

粗糙性理论的列氏总分学分析

陈 波 周明天

(电子科技大学计算机学院 成都 610054)

摘 要 本文从探究粗糙总分学起源的上下文开始,回顾了其本源列氏总分学及其扩展后的塔氏立体几何关键内容。通过使用上述基本理论的术语和概念,对粗糙包含定义的公设系统进行了初步分析,从而阐述了对粗糙总分学的基本内涵理解。粗糙总分学体现了列氏总分学与粗糙性理论结合的一个方面,但列氏总分学作为与经典集合论相提并论的理论体系,具有完全基于该理论构造粗糙性的能力。基于此观点,本文首先描述了以集合论中划分的概念表达的粗糙集理论的形成原理,然后以列氏总分学概念来对等地替代集合论概念,以获得纯粹总分学意义上的粗糙性。这些思想和努力的最终目的,是利用总分学作为形式本体论要素的特质,建立作为软计算基本方法的粗糙性理论和作为知识/智能系统核心的本体论之间的关系,从而构建适应新型计算模式的方法学。

关键词 粗糙总分学,列氏总分学,粗糙性语义,粒度粗糙性

A Lesniewski Mereological Analysis on Roughness Theory

CHEN Bo ZHOU Ming-Tian

(School of Computer Science, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract The present paper is set up to explore the context from which the Rough Mereology derives, mainly focusing on the original Mereology of Lesniewski and extension of Mereology to Tarski's Geometry of Solids. By using the notions from above fundamental theories, we take a naïve analysis on the axiom system for Rough Inclusion definitions so as to clarify its connotation. Rough Mereology is an approach to combination of Mereology with Roughness Theory, but as a theory on par with respect to classical Set Theory, it is capable to build up the notion of Roughness purely over Mereology. Based on such intuition, the motivation that leads to roughness is first investigated in terms of classic set partitioning, and then transformed in the context of Mereology to attain a pure Mereological approach to roughness. It is the ultimate purpose of the present efforts that the essential role of Mereology in relation to Formal Ontology may bridge the methodology in Soft Computing to the key component in Knowledge/Intelligent System, say the Roughness Theory and the Formal Ontology, so as to construct new methodologies and theories to adapt emerging intelligent computing paradigm.

Keywords Rough mereology, Lesniewski mereology, Semantics of roughness, Granular roughness

20 世纪 80 年代,波兰学者 Z. Pawlak 提出了粗糙集理论 (Rough Set Theory, RST)^[1~4],从此该理论就向着不同的方向发展,成为数据分析、知识发现的一个重要方法;90 年代,同样是波兰学者的 L. Polkowski 和 A. Skowron 扩展了该理论成为粗糙总分学 (Rough Mereology)^[5~10],主要用于复杂对象系统的合成质量控制,并推广到了粗糙信息颗粒及粒度计算,逐渐在粗糙性理论的研究中占据重要的地位。本文将试图通过对粗糙总分学理论所基于的列氏总分学 (Lesniewski Mereology) 理论及扩展的探究,阐明粗糙总分学的内涵及一般粗糙集理论中包含的列氏总分学语义,为基于列氏总分学思想创建新的方法学提出基本的构思。

1 列氏总分学基础

列斯尼耶夫斯基 (Stanislaw Lesniewski) 是上个世纪初期波兰最伟大的逻辑学家之一,他最重要的成就是提出了与 Russell 及 Whitehead 之《数学原理》(Principia Mathematica)^[11] 体系相提并论的独立数学逻辑体系。Luschei 在文 [12] 中详细介绍了列氏体系,其原始逻辑基础包含第一要义

(Protothetic) 和本体论 (Ontology) 公理以及用于定义、分布、替换和外延性的基本原理。第一要义是他关于命题、连接符、连接符构成算符以及更高阶由算符构成算符的无限可扩展逻辑,即“命题逻辑”;本体论是其关于名词、动词、名词性算符或动词性算符的无限可扩展逻辑,即“名词逻辑”。在此逻辑基础上,列氏系统的总分学可被称为一个公理化的关于“部分与整体”最一般关系的逻辑外 (Extralogical) 理论。

部分关系的分析从原子学派开始通过古代和中世纪的本体论者的著述延续至今,一直是西方哲学研究的焦点之一,它通过 Brentano 及其学生 Husserl 的《逻辑调查》(Logical Investigation) 进入当代哲学研究领域,列氏总分学与后期出现的 Leonard 及 Goodman 的个体演算 (Calculus of Individuals)^[13] 是对该范畴的形式化理论,这两种理论相似但存在重要差异。关于一般总分学的综述,可以参看文 [14]。

列氏总分学的基本原理描述如下:

只有 A 中的组成成分但不同于 A 的个体是 A 的部分,没有个体是自己的部分;如果 A 是 B 的部分,则 B 必不是 A 的部分;任何 A 的部分的部分是 A 的部分。这里规定了部分

