

# 一种求解网络最大流问题的算法<sup>\*</sup>)

凌永发 徐宗本

(西安交通大学理学院 西安 710049)

**摘要** 随着网络应用的不断深入,人们对网络传输容量和服务质量的要求和期望也越来越高,设计高性能网络成为一项迫切的工作。缓存的配置直接影响网络的时延和丢失率,网络缓存和网络传输容量的合理匹配,能很好提高网络性能。文章简述了网络最大流问题的现状,提出了一种求解网络最大流问题的算法。算法基于 MPLS 流量工程技术,在实现网络最大流的情况下,同时对 M 条分支(链路)重新分配流量,达到合理分配网络流量和利用网络资源的目的。仿真结果表明算法是有效的。

**关键词** 最大流问题,多协议标签交换(MPLS),流量工程,算法

## An Algorithm for the Solution to the Maximum-flow Problem of Networks

LING Yong-Fa XU Zong-Ben

(Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** With expansion of Internet application, people's expectation and requirement on network transmission capacity and service quality become higher and higher. Therefore, it is imperative to design the network with strong performance. Configuration of buffer memory directly influences the delay and loss rate of network. Good match between buffer memory of network and network capacity will improve performance of network. The condition of the maximum-flow problem is proposed simply in this article, and presents a algorithm for the solution to the maximum-flow problem of networks. The algorithm solves the maximum-flow problem of networks based on MPLS traffic engineering technology, and distributes flow again to balance load and use network resources reasonable. The simulation results show the given algorithm is effective.

**Keywords** Maximum flow problem, Multi-protocol Label Switching(MPLS), Traffic engineering, Algorithm

最大流问题是指在一定的条件下,要求流过网络的物流、能量流、信息流等流量为最大的问题。最大流问题已有 40 多年的研究历史,这段时期内,人们建立了最大流问题较为完善的理论,同时开发了大量的算法。如 Ford 和 Fulkson 增截轨算法、Dinic 阻塞流算法、Goldberg 推进和重标号算法以及 Goldberg 和 Rao 的二分长度阻塞流算法等等,这些经典算法及相关技术对网络最大流问题的研究起到了非常重要的推动作用<sup>[1]</sup>。

近年来,随着计算机科学技术和网络的快速发展,网络最大流问题得到了更深入的研究,并极大地推动了最大流问题的研究进展。然而,研究工作仍未结束;首先,在理论算法研究方面,人们还没有发现最大流问题算法时间复杂度的精确下界,更没有任何一个通用算法达到或接近问题的下界;其次,在算法的实际性能方面,目前算法的实际性能也不能满足许多应用问题的要求;同时,最大流问题作为特殊的线性规划问题,它远比一般线性规划问题容易解决,发现应用领域中的问题和最大流问题的联系可以使应用问题更好地得到解决<sup>[2]</sup>。

因此,关于网络最大流问题的研究具有十分重要的理论意义和实用价值。

### 1 提出问题

在实际的网络中,网络的结点和边都是有容量限制的。

很多情况下我们需要知道在一个有容量限制的网络中,当传输流量时,如何充分利用整个网络拓扑从源 S 到汇 T 传输流量,而不是只使用路由路径或某个单一链路,实现从 S 到 T 的最大传输流量,这就是要解决的网络最大流问题。

传统的基于 IP 的转发方法(如最短路径算法 SPF)不能充分利用网络的传输能力,而基于 MPLS(Multi-Protocol Label Switching,简称 MPLS)的流量工程(Traffic Engineering,简称 TE)为解决网络最大流问题提供了一条途径<sup>[3]</sup>。

流量工程是与可操作网络性能优化相关的 Internet 网络工程的一个方面,它包含运用技术和科学的原则去测量、模型化、特性化 Internet 流量控制,以及运用这种知识和技能来得到特定性能目标,包括可靠、快速的网络通信,网络资源的有效利用,网络容量规划。基于约束的动态路由选择(Constraint-based Dynamic Routing)是流量工程的重要组成部分,它利用现有路由协议的扩展协议,从流量需求和网络资源角度考虑,得出路径需要满足的一系列约束条件和目标函数,计算出由入口路由器到出口路由器间的多条路径。流量工程的另一个重要组成部分是流量均衡(Load-balancing),它的作用在入口路由器到出口路由器之间为已建立好的 M 条路径按一定算法规则重新分配流量。在多条路径间分配流量的好处是提高了大带宽业务流量的接纳率,并且使网络资源均衡使用,能够提高网络的吞吐量<sup>[4]</sup>。

