

一种单速率组播速率控制与修剪算法^{*})

杨宗凯 张冠湘 程文青

(华中科技大学电子与信息工程 武汉 430074)

摘要 组播网络的异构性问题导致了组播内部公平性问题。本文在分析了相关工作的局限性之后,提出了一种基于效用的单速率组播内部公平性标准,其优化目标是最大化组播会话的净收益。相应地设计了一种基于动态规划的速率控制与修剪算法,该算法在计算开销与通信开销两方面都是可扩展的。

关键词 单速率组播,速率控制,修剪

A Rate Control and Pruning Algorithm for Single-rate Multicast Sessions

YANG Zong-Kai ZHANG Guan-Xiang CHENG Wen-Qing

(Department of Electronic and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract A multicast session may involve a large number of receivers with heterogeneous data reception capacities, this leads to the inter-receiver fairness problem. Unlike the previous inter-receiver fairness criteria, a utility based fairness criterion is proposed. Both rate control and pruning are considered to maximizing the net benefit of the multicast session, and a dynamic programming algorithm is proposed. The algorithm is scalable both on computation and communication complexity.

Keywords Single-rate multicast, Rate control, Pruning

1 引言

对于大规模组播通信,由于组播分发树可能遍布于整个网络,其接收者具有异构性的特点。异构性主要表现在组播的接收者处理能力与对服务质量的要求不同、报文到达不同和接收者经历的链路的网络特性(如拥塞情况、带宽等)不同。组播网络的异构性问题导致了组播接收者之间的公平性问题。对此问题有两个解决方法,一个方法是采用多速率组播,另外一个方法设计合理的单速率组播速率控制和修剪机制。基于分层的多速率组播可较好地解决异构性问题,但是多速率组播实现起来比较复杂,而且在大部分情况下可靠组播通信一般仍采用单速率组播。

本文围绕单速率组播的内部公平性问题,在分析了相关工作的局限性之后,提出了一种基于效用的单速率组播内部公平性标准,其优化目标是最大化组播会话的净收益。我们考虑从两方面来最大化组播会话的净收益,一是选择适合的组播速率,一是对组播树进行合理的修剪。相应地我们设计了一种基于动态规划的算法,可以在一个 RTT 时间内求得会话净收益最大化问题的最优解,而且它在计算开销与通信开销两方面都是可扩展的。

2 相关工作

公平性研究是组播速率控制的关键问题之一,组播公平性的重要方面是其内部公平性。内部公平性是指组播在速率控制时应该同时综合考虑异构性网络中组播会话内的各个接收者。

目前在组播速率控制设计中常用的一种内部公平性准则

是 S. Bhattacharyya^[1] 中提出的最差路径(Worst-path)公平性,即根据组播树中最拥挤的端到端的路径来决定整个组播会话的发送速率。采用这种公平性设计的算法,组播会话的整体效率容易受到某几个较拥塞的接收者的影响,使得整体性能低下,所以这种公平性准则不是很理想。

Jiang^[2-4] 提出了接收者间公平性(Inter-receiver fairness, IRF)准则。接收者单独速率(isolated rate)是其中一个重要概念,接收者单独速率是指在最大-最小公平性原则下多速率组播接收者的速率。在接收者单独速率概念的基础上, Jiang 提出了接收者公平函数(receiver fairness function)与接收者间公平性(Inter-receiver fairness, IRF)函数的概念。接收者公平函数是接收者单独速率 x_i 与组播速率 x 的比值:

$$F_i = \frac{\min(x_i, x)}{\max(x_i, x)}$$

当 $x_i = x$ 时,接收者公平函数取的最大值 1。而接收者间公平性函数是各个单一接收者公平函数的加权求和:

$$IRF(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(x)$$

其中, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1$ 表示接收者的权值。这种公平性原则下单速率组播的优化目标是最大化 $IRF(x)$ 。接收者间公平性考虑了组播速率对会话中各个接收者对整体性能的影响,比最差路径公平性相对合理一些。

在 Yang^[5] 的工作中,与接收者公平和接收者间公平性函数对应的提出了接收者效用函数和组效用的概念。接收者效用函数定义如下:

$$u(x_i, x) = \min(x_i, x)$$

组效用定义如下:

^{*})国家自然科学基金资助项目(No. 60302004)。杨宗凯 教授,博士生导师,研究方向为计算机网络、电子商务和远程教育。张冠湘 博士生,研究方向为计算机网络。程文青 副教授,研究方向为计算机网络。

