

两阶段求线性规划最优可行解的实现方法^{*})

陈应祖 万 新 朱建芳 彭 军

(重庆科技学院 重庆 400050)

摘 要 本文对两阶段求线性规划最优可行解的矩阵运算方法作了详实的分析,采用求解矩阵的构造方法、退化可行解的处理方法以及对矩阵行向量和列向量的调整方法,增强求解的可靠性。用算例对程序求线性规划的最优可行解、无界解和无可行解的准确性进行了测试,表明实现方法正确、求解准确。

关键词 线性规划,目标函数,辅助目标函数,退化可行解,最优可行解

Get the Best Possible Optimization Result for Linear Programming with Two Stages

CHEN Ying-Zu WAN Xin ZHU Jian-Fang PENG Jun

(Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 400050)

Abstract This article analyzes the matrix operational method which is used to get the best possible optimization result for Linear programming with two stages in details and enhance the dependability for solving by the construction method for matrix operation, degenerating feasible solution and adjusting row vector or column vector of matrix. The veracity of the best possible optimization result, unbounded solution and no feasible solution is testified by programming. The final results show that the method is accurate and the solution is exact.

Keywords Linear programming, Goal function, Auxiliary goal function, Degenerating feasible solution, The best possible optimization result

线性规划是运筹学的重要分支,流行软件 Excel 和 Matlab 分别集成了求解线性规划最优可行解的功能,可见其应用领域和作用十分广泛。

2002 年为威远钢铁有限公司开发了高炉配料优化及成本分析系统,其中原料速配模块核心算法采用了线性规划模型,该系统在钢铁厂的实际应用中为寻求理想炉料结构、进行有效成本控制,提供了很大的帮助。而线性规划程序设计的好坏直接影响到整个系统的实用性。

线性规划的最优可行解是指在满足约束条件下,目标函数值最大时决策量的取值。两阶段求线性规划最优可行解的方法,算法并不复杂,容易实现。但根据原料速配模块和川西北气矿采气方案的编程、调试的经验,用程序实现时,必须重视求解矩阵的构造、退化可行解的处理、矩阵行向量和列向量的调整方法,增强程序的可靠性,否则,不能求出线性规划的准确解。

1 求线性规划最优可行解的方法

1.1 线性规划的约束一般形式

$$\max S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \quad (1)$$

$$s. t. \quad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,n} x_n \leq b_i \quad (2)$$

(1)式为线性规划的目标函数, n 为决策变量个数,决策变量满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, (2)式为约束关系式 $i=1, 2, \dots, m, m$ 为约束关系式个数。求目标函数的最小值时,目标函数中各项系数取其相反数。

线性规划化的解有三种情况:①无界;②没有可行解;③有且只有一个最优可行解。求解时需要把约束一般形式转换成约束标准形式,分两阶段求解。

1.2 约束标准形式

约束一般形式转换为约束标准形式分两步进行。

第一步引入松弛变量使约束不等式变为等式。将(2)式引入松弛变量后约束形式如(3)式。

$$s. t. \quad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,n} x_n + y_i = b_i \quad (3)$$

(3)式中 $y_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为松弛变量,松弛变量与决策变量作用相同,松弛变量的系数极性应由约束关系确定。

第二步引入人工变量。引入人工变量后即约为约束标准形式。约束一般形式(1)(2)式转换为约束标准形式如下:

$$\max S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \quad (4)$$

$$s. t. \quad z_i = b_i - a_{i,1} x_1 - a_{i,2} x_2 - \cdots - a_{i,n} x_n - y_i$$

(4)式中 $z_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为人工变量。由(4)式的约束关系式与(3)式比较,只有所有的人工变量为0时,(3)式中的约束关系式才与(4)式等价。