MPLS 网络采用显式路由技术,能够通过静态配置或动

<sup>\*</sup>)国家自然科学基金(10371097),云南省计算机应用技术重点实验室开放基金资助项目。凌永发 博士后,副教授,主要研究方向为网络算法和网络控制。

态路由方式在入口路由器到出口路由器之间得到一条或多条显式路径 LSP(Label Switching Path), 避开瓶颈链路, 避免流量对瓶颈资源的竞争, 优化流量到资源的映射, 提高网络性能。

算法正是基于 MPLS 的流量工程技术来解决网络最大流问题。

## 2 数学模型与仿真算法

最大流问题一般有如下要求<sup>[5]</sup>: (1) 网络有一个起点(又称源)  $v_s$  和一个终点(又称汇)  $v_t$ , 若有几个起点或终点, 则可以通过增加虚拟节点而转化为一个起点和一个终点; (2) 网络是有向网络, 即流有方向性。如果是无向网络或混合网络, 则应转化为有向网络; (3) 在网络各条弧上都有一个权, 表示允许流过的最大流量。若以  $b_{ij}$  表示由  $v_i$  到  $v_j$  的弧上允许流过的最大流量, 以  $x_{ij}$  表示实际流过该弧的流量, 则存在  $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$ ; (4) 网络中, 对于除起点和终点之外的任何顶点, 流入量的总和应该等于流出量的总和, 即  $\sum_j x_{ji} = \sum_i x_{ij}, i \neq s, t$ 。

由上述规则, 可以归纳出最大流问题的一般数学描述如下:

优化目标:  $\max f$

约束条件:

$$s. t. \begin{cases} \sum_j x_{ji} - \sum_i x_{ij} = \begin{cases} -f & i=s \\ 0 & i \neq s, t \\ f & i=t \end{cases} \\ 0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \end{cases}$$

采用 Goldberg 和 Rao 的二分长度阻塞流经典算法来求解最大流问题。算法伪代码如下:

```

begin
  x=0;
  G(x)=G;
  F=nU;
  while F>=1 do
    begin
      Δ=min{|F/m1/2|, |F/n2/3|};
      for(i,j)∈G(x)
        if rij>3Δ then length(i,j)=0;
        else length(i,j)=1;
        计算各节点的精确距离标号
        计算所有候选截的剩余容量
      if 存在候选截[sk,sk]使 c[sk,sk]<F/2 then
        F=c[sk,sk];
        else
          begin
            将由长度为 0 的边构成的强连通分量收缩成一个点
            在收缩后图中, 调用 goldberg 和 Tarjan 的阻塞流算法,
            寻找阻塞流或流量为 Δ 的流计算收缩成点强连通分量中的流
            用所得到的流更新流 x 并更新 G(x)
          end;
        end;
    end;
  end.
  
```

## 3 算法分析

Goldberg 和 Rao 算法采用自适应二分长度函数, 即一个剩余边的长度取决于对剩余流量的估计值  $F$ 。和  $F$  相比, 剩余容量相对较大的边的长度定义为 0, 剩余容量相对较小的边的长度定义为 1。在由这个长度所定义的可容许图(仅包含可容许边的图)中, 算法把长度为 0 的边所构成的强连通分量收缩成一个点, 这样收缩后的可容许图是一个无环图。这样利用 1990 年 Goldberg 和 Tarjan 提出的阻塞流算法计算此无环图中的最大流, 然后算法对通过收缩成一个点的强连通分量内部的流单独计算。

算法在执行过程中保持一个流和一个截, 这个截的容量确定了剩余容量的一个上界。算法同时保持一个参数  $F$ , 它

是剩余流量的估计值。当算法发现一个剩余容量少于  $F/2$  的截时, 用此截的容量更新  $F$  的值, 重新计算每边的长度 Goldberg 和 Rao 算法需  $O(\log U)$  次迭代, 在每次迭代中, 占主要操作时间的是 Goldberg 和 Tarjan 算法的阻塞流算法, 它需要  $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} m \log(n^2/m))$  的时间。于是有: Goldberg 和 Rao 算法可以在  $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} m \log(n^2/m) \log U)$  时间内计算出最大流。