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i, x)$$

可见在 Yang 的工作中组效用是所有用户的速率和。单速率组播速率控制的优化目标是在满足丢包容忍和离散发送速率约束下最大化所有用户的速率和。

在 Chiu^[6]的工作中应用的也是接收者效用函数和组效用的概念。接收者效用函数定义如下：

$$u(x_i, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_i < x \\ \frac{1}{x_i - x + 1} & \text{if } x_i \geq x \end{cases}$$

其中 x_i 表示接收者的最大接收速率，上式说明当组播速率大于接收者的最大接收速率时其效用为零，否则两者越接近效用越大。组效用定义如下：

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i, x)$$

速率控制的优化目标也是最大化组效用。

3 一种基于效用的组播内部公平性

在前面几种公平性标准有以下的局限性：1) 发送者需要知道组播会话中所有接收者的单独速率，当组播会话规模较大的时候，通信和计算开销较大，所以不具有可扩展性。2) 是从工程的观点来定义组播内部公平性的，其公平函数或者效用函数没有明确的经济意义。本文采用 S. Shenke^[8]关于效用的概念来表达接收者的满意程度与组播速率的关系，效用是速率的增函数，且速率对于用户的边际效用逐渐减少。在综合考虑接收者效用和链路拥塞价格的基础上我们提出了一种基于效用的单速率组播内部公平性标准，其优化目标是最大化组播会话的净收益。

为了便于表述，用一个简单的例子来介绍本文用到的组播相关术语。图 1 是一组播树的示意图。图 1 中 s 为源节点， $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ 为接收节点，剩下的节点分为分枝节点和非分枝节点。分枝节点是指组播树分叉的节点，图中 $\{i_5, i_6, i_7\}$ 为分枝节点。不失一般性，本文认为所有接收节点为叶子节点。接收或分枝节点 i 的父节点是指组播上游路径上与 i 最近的分枝节点或源节点， i 节点的子节点是指组播下游路径上与 i 最近的接收或分枝节点。例如图 1 中 i_5 是 i_1, i_2 的父节点， i_7 是 i_3, i_6 的父节点；而 i_7 是 s 的子节点， i_5, i_6 是 i_7 的子节点。对应于接收(分枝)节点 i 的分枝是指节点 i 与其父节点之间的系列链路，因为接收(分枝)节点与其分枝是一一对应的，为了表达方便，直接用分枝 i 表示与节点 i 对应的分枝。

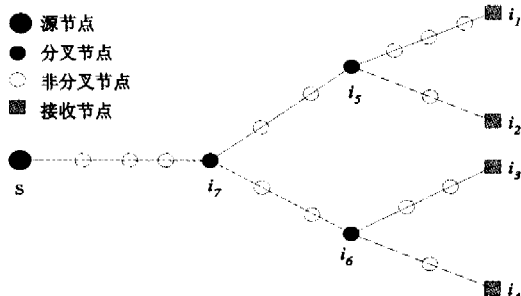


图 1 组播树示意图

考虑一个由一系列无向通信链路集合 L 组成的网络，任意的 $l \in L$ ，其链路带宽为 c_l 。网络中的某一组播会话 g 的源节点为 s 。假设源节点 s 只有一个子节点 r ，我们称之为第一

分枝节点。 R 表示组播会话接收节点集合， J 表示组播会话所有分枝节点的集合。 $I = J \cup R$ 表示会话分枝节点与接收节点的并集。 $L_i \subseteq L$ 表示对应于任意节点 $i \in I$ 的分枝所包括的链路集合。用 x_i 表示对应于任意节点 $i \in I$ 的速率， $\underline{x} = (x_i, i \in I)$ 表示组播会话中各节点的速率矢量。对于 R 中的每一接收节点 i ，用 $U_i(x_i)$ 表示其效用函数， $U_i(0) = 0$ 且在 $x_i > 0$ 范围内 $U_i(x_i)$ 是严格凹的增函数。对于任意的分枝节点 $i \in J$ ， C_i 表示其子节点的集合。组播会话源节点有 K 种离散数据速率： $b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{K-1}$ ，其中 $b_0 = 0$ 。当某一节点的传输速率为 b_0 时，表示这个节点被修剪了。对于 L 中的每一链路 l ，用 λ_l 表示该链路当前的拥塞价格。