1.3 两阶段求最优可行解方法

根据两阶段法,需要构造一个辅助目标函数。如果考虑约束一般形式中包含“ $\geq$ ”和“ $=$ ”约束关系,约束标准形式和辅助目标函数写为(5)式形式:

$$\max S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$s. t. \quad z_i = b_i - a_{i,1} x_1 - a_{i,2} x_2 - \cdots - a_{i,n} x_n \mp y_i \quad (5)$$

$$\max S' = -\sum_{i=1}^m b_i - \sum_{i=1}^m a_{i,1} x_1 - \sum_{i=1}^m a_{i,2} x_2 - \cdots - \sum_{i=1}^m a_{i,n} x_n \pm y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_m$$

(5)式中,当约束关系为“ $\leq$ ”,松弛变量极性取负,约束关系为“ $\geq$ ”,松弛变量极性为正。 $\max S'$ 为辅助目标函数。

第一阶段在辅助目标函数和约束关系式中,求出所有人工变量为0所决定的基本可行解(决策变量和松弛变量的值)。经等式变换,把约束关系式左边的人工变量交换到右边。如果这个过程能把所有的人工变量交换到右边,即辅助

^{*})重庆市科委自然科学基金资助项目(No. CSTC, 2005BB2050)。陈应祖 工学硕士,工程师,主要从事计算机程序语言教学,实验室建设与管理和工程应用程序开发。彭 军 副教授,博士,主要从事网络数据安全和应用。

目标函数中变量系数将不存在非负数,表明约束标准式(4)式存在基本可行解,可进入二阶段求最优可行解;否则表明(4)式不存在可行解,约束关系式自相矛盾,没有进入二阶段的必要。

第二阶段求解最优可行解在目标函数和第一阶段变换后的约束关系中进行等式变换,直到目标函数中变量系数不存在非负数为止。

由(5)式建立如下的求解矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} & 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b_m & -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \\ -\sum_{i=1}^m b_i & -\sum_{i=1}^m a_{i1} & -\sum_{i=1}^m a_{i2} & \cdots & -\sum_{i=1}^m a_{in} & \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{bmatrix}$$

矩阵(6)为 $m+2$ 行, $n+m+1$ 列。矩阵的第一行由目标函数构成;矩阵的第 1 列由约束关系式的常数项构成;矩阵的右部由松弛变量构成。构造矩阵(6)时,对约束关系行应按先“ $\leq$ ”后“ $\geq$ ”再“ $=$ ”顺序。由于“ $=$ ”约束表达式不需要引入松弛变量,这样可以减少矩阵的列数。

求最优可行解的等式变换按下列步骤和方法进行:

(1)确定主元。在目标函数行(第 1 阶段在辅助目标函数行,第 2 阶段在目标函数行)中以非负数的最大值作主元存在的列,从主元存在的列中选最小非正数元素作为主元,并存储主元值、主元所在的行数和列数。如果目标函数行中除第 1 列外所有元素都小于 0,则表明,此线性规划问题无可行解;如果主元列的所有元素为非负数,则表明线性规划问题无界。

(2)存储主元所在列的所有元素值。

(3)将矩阵中除主元行外,其余各行分别与主元行进行线性组合,使其主元所在列的那一项元素值变为 0,替换原行中对应的元素值。

(4)用主元值的相反数去除主元行的各元素(主元项除外),并替换原元素值。

(5)用主元值去除主元所在列各元素,并替换原元素值。

(6)以存储单元内的主元值的倒数替代主元值。

(7)记录一次行数、列数交换后的位置。

(8)重复(1),直到目标函数行除第 1 列的所有元素为非正数为止。

两个阶段经过上述过程处理后,矩阵的目标函数行的第 1 列就是目标函数的最大值,其它各行第 1 列为决策变量或松弛变量的值,即最优可行解。

2 程序设计要点

2.1 求解矩阵的构造方法

求解构造矩阵(6)时,一定要按目标函数行、“ $\leq$ ”约束关系行(m_1 个约束关系行)、“ $\geq$ ”约束关系行(m_2 个约束关系行)、“ $=$ ”约束关系行(m_3 个约束关系行)、辅助目标函数行的顺序。由于“ $=$ ”约束关系不需引入松弛变量,矩阵(6)的总列数为 $n+m_1+m_2+1$,总行数为 $m_1+m_2+m_3+2$,矩阵(6)需要的存储单元数为 $(n+m_1+m_2+1)(m_1+m_2+m_3+2)$,矩阵右部的 ± 1 呈阶梯分布,“ $\leq$ ”约束关系行置 -1,“ $\geq$ ”约束关系行置 1。