关系的 3 个特性即反自反、非对称以及传递性。设 PP 表示二元真部分(Proper Part)关系,其形式化描述为:

$$(P1) \neg PPxx;$$

$$(P2) PPxy \rightarrow \neg PPyx;$$

$$(P3) PPxy \wedge PPyz \rightarrow PPxz.$$

只有 A 中的任何个体是 A 的一个组成元素。任何个体在其自身中,并且任何 A 的组成成分的组成成分也在 A 中。只有任何 A 的部分或者 A 本身在 A 中。用 INGR 表示二元组成关系(Ingredient),则其形式化描述为:

$$(I1) INGRxx;$$

$$(I2) INGRxy \wedge INGRyz \rightarrow INGRxz;$$

$$(I3) INGRxy \rightarrow PPxy \vee x=y.$$

A 覆盖(Overlap)B 定义为当且仅当至少个体 A 的一个组成成分在 B 中;即 A 和 B 至少拥有一个共同的组成成分。A 覆盖 B 当且仅当 B 覆盖 A。A 在 B 中当且仅当 A 的每个组成成分在 B 中,这些情况包括:A 的每个部分是 B 的部分,或者 A 的是一个个体,其每个组成成分都覆盖 B,或者每个覆盖 A 的个体也同样覆盖 B。形式化描述如下:

$$(O1) Oxy =_{df} \exists z (INGRzx \wedge INGRzy)$$

$$(O2) Oxy \leftrightarrow Oyx \wedge INGRxy \leftrightarrow (\forall z PPzx \wedge PPzy) \vee$$

$$(O3) (\forall z (INGRzx \wedge Ozy)) \vee$$

$$(\forall z (Ozx \wedge Ozy))$$

由于只有相互组成的个体是相同的,下面 5 个条件中的任何一个都构成了 A 和 B 相同的充分必要条件:

仅有 A 的组成成分在 B 中;

A 的每个部分在 B 中并且 B 的每个部分在 A 中;

A 为一个个体,其所有组成成分覆盖 B,并且它都被 B 的所有组成成分所覆盖。

每个 A 的组成成分覆盖 B,并且每个 B 的组成成分覆盖 A。

只有 A 的每个覆盖者覆盖 B。

A 是 b 的一个集体(Collection)当且仅当 A 中每个组成成分都至少有一个组成成分在 A 中的一个 b 中,即只有所有组成成分都覆盖自身中一个 b 的个体是 b 的集体。A 是 b 的总体(Totality)当且仅当(1)每个 b 在 A 中并且(2)每个 A 的组成成分的一些组成成分在至少一个 b 中。笔者认为,这两个定义可以近似地理解为当 A 为 b 对应属性个体的集体时, A 中所有组成成分都具有 b 属性;如果 A 为 b 的总体时,那么 A 不仅是 b 的集体,同时所有的具有 b 对应属性的个体都在 A 中。形式化为:

$$xCOL_y =_{df}$$

$$(COL) \exists y[y \in b] \wedge INGRyx \wedge \forall z[INGRzx \wedge \exists w[INGRwz \wedge INGRwy]]$$

$$(TTL)$$

$$xTTL_y =_{df} \forall y[(y \in b) \rightarrow INGRyx] \wedge xCOL_y$$

在文[15]中,Tarski 将列氏总分学进行了归纳,给出了如下的定义和公设(Postulate),此处的部分(Part)关系等价于前面提到的组成(INGR)关系,总和(Sum)等同于上述的总体(Totality):

定义 1 个体 X 称为个体 Y 的真部分(Proper Part),若 X 是 Y 的一部分并且 X 与 Y 不相同。

定义 2 个体 X 称为与个体 Y 分离(Disjoint),若不存在个体 Z 同时是 X 和 Y 的一部分。

定义 3 个体 X 称为个体类 α 所有元素的总和(Sum),

若 α 的每个元素是 X 的一部分并且如果不存在 X 的组成部分与 α 的所有元素相分离。

公设 1 如果 X 是 Y 的组成部分并且 Y 是 Z 的组成部分,则 X 是 Z 的组成部分。

公设 2 对每个非空个体类 α ,有且仅有一个个体 X 是 α 所有元素的总和。

公设 1 是描述列氏总分学的传递性,而公设 2 则规定了具有特定属性个体类的总体之存在性和唯一性。

对于 Tarski 所归纳的列氏总分学,Bennett 等在文[16]中给出了其形式化表达如下:

$$D1) PP(x, y) \equiv_{df} (P(x, y) \wedge \neg(x = y))$$

$$D2) DR(x, y) \equiv_{df} \neg \exists z[p(z, x) \wedge p(z, y)]$$

$$D3) SUM(\alpha, x) \equiv_{def} \forall y[y \in \alpha \rightarrow P(y, x)] \wedge \neg \exists z[p(z, x) \wedge \forall y[y \in \alpha \rightarrow DR(y, z)]]$$

$$A1) \forall x \forall y \forall z[P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)]$$

$$A2) \forall \alpha[\exists x[x \in \alpha] \rightarrow \exists ! x[SUM(\alpha, x)]]$$

文[14]还给出定义覆盖关系的附加定义,即对 DR 关系取非:

$$D4) O(x, y) \equiv_{df} \neg DR(x, y)$$

2 Tarski 的立体几何系统

基于上述归纳的列氏总分学定义及公设,Tarski 在文[15]中给出了立体几何(Geometry of Solids)的基本理论。该几何理论与通常的三维欧氏空间理论不同之处在于,空间中只存在称为立体(Solid)的几何图形而不存在欧氏空间中的点、线、面等图形。在塔氏立体几何中,唯一的原语概念是球域(Sphere),基于该概念,Tarski 给出了如下的定义。