图 1 为网络拓扑图, 节点 A、B、C、D、E、F 为标签交换路由器(Label Switching Route, 简称 LSR), 有向弧上的数字代表相应链路的最大容量; 图 2 是网络流量最大时各链路需求图, 它是通过 Goldberg 和 Rao 二分长度阻塞流经典算法计算出的当网络达到最大流量时, 每条链路可以达到的链路流量。括号中, 第 1 个数字为链路的残余容量, 第 2 个数字为网络传输达到最大流时的该链路应达到的流量。

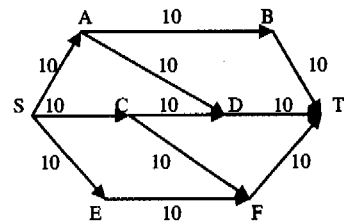


图 1 网络拓扑图

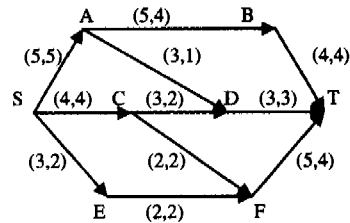


图 2 网络最大流时链路流量需求图

## 4 算法仿真实验

MPLS 的网络体系主要由位于网络边缘的路由器 LER (Label Edge Routing) 和位于网络核心的 LSR (Label Switching Routing) 两大部分组成。复杂的流量管理与控制功能主要集中在 LER 中完成。业务流的 QoS(Quality of Service) 请求能否得到保证, 由接纳控制决定。接纳控制根据控制平面的接纳策略来决定是否可以满足一个新的 LSP 的建立请求, 或是否能够实现对 LSP 属性的修改接纳控制后, LER 把业务流映射到适当的 LSP 中, 并设定 LSP 的相关属性。然后通过执行一定的资源预留和控制操作, 为 LSP 中的业务流提供相应的 QoS 保证。

流量工程通过建立网络边界结点之间的逻辑连接, 在物理拓扑结构上构造一个虚拟网, 通过逻辑连接与物理拓扑之间的合理映射解决流量工程存在的问题。

通信网中, 分支(或称链路)是指从源点到汇点都能保持同一带宽的一条传输通道, 在网络拓扑图上的一条有向弧可以容纳一条或几条分支。现在虽然知道每条链路可以使用的流量, 但不知道从源点到汇点可以分成多少分支, 以及该分支应该预留的网络带宽, 所以还不能建立符合资源预留要求的 LSP。为解决这个问题, 首先用数据结构中图的邻接表表示法表示已经获得的网络拓扑图。在图中, 权重表示通过前面

算法计算出的达到最大流时链路上的流量。由分支和预留的网络带宽组成的数据结构,称为分支元素,所有分支元素组成一个新的动态链表,用来记录所有的分支及其网络带宽预留值,称为结果链表。利用 Kruskal 算法<sup>[6]</sup>可以得到所有分支及相应的带宽预留值。

在得到每个分支包含的节点和网络带宽预留值后,基于 MPLS 的流量工程技术,就可以扩展资源预留协议 RSVP<sup>[7]</sup> (Resource reSerVation Protocol) 建立各分支的 LSP。LSP 建立后,就建立了从源点到汇点的多条数据传输通道,当有数据流从源点到汇点时,就可以将其安排到一条分支上,或采用分流的方法转发到多条分支上。

LSP 建立后,为了将其高效地映射到 MPLS 的物理链路上,MPLS 系统必须选择合适的路由选择策略与机制。路由选择策略决定系统采用何种算法寻找满足一定 QoS 要求的路径,以及采用何种度量衡量路径的优劣。路由选择机制则决定路由计算的方式,如采用源路由还是分布式路由计算;采用按需计算还是预计算路由表等。

基于上述前提和思路,依据网络拓扑结构,采用应用非常广泛的 Waxman 模型<sup>[8]</sup>生成仿真网络。网络模型图中边  $(u, v)$  的生成概率由式(1)决定。式中,  $d$  是  $u, v$  之间的欧式距离,  $L$  为图中任意两点间的最大距离。

$$prob(u, v) = \alpha e^{-d(u, v)/\beta}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \beta \geq 1 \quad (1)$$