组播内部公平性要求综合考虑具有异构性网络中组播会话内的各个接收者的情况。当从效用的观点来考虑组播内部公平性时，既要考虑各个接收节点在一定的接收速率上获得的效用，也要考虑各个接收节点路径上因为数据传输而需要支付的拥塞费用。在基于效用的组播内部公平性准则下，我们将单速率组播的速率控制与修剪优化目标表达为最大化组播会话的净收益 (net benefit)：

$$\max \sum_{i \in R} U_i(x_i) - \sum_{i \in I} (\sum_{l \in L_i} \lambda_l) x_i \quad (1)$$

$$\text{s. t } \underline{x} \in X \quad (2)$$

其中 $X = Y \cap Z$ ， Y 和 Z 分别定义如下：

$$Y = \{ \underline{x}; x_i = x_{i'}, \forall i' \in C_i, \forall i \in J \} \quad (3)$$

$$Z = \{ \underline{x}; x_i \in \{b_0, b_k\}, \forall i \in I, \forall k \in \{1, \dots, K-1\} \} \quad (4)$$

其中式(3)表示子节点速率不大于父节点速率，式(4)表示节点的发送速率要么为组播会话的速率，要么为零(被修剪)。

本文考虑从两方面来最大化组播会话的净收益，一是将选择适合的组播速率，一是对组播树进行合理的修剪。虽然用户的接收速率越大，其获得的效用也越大，从而组播会话的效用也越大，但是会话需要支付的拥塞费用也越多。另外在有些情况下，某些接收节点的效用可能小于其对应分枝上的拥塞费用，或者某一组播子树上所有接收节点的效用要小于此组播子树上所有分枝的拥塞费用，这个时候把此接收节点或组播子树修剪掉无疑可以提高整个组播会话的净收益。

4 基于动态规划的速率控制与修剪算法

当组播速率离散时最大化组播净收益是一整数规划问题，如果用普通的遍历法求解，组播规模大时存在计算开销的可扩展性的问题；而且遍历法需要知道所有用户的效用函数和各个链路的拥塞价格，这样会有通信开销的可扩展性的问题。本节我们提出了一种基于动态规划的算法来求解最大化组播净收益问题，它可以在一个 RTT 时间内求得会话净收益最大化的最优解，而且它在计算复杂性和通信开销两个方面都具有可扩展性。

考虑某一单速率组播会话，对于任意的分枝/接收节点 $i \in I$ ， T_i 表示以节点 i 为根的组播子树上的所有分枝/接收节点集合， $\underline{x}_i = (x_{i'}, i' \in T_i)$ 为 T_i 中各个节点速率的向量。对于 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$ ，定义节点 i 的条件净收益 $V_i(k)$ 为：

$$V_i(k) = \sum_{i' \in T_i \cap R} U_{i'}(x_{i'}) - \sum_{i' \in T_i} p_{i'} x_{i'} \quad (5)$$

$$\text{s. t } \underline{x}_i \in X_i(k) \quad (6)$$

其中 $p_i = \sum_{l \in L_i} \lambda_l$ 为分枝 i' 上所有链路的价格和，称之为分枝价格。 $X_i(k) = Y_i \cap Z_i(k)$ ， $Y_i, Z_i(k)$ 分别定义如下：

$$Y_i = \{ \underline{x}_i; x_{i'} = x_{i''}, \forall i'' \in C_{i'} \forall i' \in T_i \cap J \} \quad (7)$$

$$Z_i(k) = \{ \underline{x}_i : x_{i'} \in \{b_0, b_k\} \forall i' \in T_i \} \quad (8)$$

由上面两式, $V_i(k)$ 表示当 $\underline{x}_i \in X_i(k)$ 时 T_i 中所有接收节点的效用减去 T_i 经过的链路(包括分枝 i 经过的链路)而需要支付的费用。当速率向量 $\underline{x}_i = 0$ 时所有接收节点的效用为零, 所需要支付的费用也为零, 所以有 $V_i(0) = 0$ 。

对于任意的节点 $i \in I$ 和 $k \in \{0, 1, 2, \dots, K-1\}$, 定义节点 i 的条件最大净收益 $v_i(k)$ 为当速率向量 $\underline{x}_i \in X_i(k)$ 时(也即节点 i 的父节点速率为 b_k 时) $V_i(\underline{x}_i)$ 的最大值:

$$v_i(k) = \max_{\underline{x}_i \in X_i(k)} V_i(k) \quad (9)$$

由节点 i 的条件最大净收益的定义, 有 $v_i(0) = 0$ 。

对于任何的接收节点 $i \in R$ 和 $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ 有:

$$v_i(k) = \max\{0, U_i(k) - p_i b_k\} \quad (10)$$

上式可以这样理解: 当在接收速率为 b_k 时, 如果接收节点的效用小于其对应分枝上的拥塞费用, 这个时候把此接收节点修剪掉无疑可以提高组播的净收益, 而此接收节点被修剪后其净收益为 0。