定义 2.1 球域 A 外切于(Externally Tangent)球域 B,若:(1)球域 A 与球域 B 分离(DR);(2)给定两个球域 X 和 Y 作为球域 A 的组成部分并与球域 B 相分离,则至少 X 与 Y 中的一个另外一个是球域 B 的组成部分。

定义 2.2 球域 A 内切于(Internally Tangent)球域 B,若:(1)球域 A 是球域 B 的真部分(PP);(2)给定两个球域 X 和 Y 包含球域 A 作为组成部分并形成球域 B 的组成部分,则至少 X 与 Y 中的一个另外一个是球域 B 的组成部分。

定义 2.3 球域 A 和球域 B 外接于(Externally Diametrical)球域 C,若:(1)球域 A 和球域 B 都外切于球域 C;(2)给定两个与球域 C 分离的球域 X 和 Y,使得 A 是 X 的组成部分而 B 是 Y 的组成部分,则球域 X 和球域 Y 相分离。

定义 2.4 球域 A 和球域 B 内接于(Internally Diametrical)球域 C,若:(1)球域 A 和球域 B 都内切于球域 C;(2)给定两个与球域 C 分离的球域 X 和 Y,使得 A 外切于 X 而 B 外切于 Y,则球域 X 和球域 Y 相分离。

定义 2.5 球域 A 与球域 B 同心(Concentric),若以下任一条件满足:(1)球域 A 和 B 同一;(2)球域 A 是球域 B 的真部分,同时给定两个球域 X, Y 外切于 A 且内切于 B;(3)球域 B 是球域 A 的真部分,同时给定两个球域 X, Y 外切于 B 且内切于 A。

定义 2.6 一个“点”是包含给定球域所有同心球域的种类。

定义 2.7 点 a 和 b 到点 c 等距(Equidistant),若存在球域 X 作为元素属于点 c 并且该球域满足下列条件:不存在球域 Y 作为元素属于点 a 或点 b 时,是 X 的一部分或与 X 相分离。

定义 2.8 立体(Solid)是球域的任意总和。

定义 2.9 点 a 在立体 B 内部,若存在一个球域 A 同时是点 a 的元素和立体 B 的一部分。

上述定义的形式化可以参考文[14],定义 1 至 5 表达的关系如图 1 所示。

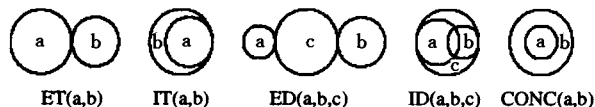


图 1 定义 2.1~2.5 图示^[16]

塔氏立体几何的公设如下:

公设 2.1 点的概念和两点到第三点等距概念满足三维欧氏几何所有的公设。

公设 2.2 如果 A 为一个立体, A 所有内部点的类 α 是一个非空的正则开集(Regular Open Set)。

公设 2.3 如果点的类 α 是一个非空的正则开集(Regular Open Set),存在立体 A 使得 α 是其所有内点的类。

公设 2.4 如果 A 和 B 都是立体,且 A 的所有内点同时是 B 的所有内点,则 A 是 B 的组成部分。

传统三维欧拉空间中的实体以抽象成为一阶对象的点来作为空间中的基本元素,通过点来定义线和面,进而定义现实空间所见到的立体对象,即“点”的概念是最原始的基本原语概念,而“立体”是通过“点”可定义的高阶对象;相对应地,在塔氏立体几何中,作为原语的基本对象是球域,实际上可以理解为空间中的区域,这是人们认识世界时获得的未经高度抽象的直观认识。通过用球域作为一阶对象,按照定义 7,点成为了用球域可定义的高阶对象,不再是不可或缺的概念。表面上,这种与传统几何学背道而驰的理论系统显得有些古怪,但是这种思想在计算机理论研究越发关注基于常识推理、关注日常生活概念与知识发现和表示的今天,塔氏立体几何建立所依据的思想方法论,确实具有相当重要的意义。事实上,按照公设 1,该几何与欧氏几何具有可一一映射的关系。Tarski 对此给出了相应的两个定理。

定理 2.1 立体几何的公设系统是绝对的(Categorical)。

定理 2.2 立体几何的公设系统包含列氏总分学的公设系统,在普通三维欧氏空间中具有一个模型。要获得该模型,将球域理解为欧氏空间球面内部,而部分到整体的关系理解为限制在非空正则开集合的包含关系。

3 粗糙总分学中粗糙包含公设条件阐释

在 Polkowski 和 Skowron 两位学者合作研究完成的关于粗糙总分学的大量著作中,文[7,9]都给出了关于粗糙总分学理论较完备的语法和语义系统。这里我们仅阐述最常被引用的关于粗糙包含定义的几点基本条件。

对象全集 U 上一个取值在 $[0,1]$ 之间的实函数 $\mu(x,y)$ 如果满足下列条件,则称为粗糙包含(Rough Inclusion):

1)任何 x 有 $\mu(x,x)=1$ 。该条件对应于列氏总分学中组成关系所具有的自反特性,即塔氏立体几何空间中球域自身的包含关系。

2) $\mu(x,y)=1$,则对任何三元组 x,y,z 有 $\mu(z,y) \geq \mu(z,x)$ 。该条件表示,在塔氏立体几何空间中,球域 A 是球域 B 的组成部分,则任意球域 C 覆盖($D4$ 定义)球域 B 的程度大于覆盖球域 A 的程度。

