Y_2)$$

其中 $\bar{R}(Y_1 \cap X) \subseteq \bar{R}X = \phi$, $\bar{R}((Y_1 \cup Y_2) \cap X) \subseteq \bar{R}X = \phi$, $\bar{R}(Y_2 \cap X) \subseteq \bar{R}X = \phi$ 。

定理 5 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 映射 $T_*: P_R(X) \rightarrow IFSS(U)$, $\forall Y \in P_R(X)$, $T_*(Y) = \langle U, \bar{R}Y, U - \bar{R}Y \rangle$, 则当 $\bar{R}X = \phi$ 时, 对于任意 $Y_1, Y_2 \in P_R(X)$, $T_*(Y_1 \cup Y_2) = T_*Y_1 \cup T_*Y_2$ 。

证明: 当 $X = \phi$ 时, $\forall Y \in P_R(X)$, $\bar{R}Y = \bar{R}Y = Y$, 则 $T_*(Y) = \langle U, Y, U - Y \rangle$,

$$T_*(Y_1 \cup Y_2) = \langle U, Y_1 \cup Y_2, U - (Y_1 \cup Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, Y_1 \cup Y_2, (U - Y_1) \cap (U - Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, Y_1, U - Y_1 \rangle \cup \langle U, Y_2, U - Y_2 \rangle$$

$$= T_*Y_1 \cup T_*Y_2。$$

当 $\bar{R}X = \phi$ 时,

$$T_*(Y_1 \cup Y_2) = \langle U, \bar{R}(Y_1 \cup Y_2), U - \bar{R}(Y_1 \cup Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1 \cup \bar{R}Y_2, U - \bar{R}Y_1 \cup \bar{R}Y_2 \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1 \cup \bar{R}Y_2, (U - \bar{R}Y_1) \cap (U - \bar{R}Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1, U - \bar{R}Y_1 \rangle \cup \langle U, \bar{R}Y_2, U - \bar{R}Y_2 \rangle$$

$$= T_*Y_1 \cup T_*Y_2$$

定义 5 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 任意 $X \subseteq U$, 称 X' 是 X 的最小上近似粗等子集, 若其满足下面两个条件:

$$1) \bar{R}X' = \bar{R}X,$$

$$2) \text{任意 } X'' \subset X', \bar{R}X'' \neq \bar{R}X'。$$

推论 2 若 X' 是 X 的最小上近似粗等子集, 则对任意 $[x]_R \subseteq \bar{R}X$, $X' \cap [x]_R$ 必定是单点集合。

定理 6 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 则对任意 $Y_1, Y_2 \in P_R(X)$, $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) = \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 成立, 当且仅当存在 $\bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 的最小上近似粗等集合 Z , 使得 $Y_1 \cap Z = Y_2 \cap Z = Z$ 。

证明: $\forall Y_1, Y_2 \in P_R(X)$, 若 $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) = \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 成立, 则对 $\forall z \in \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$, 必有 $z \in \bar{R}(Y_1 \cap Y_2)$, 即 $[z]_R \cap Y_1$

$\cap Y_2 \neq \phi$ 。由选择公理, 可以从每个 $[z]_R$ 中选出唯一一点, 仍记为 z , $z \in [z]_R$, $z \in Y_1$, $z \in Y_2$ 。由所有这样取出的点 z 构成的集合, 假定为 Z , 可以证明 Z 是 $Y_1 \cap Y_2$ 的最小上近似粗等集合, 并且 $Y_1 \cap Z = Y_2 \cap Z = Z$ 。

另一方面, 若存在 $\bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 的最小上近似粗等集合 Z , 使得 $Y_1 \cap Z = Y_2 \cap Z = Z$, 则 $\bar{R}Z = \bar{R}(\bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2) = \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 。 $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) \supseteq \bar{R}(Y_1 \cap Y_2 \cap Z) = \bar{R}Z = \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$, 故 $\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) = \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$ 成立。

推论 3 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 任意 $X \subseteq U$, $X' \subseteq X$ 是 X 最小上近似粗等集合, 记 $P_{R, X'}(X) = \{Y \subseteq U \mid Y - X \text{ 可定义且 } X' \subseteq Y\}$, 则 $(P_{R, X'}(X), \cup, \cap)$ 是 $(P_R(X), \cup, \cap)$ 的一个子代数结构。

定理 7 设 (U, R) 是粗糙近似空间, R 是 U 上的等价关系, 则映射 T_* 对任意 $Y_1, Y_2 \in P_{R, X'}(X)$, $T_*(Y_1 \cap Y_2) = T_*Y_1 \cap T_*Y_2$ 。

证明: 由于 X' 是 X 的最小上近似粗等集合, 则 $\bar{R}(X) = \bar{R}(X')$, 另外由于 $\forall Y_1, Y_2 \in P_{R, X'}(X)$, $X' \subseteq Y_1 \cap Y_2$, 则 $\bar{R}(X \cap Y_2) = \bar{R}(X \cap Y_1) = \bar{R}(X \cap Y_1 \cap Y_2)$, 故

$$\bar{R}(Y_1 \cap Y_2) = \bar{R}(X \cap Y_1 \cap Y_2) \cup (Y_1 \cap Y_2 - X)$$

$$= \bar{R}(X \cap Y_1 \cap Y_2) \cup \bar{R}(Y_1 \cap Y_2 - X)$$

$$= \bar{R}((X \cap Y_2) \cap \bar{R}(X \cap Y_1)) \cup \bar{R}((Y_1 - X) \cap (Y_2 - X))$$

$$= (\bar{R}(X \cap Y_2) \cap \bar{R}(X \cap Y_1)) \cup \bar{R}((Y_1 - X) \cap \bar{R}(Y_2 - X))$$

$$= (\bar{R}(X \cap Y_2) \cup \bar{R}(Y_2 - X)) \cap (\bar{R}(Y_1 - X) \cup \bar{R}(X \cap Y_1))$$

$$= \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2$$

$$T_*(Y_1 \cap Y_2) = \langle U, \bar{R}(Y_1 \cap Y_2), U - \bar{R}(Y_1 \cap Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2, U - \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2 \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1 \cap \bar{R}Y_2, (U - \bar{R}Y_1) \cup (U - \bar{R}Y_2) \rangle$$

$$= \langle U, \bar{R}Y_1, U - \bar{R}Y_1 \rangle \cap \langle U, \bar{R}Y_2, U - \bar{R}Y_2 \rangle$$

$$= T_*Y_1 \cap T_*Y_2$$

结论 本文主要研究了直觉模糊特殊集算子的性质, 给出了其海明距离的计算方法, 探讨了粗糙近似空间上一类粗代数结构与其直觉模糊特殊集表示之间的同态关系。

参考文献

- 1 裴峥, 秦克云. 粗糙集的直觉模糊特殊集表示及其在属性约简中的应用. 模式识别与人工智能, 2004, 17(3): 262~266
- 2 De Kumar S, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 477~484
- 3 Szmidi E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118: 467~477
- 4 Wang Guo-jun, He Ying-Yu. Intuitionistic fuzzy sets and L-fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110: 271~274
- 5 Mondal T K, Samanta S K. Topology of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119: 483~494
- 6 Demirci M. Axiomatic theory of intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110: 253~266