由式(9)可知式(1)表达的单速率组播树的最大净收益可用表达为第一分枝节点 r 的条件最大净收益:

$$\max_{k \in \{0, 1, \dots, K-1\}} v_r(k) \quad (11)$$

节点 i 条件净收益的约束, 可以用其子节点条件净收益的约束来表达:

$$\{ \underline{x}_i : \underline{x}_i \in X_i(k) \} = \{ \underline{x}_i : x_{i'} \in X_{i'}(l), \forall i' \in C_i, l \in \{0, k\} \} \quad (12)$$

由式(12)对于任意的节点 $i \in J$ 和 $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ 有

$$\begin{aligned} v_i(k) &= \max_{\underline{x}_i \in X_i(k)} V_i(\underline{x}_i) \\ &= \max_{\underline{x}_i \in X_i(k)} \{ \sum_{i' \in C_i} V_{i'}(k) - p_i b_k \} \\ &= \max_{\underline{x}_i \in X_i(k), l \in \{0, k\}} \{ \sum_{i' \in C_i} V_{i'}(l) - p_i b_l \} \\ &= \max_{l \in \{0, k\}} \{ \sum_{i' \in C_i} \max_{\underline{x}_{i'} \in X_{i'}(l)} V_{i'}(l) - p_i b_l \} \\ &= \max_{l \in \{0, k\}} \{ \sum_{i' \in C_i} V_{i'}(l) - p_i b_l \} \\ &= \max\{0, \sum_{i' \in C_i} V_{i'}(k) - p_i b_k\} \end{aligned} \quad (13)$$

由式(13), 对于任意的节点 $i \in J$, 其条件最大净收益可以由节点 i 的子节点 $i' \in C_i$ 的条件最大净收益来表达。可以看出当节点 i 的速率为 b_k 时, 如果组播子树的条件最大净收益小于 0, 这个时候把此组播子树节点修剪掉无疑可以提高组播的净收益, 而此组播子树被修剪后其净收益为 0。

式(13)启发我们用动态规划的方法自底向上的来计算各个节点的条件最大净收益: 首先由式(10)计算所有接收节点的条件最大净收益, 然后由式(13)计算它们上一层父节点的条件最大净收益, 这样一直可以计算出节点 r 的条件最大净收益 $v_r(k)$ 。

当计算出节点 r 的条件最大净收益后就可以自上而下的计算优化速率和确定需要修剪的组播子树或节点, 可以首先由下式求得节点 r 的优化速率:

$$k_r = \arg \max_{k \in \{0, 1, \dots, K-1\}} \{ \sum_{i' \in C_r} v_{i'}(k) - p_r b_k \} \quad (14)$$

k_r 同时也就是单速率组播的优化速率 k^* 。因为是单速率组播, 所以节点 r 的子节点的优化速率要么也为 k^* 要么为零。对于任意的节点 $i \in J$, 当其父节点的优化速率为零时其优化速率也为零, 当其父节点的优化速率为 k^* 时, 可由下式求得其优化速率:

$$k_i = \arg \max_{k \in \{0, k^*\}} \{ \sum_{i' \in C_i} v_{i'}(k) - p_i b_k \} \quad (15)$$

这样一直到叶子节点 $i \in R$:

$$k_i = \arg \max_{k \in \{0, k^*\}} \{ U_i(b_k) - p_i b_k \} \quad (16)$$

对于任意的分枝/接收节点 $i \in I$, 当 $k_i = 0$ 时, T_i 上所有节点的传输速率为零, 这就意味着以节点 i 为根的组播子树被修剪了。

观察比较式(10)和(13), 以及式(15)和(16), 当把 $\sum_{i' \in C_i} v_{i'}(k)$ 用 $U_i(k)$ 替代时, 它们可以用统一的公式来表达, 我们定义分枝节点效用为:

$$U_i(k) = \sum_{i' \in C_i} v_{i'}(k) \quad (17)$$

这样条件最大净收益的计算可以统一用式(10)表达, 优化速率的计算可以统一用式(16)表达。

在计算中要用到的各个分枝的价格, 可以由父节点定期向子节点发送分枝价格信令, 路径上各个链路将其链路价格累加进价格字段中得到。

由上面的分析可知基于动态规划的速率控制与修剪算法分为两个阶段: 1) 自底(叶子节点)向上(第一分枝节点)地, 首先计算所有接收节点的分枝条件最大净收益表, 然后计算它们上一层父节点的节点效用表和分枝条件最大净收益表; 2) 自上而下地, 首先由第一分枝节点计算组播优化发送速率, 然后确定需要修剪的组播子树或节点。因为同一层次的节点的计算是并行的, 所以在已知链路价格的情况下可以在一个 RTT 时间内求得会话净收益最大化问题的最优解。