3)对任意 x ,存在 n ,使得 $\mu(n,x)=1$ 。这是一个空对象存在假设,在列氏总分学中被排除在系统之外。

对象 n 满足条件 3),则称为一个 μ 对象;另外,若 $\mu(x,y)=1=\mu(y,x)$,令 $x=\mu y$,这是列氏总分学的自反性表达,同时引入了粗糙总分学特有的程度等价意义。

4)若对象 x,y 有属性:如果 $z \neq \mu n$ 且 $\mu(z,x)=1$,则存在 $t \neq \mu n$,使得 $\mu(t,z)=1=\mu(t,y)$

那么:有 $\mu(x,y)=1$ 。

条件 4)表示在列氏总分学中,如果在 B 的任意非空组成成分 A 分中存在某个部分是 C 的组成成分,则 B 是 C 的组成成分,即 B 的任意组成成分 A 都被 C 所覆盖时, B 构成 C 的组成成分。

5)对任何对象集体 Γ ,存在一个对象 x 具有以下属性:

A)如果 $z \neq \mu n$ 且 $\mu(z,x)=1$ 则存在 $t \neq \mu n, w \in \Gamma$ 使得 $\mu(t,z)=\mu(t,w)=\mu(w,x)=1$

注意,此处的对象集体 Γ 对应于列氏总分学中的对象类 Γ ,该条件表示,对于 A 的每个组成部分 B 都存在某个组成部分与 X 中的 Γ 类对象覆盖,这是列氏总分学中关于对象集体的定义(COL)。

B)如果 $w \in \Gamma$,则 $\mu(w,x)=1$;该条件表示所有的 Γ 类对象都是 x 的组成成分。

C)如果 y (将 x 替换为 y)满足上面两个条件,则 $\mu=(x,y)=1$ 。该条件对应于列氏总分学中的对象总体定义(TTL)。

任何满足 5(A)的 x 称为 Γ 中的对象集合(Set),对应于列氏总分学的集体(Collection);如果此外还满足 5(B,C),则 x 称为 Γ 中的对象类(Class),对应于列氏总分学的总体(Totality)。

4 列氏总分学的潜力

根据塔氏立体几何理论给出的两个定理可以发现,列氏总分学理论的重要意义在于,它可以作为集合论的一个替代选择。因此,从这个角度而言,笔者认为,粗糙总分学的提出,不单纯是对于基本粗糙集合理论的一个扩展,而是可以理解为粗糙集合理论的一个替代理论。当然,在 Polkowski 和 Skowron 的关于粗糙总分学理论的著述中,出于种种原因,并没有强调这点,而且将列氏总分学的真部分(Proper Part)关系衍生出来的部分与整体关系量度函数称为粗糙包含函数,与集合论的包含关系有相互融合的意味,并且没有明确强调该理论在处理对信息系统的数据分析时的独立性,即并未太多地涉及到基本粗糙集理论的一些概念。即使从时间上或者理论的继承性上,粗糙总分学很容易被看作粗糙集理论的简单扩展,这非常容易使人们忽视该领域的重要地位,而仅仅作作为普通粗糙集的附属物。如果能换个角度,按照列氏非集合论的思想,完全独立地发展粗糙总分学,继承和发展列氏总分学,并将粗糙总分理论应用于由列氏总分学理论派生的立体几何以及近年来出现的塔氏几何扩展,如 RCC(基于区域和连接的空间逻辑系统)^[17]、RBQ(基于区域的定性几何)^[16]等新的理论,必将形成更完备的理论体系。更值得关注的是,Guarino 在文[18]中描述了形式本体论(Formal Ontology),用于概念分析和知识表示的方法与意义,而他所描述的形式本体论将总分学和拓扑学作为两个基本要素。这样,一旦将粗糙总分学用于该领域,必然在知识系统的构建更进一步的下一代 Internet 的内容表示上,开创出崭新的理论分支和应

用前景。

为了寻找粗糙集理论与列氏总分学更多的结合点,下面首先研究促使粗糙集理论产生的基本思想。

5 粗糙集理论产生的动因分析

粗糙集理论常常被认为是模糊理论的一种特殊形式,其中的上界和下界集合近似代表着一种特殊类型的三值模糊集^[19]。将粗糙性理论和相对经典的模糊性理论结合并一定程度合并,产生创新方法来丰富两种理论论域,从这个角度来说,上述观念在技术上是正确的。但是,如果单纯从粗糙性理论语义上来讲,这种将其理解成其它理论可衍生的附属理论的观点显得相对狭隘,这将弱化粗糙性理论作为软计算中一种独立方法学的重要性的和独有的优点。

在粗糙集理论中^[1~4],信息系统(Information System, IS) $I: (U, A)$ 是其最基本的概念,其中 U 代表系统研究实体的全集, A 是实体所有属性的集合。决策系统(Decision System, DS)是信息系统的一种特殊形式,其属性集 $A = C \cup \{d\}$, 其中 C 代表所有条件属性(Conditional Attributes), $\{d\}$ 唯一的决策属性(Decision Attribute) d 。粗糙集理论产生最初的目的之一就是寻找决策系统的决策规则(Decision Rules, DR); 从知识发现(Knowledge Discovering on Database)的角度看,关联规则(Association Rules, AR)生成^[20]是 DR 生成的一种特殊形式。