对节点对  $(s, t)$ , 取三个随机数,  $O_s, D_t, C_{(s, t)} \in [0, 1]$ , 则  $s, t$  之间的业务流需求由式(2)决定,  $g$  为正常数。由于  $\lambda(s, t)$  由 3 个随机数相乘决定, 因此变化范围可以很宽。

$$\lambda(s, t) = \gamma O_s D_t C_{(s, t)} e^{-d(s, t)/2L}, \quad 0 \leq O_s, D_t, C_{s, t} \leq 1 \quad (2)$$

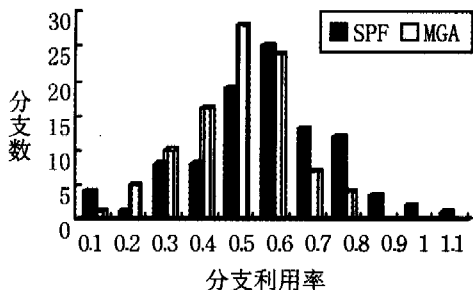


图3 网络流量分布示意图

基于算法数学假设,同时对生成节点数为 60, 链路数为 96 (即  $|V|=60, |E|=96$ ) 的仿真网络以及不同的业务量需求,对最短路径算法 SPF 和最大流问题算法 NGA 进行仿真实验。仿真结果显示,在流量轻载的情况下,SPF 算法也能满足网络业务流量需求。在流量重载的情况下,SPF 的性能恶化得很快。随着网络流量的增加,应用 NGA 对网络流量分布实施优化的意义与效果也越为明显,网络业务流的分配得到了良好的平衡,因而网络的服务能力大大提高。图3给出

了总业务量需求为 3283 时,网络中流量分布(各分支利用率)情况,显示了应用 NGA 进行网络优化,实施流量均衡的意义。另外,仿真发现随着网络规模增大,算法的运行时间并没有显著增加,仍能保持良好的性能。

**结束语** 随着 Internet 业务快速增长,网络不断升级,组网结构越来越复杂,链接带宽也大小不一。合理利用带宽、减少拥塞的发生是实现服务质量(QoS)的机制的重要一环。基于 MPLS 的流量工程的显著优势使其成为一种易于管理、扩展性好、性价比高的流量工程解决方案<sup>[9]</sup>。

一直以来,网络最大流的应用都是一项十分有意义的研究工作,网络流问题的研究者和具体问题的工程师从不同的角度充实着这方面的研究。实践表明,对许多实际问题,如果能找到它和最大流问题的联系,就可以使问题得到十分有效的解决。同时,许多应用问题所对应的最大流问题都有比较明显的特征,充分利用这些特征,设计面向应用问题的算法,这也是一项很有意义的工作。

本文提出了一种求解网络最大流问题的优化算法。算法基于 MPLS 流量工程技术,在实现网络最大流的情况下,同时对 M 条分支(链路)重新分配流量,达到合理分配网络流量和利用网络资源的目的。仿真结果表明算法是有效的。

### 参考文献

- Goldberg A V, Rao S. Beyond the flow decomposition barrier [J]. J Assoc Compute Mach, 1998, 45(5): 783~797
- 张宪超,陈国良,万颖瑜. 网络最大流问题研究进展[J]. 计算机研究与进展, 2003, 40(9): 1281~1292
- Xiao X P. Traffic engineering with MPLS in the Internet [J]. IEEE Networking, 2000, 14(2): 28~33
- Girish M K, Zhou B, Hu J Q. Formulation of the traffic engineering problems in MPLS based IP networks [A]. The Fifth IEEE-ISCC [C]. Antibes, France, 2000. 214~219
- Ahuja R K, Magnanti T L, Orlin J B. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 134~151
- Wang Y F, Wang Z. Explicit routing algorithms for Internet traffic engineering [A]. IEEE ICCCN'99 [C]. Boston, MA, 1999. 582~588
- Awduche D. RSVP-TE: extensions to RSVP for LSP tunnels. IETF, Internet Draft, <http://www.ietf.org>, 2001
- Waxman B M. Routing of multipoint connections [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1988, 6(9): 1617~1622
- Lee Y, Seok Y, Cchol Y. A constrained multipath traffic engineering scheme for MPLS networks [A]. ICC'02 [C]. New York, 2002. 2431~2436