5 算法分析

前面已经讲述了怎么用动态规划的方法来解决单速率组播速率控制和修剪的优化问题, 使得组播会话的净收益最大化。下面我们来分析一下算法的可扩展性问题, 主要考虑计算复杂性和通信开销两个方面。

用 C 表示组播树中所有源/分枝节点的子节点数的最大值。对于任意的源/分枝节点 i , 由式(17)可得节点 i 计算节点效用的计算复杂度为 $O(CK)$, 由式(10)可得节点 i 计算分枝条件最大净收益表的计算复杂度为 $O(K)$, 由式(16)节点 i 对其子节点的速率控制和修剪的计算复杂度为 $O(C)$ 。可见每一节点的计算复杂度仅仅与子节点数和离散速率的数目线性相关而与接收节点的数目 $|R|$ 无关, 接收节点数目增长不会使得节点计算量增长, 这样基于动态规划的算法在计算复杂性方面是可扩展的。

至于通信开销方面, 每一节点只需要向其父节点发送条件最大净收益表以及相应的分枝价格, 通信开销为 $O(K)$, 以及向其所有子节点通信发送优化速率与链路价格, 通信开销为 $O(C)$ 。每一节点需要发送和接收的消息数量与接收节点的数目无关, 这样本文设计的基于动态规划的算法在通信开销方面是可扩展的。

不足之处在于基于动态规划的分布式算法需要路由器的支持。

结论 传统上一般是从工程的观点来定义单速率组播内部公平性的, 本文在分析了相关工作的局限性之后, 提出了一种基于效用的组播内部公平性标准, 其优化目标是最大化组播会话的净收益。为了实现这种公平性, 我们设计了一种基于动态规划的速率控制和修剪算法。从计算开销与通信开销两方面来分析, 算法是可扩展的。

参考文献

1 Bhattacharyya S, Towsleu D. The loss path multiplicity problem

in multicast congestion control. In: Doshi B, ed. Proc. of the IEEE INFOCOM, New York: IEEE Communications Society, 1999, 856~863

2 Jiang T, Ammar M, Zegura E. Inter-Receiver Fairness: A Novel Performance Measure for Multicast ABR Sessions. In: Proc. of SIGMETRICS'98, 1998

3 Jiang T, Zegura E, Ammar M. Inter-Receiver Fair Multicast Communication Over the Internet. In: Proc. of NOSSDAV'99, June 1999

4 Jiang T, Ammar M, Zegura E. On the Use of Destination Set Grouping to Improve Inter-receiver Fairness for Multicast ABR

Sessions. In: Proc. of INFOCOMM'00, 2000

5 Yang Y, Kim M, Lam S. Optimal partitioning of multicast receivers. In: Proc. IEEE ICNP, 2000

6 Chiu D M, Kadansky M, Provino J, Wesley J, Zhu H. Pruning Algorithms for Multicast Flow Control. In: Proc. of NGC, Palo Alto, 2000

7 Kar K, Tassiulas L. Multicast Rate Control using Lagrangian Relaxation and Dynamic Programming. In: Proc. of the 43rd IEEE Conf. on Decision and Control, Atlantis, Bahamas, Dec. 2004

8 Shenker S J. Fundamental Design Issues for the Future Internet. IEEE JSAC, 1995, 13(7): 1176~1188

(上接第 34 页)

lbl-tcp-3. tcp。图 3、图 4 为采用 COLP 方法的预测结果, 预测系数为 200 个; 图 5、图 6 为双曲线渐近意义下具有对称平稳新息的滑动平均预测方法的预测结果, 预测系数为 50 个。预测结果表明本文提出的两种预测方法均较好地预测原始数据, 预测值反映原始值的变化趋势, 而且偏差不超过传统标准的 68%。对两个通信量数据集各时间尺度 Trace 进行预测实验, 均得到相似的结果。这说明本文所提出的预测算法对于具有重尾特性的自相似网络通信量的广泛时间尺度范围能够准确有效地预测, 而且方法简捷快速。尤其是双曲线渐近意义下具有对称平稳新息的滑动平均预测方法避免了传统 FARIMA 模型参数估计的繁琐过程, 而且预测结果较好。