作为一般性的例子,表 1 的信息表给出一个任意的信息系统 I^* 。为了简便起见,首先假设 I^* 属性间的相互关联已被约简,另假设表中数字代表对应条件属性的具体值,不同列中相同数字代表着其具体意义上下文不同的含义。

表 1 I^* 的信息表

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	d
u_1	0	1	0	2	4	d_1
u_2	1	0	1	2	3	d_2
u_3	0	1	0	2	3	d_1
u_4	2	0	2	1	2	d_2
u_5	2	1	1	1	4	d_1
u_6	2	1	1	0	1	d_1
u_7	1	0	2	0	0	d_1
u_8	0	1	1	2	3	d_3

I^* 的决策规则形式为: 对 $B \subseteq C, u \in U, Val_B(u) \Rightarrow Val_d(u)$, 即针对对象 u 的条件属性集合 B 的一个赋值可以确定其决策属性 d 的对应值。这类推理常常在疾病诊断中可以看到: 症状是各种条件属性, 而疾病状态则是决策属性, 一条决策规则可以具体化为从患者表现的症状推理出其患疾病。

对上面的公式, 还可以从全集划分的角度来理解它, 左边的 $Val_B(u)$ 可依据属性集 B 的不同赋值构成全集 U 的一个划分。例如, 对 $B = \{c_2, c_3\}$, 基于 $Val_B(u)$ 的全集 U 划分为: $\{\{u_1, u_3\} \{u_2\} \{u_4, u_7\} \{u_5, u_6, u_8\}\}$, 本文称为条件划分(Conditional Partitioning, CP)。针对决策属性的赋值 $Val_d(u)$ 可得到类似的划分: $\{\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7\} \{u_2, u_4\} \{u_8\}\}$, 称为决策划分(Decision Partitioning, DP)。一条决策规则 DR 可以被视作在 U 上两个不同分区之间的关系, 它可能陈述“如果 u 有条件属性 $c_2 = 1$, 且 $c_3 = 0$, 则 u 有决策属性 $d = d_1$ ”。从 I^* 的信息表中可以看到, 在条件划分 CP 的分区 $\{u_1, u_3\}$ 和决策

划分 DP 中分区 $\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7\}$ 具有集合包含关系。上述的决策规则例子不足以描述给定信息系统中完整的推理能力, 因为还需要知道对给定的条件属性集合 B 的其他赋值中, 哪些还能确定实体的决策属性是一个指定值。在 I^* 中, 除了赋值 $B = \{c_2, c_3\}$ 为 $(1, 0)$ 得到 $\{u_1, u_3\}$ 具有决策属性值 $d = d_1$, 我们还关心 B 的其它赋值如何得到同一个决策分区中其他实体 $\{u_5, u_6, u_7\}$ 。从表 1 可以看出, 同一决策分区中其他实体对象 B 的赋值有 $(1, 1)$ 和 $(0, 2)$, 在 U 的条件划分中对 B 的赋值 $(1, 1)$ 和 $(0, 2)$ 的分区分别为 $\{u_5, u_6, u_8\}$ 及 $\{u_4, u_7\}$, 但这些对 B 的赋值不能得出正常的决策规则, 因为这种赋值所对应的实体对象还存在其它决策划分的分区中, 如 u_4 和 u_8 。从集合理论观点看, $\{u_5, u_6, u_8\}$ 和 $\{u_4, u_7\}$ 都只是和指定决策分区 $\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7\}$ 部分相交。而对 B 赋值 $(0, 1)$ 获得的条件分区 $\{u_2\}$ 与决策分区中当前研究的决策属性值无关, 即与指定决策分区 $\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7\}$ 没有交集。

到目前为止, 从前面的观察可建立以下直观命题:

命题 5.1 对于一个信息系统, 存在对实体全集的两种划分, 即条件划分 CP 和决策划分 DP。

命题 5.2 对任意一个 CP 中的 B -分区 c_{p_i} , 它对应属性值集合 B 的赋值能绝对确定分区中实体的决策属性值为 d_i , 当且仅当 $c_{p_i} \subseteq d_{p_i}$, 其中 d_{p_i} 为 $d = d_i$ 所对应的 DP 中分区。称 CP 中该类分区为关于 d_i 的正则 B -分区, 记为 $R_{p_B}(d_i)$ 。

命题 5.3 对任意一个 CP 中的 B -分区 c_{p_i} , 它对应属性值集合 B 的赋值能引出分区中部分实体的决策属性值为 d_i , 但分区中其它实体为其他决策属性值, 当且仅当 $c_{p_i} \cap d_{p_i} \neq \emptyset$ 且 $c_{p_i} \not\subseteq d_{p_i}$, 其中 d_{p_i} 为 $d = d_i$ 所对应的 DP 中分区。称 CP 中该类分区为关于 d_i 的非正则 B -分区, 记为 $IR_{p_B}(d_i)$ 。