辅助目标函数行由矩阵(6)的约束关系行决定,可设置一个根据约束关系行生成辅助目标函数行各元素(行向量)的模

块。

无论第 1 阶段求解基本可行解或第 2 阶段求解最优可行解,基本方法是等式变换,把矩阵(6)的约束关系行的第 1 列向量(常数列)的某一变量交换到某一行上成为行变量(行、列换位)。每发生一次变量位置交换,必须记录变换后变量迁移位置——从列变量位置到行变量的位置和从行变量位置到列变量的位置。变量的位置代表的是一个特定的决策变量、松弛变量或人工变量(统称变量)。行向量的个数为 $m_1+m_2+m_3+1$ (由约束关系行数即人工变量数确定和目标函数行),由数组 $\text{Row_P}[m_1+m_2+m_3+1]$ 记录,初始值规定为行序号 $(1,2,\cdots,m_1+m_2+m_3+1)$ 。列向量个数为 $n+m_1+m_2$ (由决策变量个数和松弛变量个数确定),由数组 $\text{Col_P}[n+m_1+m_2]$ 记录,初始值规定为列变量序号的相反数 $(-1,-2,\cdots,-n-m_1-m_2)$ 。

求解后,数组 $\text{Row_P}[m_1+m_2+m_3]$ 的元素值将存在负数,负数表示的是决策变或松弛变量的序号,数组 Row_P 的下标量对应矩阵的行,行的常数列值为决策变量或松弛变量的解。

2.2 主元行列选择和退化可行解处理方法

两段求最优可行解的关键是主元的选择。第 1 阶段由辅助目标函数确定主元列,第 2 阶段由目标函数确定主元列。

选定主元列 main_col 。目标函数行(第 1 阶段在辅助目标行)的最大非负数为主元列 main_col 。如果 main_col 不存在,表明线性规划问题没有可行解。

选定主元行 main_row 。如果 main_col 存在,就在矩阵(6)的全部约束关系行的 main_col 列的所有元素中寻找最小的非正数,如果最小非正数存在,它就是主元值 V_{main} , V_{main} 所在的行为主元行 main_row ;否则,表明线性规划问题无界。

选定主元行时必须考虑行列交换过程产生退化可行解的情况,即在某一步中,主元列的某几个元素值相同,同时又为最小非正数,导致主元行不能准确选定。解决的办法是在主元列中搜索最小非正数时,发现两个元素值相同就用两行的其它列元素值比较,以最小非正数存在的行为主元行,复杂时这个过程将会重复很多次。

2.3 矩阵行向量和列向量的调整方法

经第 1 阶段矩阵行列转换后,交换过和未交换的行向量和列向量可能是交错的,为了提高未交换变量的优先权,加速第二阶段处理,必须对矩阵中的行向量和列向量进行调整,把交换过的行向量移至矩阵的后部(辅助目标函数行之后),把未交换的行向量移至矩阵的前部(目标函数行之后);交换过的列向量移到矩阵的右部,未交换过的列向量移到矩阵的左部(常数列右边)。

3 程序测试

3.1 求解准确性测试

文献中选择了三个具有代表性的实例对实现方法的准确性进行测试,测试结果如表 1。

这 3 个测试实例中,实例 1 的约束关系中包含“ $\leq$ ”、“ $\geq$ ”和“ $=$ ”约束关系,测试了最优可行解;实例 2 测试无界解的线性规划问题;实例 3 测试无可行解的线性规划问题。测试结果表明编写的程序能准确求出线性规划的解。

3.2 配料优化实例

图 1 为川威公司的高炉配料数据,本批原料的成分数据