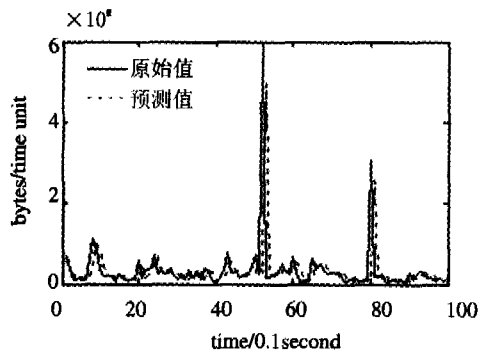


图 5 OctEct. TL 原始数据与预测值

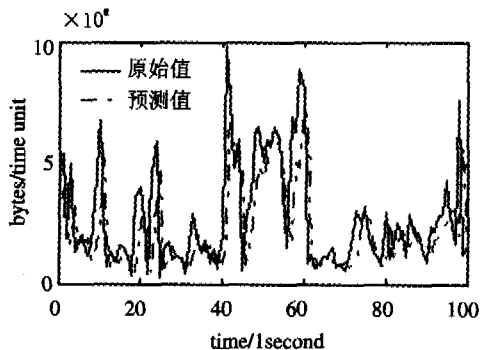


图 6 lbl-tcp-3. tcp 原始数据与预测值

结论 本文在一种新的基于 alpha-平稳过程的网络通信量模型基础上, 提出了两种新的滑动平均预测方法: 协变正交意义下滑动平均预测方法, 双曲线渐近意义下具有对称平稳新息的滑动平均预测方法。对不同时间尺度的实际数据的预测结果表明这两种预测方法准确可靠, 预测精度随着预测系数个数的增加而有提高。这两种对于具有重尾特性的自相似网络通信量的预测方法是本文的创新之处。

目前, 我们正努力将新的网络通信量预测方法应用于网络性能分析与网络管理中。

参 考 文 献

1 Leland W, Taqu M, Willinger W, et al. On the self-similar nature of Ethernet traffic. In: Proc. ACM SIGCOMM '93, 1993, 183~193

2 Paxson V, Floyd S. Wide-area traffic: The failure of Poisson modeling. In: Proc. ACM SIGCOMM '94, 1994, 257~268

3 Crovella M E, Taqu M S, Bestavros A. Heavy-tailed probability distributions in the World Wide Web. In: A practical guide to heavy tails, Chapman & Hall, 1998

4 Shu Y, Jin Z, Wang J, Yang O W. Prediction-based admission control using FARIMA models. In: Proc. IEEE ICC'00, New Orleans, USA, June 2000, 3: 1325~1329

5 Karasaridis A, Hatzinakos D. Network heavy traffic modeling using α -stable self-similar processes. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(7)

6 Ge X H, Zhu G Xi, Zhu Y T. An improved modeling of network traffic using alpha-stable processes. The Chinese Journal of Electronics, 2003, October

7 Samorodnitsky G, Taqu M. Stable non-gaussian random processes. Chapman and Hall, New York, London, 1994

8 Hardin J C D. Skewed stable variables and processes; [Technical Report 79]. Center for Stochastic Processes at the University of North Carolina. Chapel Hill, 1984

9 Clegg R G. A Practical Guide to Measuring the Hurst Parameter N. In: Proc. of 21st UK Performance Engineering Workshop, School of Computing Science Technical Report Series, CS-TR-916, University of Newcastle, 2005. ISSN 1368-1060

10 Hill J. Minimum dispersion and un-biasedness; 'best' linear predictors for stationary ARMA α -stable processes. Working paper No. 00.06, September 2000, center for economic analysis department of economics. University of Colorado at Boulder

11 Stuch B W. Minimum error dispersion linear filtering of scalar symmetric stable processes. IEEE Trans. Aut. Cont. 1978, 23: 507~509

12 Cline D B H, Brockwell P J. Linear prediction of ARMA processes with infinite variance. Stochastic Processes and their Applications North-Holland, 1985, 19: 281~296

13 Zolotarev V M. On representation of densities of stable laws by special function. Theory of Probability and Its Applications, 1994, 39: 354~362

14 Rice J A. Mathematical statistics and data analysis, Second Edition. Wadsworth Inc, 1995