正是 $IR_{p_B}(d_i)$ 在推理规则中的不确定性, 导致了粗糙集理论的产生。令集合 $X = \{u | d(u) = d_i, u \in U\}$, 则关于 B 的 X 下界近似 $B \underline{X}$ 是所有 $R_{p_B}(d_i)$ 的并集; 而上界近似, $B \overline{X}$, 是 $B \underline{X}$ 与所有 $IR_{p_B}(d_i)$ 的并集。尽管本文没有显式地引入粗糙集理论中的关键基本概念不可分辨关系(Indiscernible Relation, IND)及其上的等价类概念, 上述描述本质上基于此, 其中的不可分辨关系由对实体的条件属性同一赋值确定, 而其上的分区则代表着相应等价类。

6 粗糙集思想的粒度化考虑

信息系统条件划分 CP 和决策划分 DP 中的分区可分别定义为条件信息颗粒(Conditional Granules, CGr)和决策信息颗粒(Decision Granules, DGr)。条件属性集合 B 的一个赋值可确定一个 CGr, 记为 $CGr_B(Val_B)$, 它等价于 CP 中的一个 B -分区。同样方式, $CGr_d(Val_d)$ 等价于 DP 中一个分区。自上而下来看, 实体全集对应的信息颗粒被分解, 信息系统被拆分成较小的子系统信息颗粒。大部分情况下, 只有部分子系统是我们感兴趣的, 而对单个子系统的研究具有更小的复杂度。信息颗粒的可细分特征在实践领域非常普遍, 类似于拆分解的策略。在信息系统的决策规则获取过程中, 通过将完整信息系统分解成多个决策信息颗粒, 首先寻找每个决策颗粒 DGr 对应的本地决策规则, 然后可相应产生全局信息系统的完整决策规则。与自上而下的系统观相对应, 当从针对每个基本元素实体的最细粒度信息颗粒开始自下而上的探究信息系统构成, 每个分区的粒度化表示具有较粗的粒度, 并隐藏了同一分区中对象之间的差异性, 从而该分区对应的信息颗粒成为具有相同指定特征对象的总体, 成为一个可识别的

完整个体。在信息系统中,存在一个依据信息颗粒粒度粗细度形成的体系,其中最上层是包含全部的代表实体全集的颗粒,而最底层是代表每个基本实体的原子对象,其间是代表实体中不同类别分区的信息颗粒。

通常,这种粒度体系很容易通过集合理论中不同粒度信息颗粒对应的集合分区之间子集包含关系与成员属于关系来构成。但在这种观点中,基本信息颗粒和分区信息颗粒之间是成员属于关系($\in$),而分区信息颗粒与全集信息颗粒之间是子集包含关系($\subseteq$)。在经典集合理论中,成员属于关系与自己包含关系是不同的,并且信息颗粒试图将对象集合表示为粗粒度的个体实体,而集合与子集的概念在经典集合理论中本质上是表达实体的集体而不是一个实体。

7 粗糙性的列氏总分学构造方法

为了一致地描述信息颗粒及其关系,而不必考虑该信息颗粒在信息系统中是代表基本的对象实体还是对象实体的集体,可以采纳列氏总分学代替经典集合论来研究信息颗粒之间的关系。这样,不同粒度的信息颗粒之间不一致的关系,即成员属于关系和子集包含关系被统一的关系——作为列氏总分学最基本概念的部分与整体关系(relation of part to whole)所代替。这样,所有的信息颗粒作为“个体”具有了同等的地位,不再有语义上的鸿沟来区分其代表的实体集合或是单个实体,因为分区信息颗粒所包含的实体个体可看作该信息颗粒作为统一个体的一部分。这样,前述粒度体系可以描述为:原子信息颗粒是其所属分区信息颗粒的一部分,而所有分区信息颗粒是全集信息颗粒的一部分。

比较前面给出的几个命题,通过把经典集合论转换成列氏总分学概念,可以得到如下命题系统:

命题 5.2' 对任意条件信息颗粒(Conditional Granule, $CGr_B(Val_B)$),它对应属性值集合 B 的赋值能绝对确定该信息颗粒中原子部分的决策属性 d 值为 d_i , 当且仅当 $P(CGr_B(Val_B), DGr_d(d_i))$, 其中 $DGr_d(d_i)$ 是 $d=d_i$ 确定的决策信息颗粒(Decision Granule)。称此类条件信息颗粒为关于 d_i 的正则 B -信息颗粒,记为 $RGr_B(d_i)$ 。

命题 5.3' 对任意条件信息颗粒 $CGr_B(Val_B)$, 它对应属性值集合 B 的赋值能引起该信息颗粒中原子部分的决策属性 d 值除 d_i 之外还有其它取值, 当且仅当 $PO(CGr_B(Val_B), DGr_d(d_i))$, 其中 $DGr_d(d_i)$ 是 $d=d_i$ 确定的决策信息颗粒。称此类条件信息颗粒为关于 d_i 的非正则 B -信息颗粒,记为 $IRGr_B(d_i)$ 。

命题 5.2' 显示关于 d_i 的正则 B -信息颗粒是 d_i 确定决策颗粒的一部分,而命题 5.3 则描述了非正则 B -信息颗粒与 d_i 确定决策颗粒真覆盖。

则前面的集合近似也可以转换成用指定条件属性集 B 对应的条件信息颗粒 $CGr_B(Val_B)$ 来近似决策信息颗粒 $DGr_d(d_i)$, 其关键在于近似一个信息颗粒仅仅是通过从其较简单部分来构造出一个复杂信息颗粒的过程。对应于集合方式定义获得的上界与下界近似,基于列氏总分学定义的信息颗粒近似定义如下:

定义 7.1 所有关于 d_i 的正则 B -信息颗粒 $RGr_B(d_i)$ 构造的信息颗粒称为关于 d_i 决策信息颗粒 $DGr_d(d_i)$ 的内核信息颗粒,记为 $KERNELGr_B(d_i)$, 这是下界近似。

定义 7.2 所有关于 d_i 的非正则 B -信息颗粒 $IRGr_B(d_i)$ 造成的信息颗粒称为关于 d_i 决策信息颗粒 $DGr_d(d_i)$ 的

外壳信息颗粒,记为 $HULLGr_B(d_i)$, 这是下界近似与上界近似之间的边界。

定义 7.3 决策信息颗粒 $DGr_d(d_i)$ 的内核信息颗粒 $KERNELGr_B(d_i)$ 与外壳信息颗粒 $HULLGr_B(d_i)$ 一起组成 $DGr_d(d_i)$ 的上界近似,称为主体信息颗粒,记为 $CORPUSGr_B(d_i)$ 。从上述定义可以看出,通过用列氏总分学概念代替经典集合论可以得到一种等价的粗糙性理论。

结论 本文回顾了列氏总分学的相关概念,对粗糙总分学内涵进行了初步分析,并提出了完全基于列氏总分学而不依赖于经典集合论构造粗糙性概念的思想。基于此,笔者在相关文[21]中提出了面向粗糙性理论表示语义的粒度表示演算(Granular Representation Calculus),并在此基础上将第 7 节中粗糙性的定义发展成更形式化的粒度粗糙性理论(Granular Rough Theory)。该表示系统和粗糙性理论在文[22~24]中被逐步完善,并扩展到适应多个领域的具体需求。但这些思想被形式化为完备理论之前,尚有许多问题需要解决。因此,本文专门就所有这些思想的初始点做了陈述。正如本文第 4 节所言,这些努力的最终目的,是为了将粗糙性理论这种软计算方法和列氏总分学及其相关的更多理论体系更深刻地结合起来,以便发展出更适应以知识为核心的新系统计算方法论。

参考文献

- 1 Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences 1982, 11: 341~356
- 2 Pawlak Z. Rough sets; Theoretical aspects of reasoning about data, System Theory, Knowledge Engineering and Problem Solving. Dordrecht: Kluwer, 1991, 9
- 3 Grzymala-Busse, Pawlak J, Slowinski Z, et al. Rough Sets. Communications of ACM 38, 1995, 11: 89~95
- 4 Komorowski J, Pawlak Z, Polkowski L, et al. Rough Sets: A tutorial. Rough Fuzzy Hybridization. Springer-Verlag, 1999
- 5 Polkowski L, Skowron A. Rough Mereology. In: Proceedings IS-MIS-94 (LNAI 869. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 85~94
- 6 Polkowski L, Skowron A. Introducing rough mereological controllers; Rough quality control. In: Proceedings RSSC-94. The Third International Workshop on Rough Sets and Soft Computing, San Jose State University, CA, 1994. 78~85
- 7 Polkowski L, Skowron A. Approximate Reasoning about Complex Objects in Distributed Systems; Rough Mereological Formalization. Extended Version for lecture delivered at the Workshop: Logic, Algebra and Computer Science (LACS), Banach International Mathematical Center, Warsaw, December 1996
- 8 Skowron A, Polkowski L. Rough Mereological Foundations for Design, Analysis, Synthesis, and Control in Distributed Systems. Information Sciences. Elsevier Science Inc, 1998
- 9 Polkowski L, Skowron A. Rough Mereology; A new paradigm for approximate reasoning. International Journal of Approximate Reasoning, 15(4): 333~365
- 10 Polkowski L, Skowron A. Towards adaptive calculus of granules. In: Proceedings of the FUZZ-IEEE'98 International Conference. Anchorage, Alaska, USA, May, 1998. 111~116
- 11 Whitehead A N, Russell B. Principia Mathematica. Second Edition. Cambridge University Press, 1957
- 12 Luschei E C. The Logical Systems of Lesniewski. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962
- 13 Leonard H S, Goodman N. The Calculus of Individuals and Its Uses. Journal of Symbolic Logic, 1940, 5: 45~55
- 14 Varzi A C. Parts, Wholes, and Part-Whole Relations: The Prospects of Mereotopology. Data and Knowledge Engineering, 1996, 20: 259~286
- 15 Tarski A. Foundations of the Geometry of Solids. In: Logic, Semantics, Meta-mathematics. Oxford at the Clarendon Press, 1956. 24~29
- 16 Bennett B, Cohn A G, Torrini P, et al. A Foundation for Region-Based Qualitative Geometry. In: Horn W, ed. Proceedings of ECAI-2000, 2000. 204~208

(下转第 229 页)

值向量 S_{M_i} 之间的欧氏距离

$$d_i = d(\tau, S_{M_i}) = \|\tau - S_{M_i}\|$$

其中 d_i 是两个四元数向量的距离。若 $d_{i_0} = \min_i(d_i)$, 则彩色图像 X 属于第 i_0 类。

设待识别的图像 X 取自于第 i 类, 由定理 2 知

$$d_i = \|\tau - S_{M_i}\| \leq \|X - M_i\|_F$$

而图像 X 取自于第 i 类, 相对于模板图像 M_i 的变化较小。因而 τ 相对于 S_{M_i} 的变化一般说来也较小, 从而 d_i 较小。而 X 相对于第 j 类 ($j \neq i$) 的模板图像 M_j 的变化较大。因而在 M_j 上的投影系数向量相对于 S_{M_j} 的变化一般说来也较大, 从而 d_j 较大。所以, 将 X 正确地分到第 i 类的可能性较大。而文[6]的方法中, 由于奇异值仅含有图像的少量信息, 因而将其用于识别时的识别率较低, 错分率较高。

5 实验

我们以第 2 节所示的图像库 1 和 2 分别构成训练样本库 1, 2。每一种彩色图像在不同的情况下获取了 10 个不同的样本, 如不同的光照、模糊、一定的倾斜、一定程度的曝光、受到噪声的干扰等。图 5 给出了红色字符 A 作成的图像的部分样本。

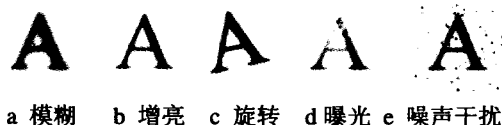


图 5 红色字符 A 作成的图像的部分样本

表 1 在图像库 1 中两种方法识别率的比较

待识别图像类型	文[6]方法识别率	本文方法识别率
无干扰	22.5%	95%
模糊	5%	85%
增亮	5%	80%
旋转	15%	60%
曝光	17.5%	92.5%
噪声干扰	2.5%	87.5%

在两个训练样本库里, 我们将本文介绍的投影系数向量用于图像识别中, 并比较了和文[6]中方法的识别率。我们分别将无干扰图像、模糊、增亮、旋转、噪声干扰各种情况的图像作为测试图像。表 1、2 比较了在样本库 1、2 中两种方法的识别率。

表 2 在图像库 2 中两种方法识别率的比较

待识别图像类型	文[6]方法识别率	本文方法识别率
无干扰	50%	100%
模糊	50%	100%
增亮	25%	80%
旋转	30%	60%
曝光	42.5%	95%
噪声干扰	17.5%	100%

从上表可以看到, 本文方法的识别率有明显提高。可见本文方法是一种有效的图像识别方法。而比较两表可知, 文[6]的方法在样本库 2 中的识别率高于在样本库 1 中的识别率。而文[6]中, 在 9 类图像, 每类 10 个样本构成的样本库里, 识别率可达 80% 左右。可见文[6]的方法适合于样本库较小的情形。在样本库很大时, 文[6]的方法几乎失效。

参考文献

- Hamilton W R. On quaternions. Proceeding of the Royal Irish Academy, 1844
- Zhang F. Quaternion and matrices of quaternion. Lin. Alge. Appl., 1997, 215: 21~57
- Pei S-C, Cheng C-M. A novel block truncation coding of color images by using quaternion moment preserving principle. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Atlanta, 1996
- 帅建伟, 陈振湘, 等. 四元神经网络模型: 彩色图像的识别. 计算机学报, 1995, 88(5): 372~379
- 李葆青. 基于四元数描述的彩色图像边缘检测器. 中国图形图像学报, 2003, 8(A)(7): 774~778
- Ran R S, Huang T Z. Singular value feature extraction of color image and its application for recognition. In: The 20th congress of the international commission for optics, Changchun, 2005
- 刘永辉. 四元数矩阵方程 $AXH^H=B$ 的最小二乘解 (英文). 数学研究, 2003, 36(2): 145~150

(上接第 175 页)

- Randell D A, Cohn A G. A Spatial Logic Based on Regions and Connections. In: Nebel B, Richard C, Swartout W. eds. Principles of Knowledge representation and Reasoning. Proceedings of the Third International Conference. Morgan Kaufmann, Los Altos, 1992. 165~76
- Guarino N. Formal Ontology, Conceptual Analysis and Knowledge Representation. International Journal of Human and Computer Studies, 1995, 43(5-6): 625~640,
- Pawlak Z. Rough sets and fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17: 99~102
- Agrawal R, Imielinski T, Swami A. Mining association rules between sets of items in large databases. Proc of the ACM SIGMOD Conference on Management of Data, Washington, D. C., May 1993
- Chen Bo, Zhou Mingtian. A Pure Mereological Approach to Roughness. In: Wang G, Liu Q, Skowron A, et al. Eds. Proceed-

- ings of RSFDGrC 2003, Chongqing, China. LNCS/LNAI 2639, Springer-Verlag, 2003. 425~429
- Chen Bo, Zhou Mingtian. Adapting Granular Rough Theory to Multi-agent Context. In: Wang G, Liu Q, Skowron A. Eds. Proceedings of RSFDGrC 2003, Chongqing, China, LNCS/LNAI 2639, Springer-Verlag, 2003. 701~705
- Chen Bo, Zhou Mingtian. Extending Granular Representation Calculus for Internet Media Resources. In: Li J, et al. Eds. Proceedings of the 3rd International Conference on Active Media Technology (ICAMT'04), Chongqing, China. World-Scientific, 2004. 571~576
- Chen Bo, Zhou Mingtian. ODWIS As a Prototype of Knowledge Service Layer in Semantic Grid. In: Liew K M, et al. Eds. Proceedings of the 5th International Conference on Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies, Singapore. LNCS 3320, Springer-Verlag, 2004. 739~744