求解 TSP 问题的模糊自适应粒子群算法*)

郭文忠 陈国龙
（福州大学数学与计算机科学学院 福州 350002）

摘 要 由于惯性权值的设置对粒子群优化(PSO)算法性能起着关键的作用，本文通过引入模糊技术，给出了一种惯性权值的模糊自适应调整模型及其相应的粒子群优化算法，并用于求解旅行商(TSP)问题。实验结果表明了改进算法在求解组合优化问题中的有效性，同时提高了算法的性能，并具有更快的收敛速度。
关键词 粒子群优化算法，旅行商问题，组合优化

Fuzzy Self-Adapted Particle Swarm Optimization Algorithm for Traveling Salesman Problems

GUO Wen-Zhong CHEN Guo-Long
(Institute of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350002)

Abstract The Particle swarm optimization(PSO) is an algorithm for finding optimal regions of complex search spaces through the interaction of individuals in a population of particles. The setting of inertia weight plays a key role in the performance of PSO, so many presented improved PSO algorithms based inertia weight were advanced. Based on fuzzy technology, a new fuzzy self-adapted model of inertia weight and corresponding PSO are proposed in the paper, then this paper proposes its application to traveling salesman problems(TSP). In the new PSO, different inertia weights are used in updating the particle swarm in a same generation. The experiments show that the new PSO algorithm can achieve good results. Compared with the linearly decreasing inertia weight PSO, the new algorithm also improves the performance of PSO and speeds up the velocity of the PSO convergence.
Keywords Particle swarm optimization(PSO), Traveling salesman problem, Combinatorial optimization

1 引言

粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法于1995年由 Eberhart 博士和 Kennedy 博士提出，是一类新兴的基于群智能优化算法[1]。同其它的进化算法相比，其最吸引人的特征是实现简单和具有更强的全局优化能力。为此，PSO 算法引起了演化计算等领域学者们的广泛关注，在短短的几年内形成了一个研究热点并出现了大量的研究成果。大量实验结果也表明了 PSO 算法能解决(Genetic Algorithm, GA)所能解决的各类优化问题，显示出 PSO 算法确实是有力的优化工具且具有强大的生命力[2]。

粒子群优化算法以种群行为而不是适者生存原则来激励粒子的运动。每个潜在解与粒子运行速度相联系，该速度不停地根据粒子经验以及粒子邻居们的经验来调整大小、方向，总是希望粒子能朝着更好的方向发展。在搜索过程中，全局搜索能力与局部搜索能力的平衡关系对于算法的成功起着至关重要的作用。为叙述方便，下面列出粒子的更新公式。

$$v_{id}=wv_{id}+c_1\,\mathrm{rand}(\,)(p_{id}-x_{id})+c_2\,\mathrm{Rand}()(p_{gd}-x_{id}) \tag{1}$$

$$x_{id}=x_{id}+v_{id} \tag{2}$$

其中 w 称为惯性权值；c_1，c_2 是两个正常数，称为加速因子；r_1 和 r_2 是两个 0～1 之间的随机数。通常使用一个常量 $V_{\max}$ 来限制粒子的速度，改善搜索结果。

从速度更新模型可以看出，式(1)的第一部分表示了粒子以前的速度对粒子飞行轨迹的影响，提供了粒子在搜索空间飞行的动力，是粒子群优化算法中的关键部分。其中的惯性权值控制了粒子以前经历过的速度对当前速度的影响，决定上一时刻的速度将保留多少下来。因此，惯性权值的设置影响了粒子的全局搜索能力与局部搜索能力之间的平衡。较大的惯性权值 w 促进了粒子的全局搜索能力(搜索新区域)，而较小的惯性权值则倾向于对当前所在区域的局部搜索，粒子的精细的搜索能力强。选择一个合适惯性权值，可以平衡全局搜索能力和局部搜索能力，减少获得最优解所需的运行代数[3]。

由于惯性权值的设置对 PSO 算法性能起关键作用，目前已经有多种针对惯性权值的研究，并且对算法做了不同改进。一种是根据算法叠代次数使惯性权值线性递减的方法，算法在初期使用较大惯性权值，具有较强全局搜索能力，后期则使用较小惯性权值，提高局部搜索能力[3,4]。另外，针对某些动态优化问题，由于环境本身随着时间不断改变，要求搜索算法具有非线性的搜索能力，可以随环境的改变而动态调整。由此产生另一种改进方法，使用一种模糊系统来动态修改惯性权值[5]。这些改进都提高了算法性能，但都是把惯性权值作为全局变量，对同一代粒子群使用相同的惯性权值。本文则利用模糊技术，给出一种模糊自适应粒子群优化算法，使用不同的惯性权值更新同一代种群，并用于 TSP 问题的求解。

2 TSP 问题描述

TSP 是运筹学、图论和组合优化中的 NP 难问题。问题的具体描述如下：给定 n 个城市及两两城市之间的距离，求一

*）福建自然基金资助项目(A0410010)、福建省科技三项资助项目(K03012)、福建省教育厅资助项目(JA04155)。**郭文忠** 硕士，研究方向为智能优化算法、计算机网络；**陈国龙** 教授，研究方向为智能优化算法、计算机网络。

条经过各城市一次且仅一次的最短路线。其图论描述为：给定图 $G=(V,A)$，其中 V 为顶点集，A 为各顶点相互连接组成的弧集，已知各顶点间连接距离，要求确定一条长度最短的 Hamilton 回路，即遍历所有顶点一次且仅一次的最短回路。设 d_{ij} 为城市 i 和 j 之间的距离，即弧 (i,j) 的长度。引入决策变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\text{若旅行商访问城市 } i \text{ 后访问城市 } j\text{；}\\0,\text{否则。}\end{cases} \tag{3}$$

则 TSP 的目标函数为：

$$\min Z=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}d_{ij} \tag{4}$$

3 模糊自适应粒子群优化算法

3.1 惯性权值的自适应调整模型

定义 3.1 （佳粒子距） 在粒子群优化过程中，按照适应度值的大小对当前的群体中的粒子个体集（形如 $f_1f_2\cdots f_n$）进行降序排序，并相应形成一个排好序的新粒子个体集（形如 $g_1g_2\cdots g_N$），其中 N 为种群规模，f_i 为第 i 个粒子的适应度值，$g_i\in\{f_1,f_2,\cdots,f_N\}$，$1\leqslant i,j\leqslant N$。由于新粒子个体集中处于第一个位置粒子的适应度值最大，因此我们把它称为佳粒子，而我们相应地把第 i 个粒子在新粒子个体集中的位置（即下标）称为个体 i 的佳粒子距离（简称佳粒子距），并记为 d_i。

隶属函数[6]是模糊集合论中的一个基本概念，是模糊集合理论与方法具体应用的基石。因此，如何建立某个模糊概念的较为合适的隶属函数，是用模糊集合的方法能否较好地解决问题的一个关键。本文通过引入佳粒子距的概念，隶属函数（记为 $u(d_i,x)$）的具体构造如下：

$$u(d_i,x)=\begin{cases}1+\alpha & d_i\leqslant S_1N;\\1 & S_1N<d_i<S_2N;\\1-\beta & d_i\geqslant S_2N;\end{cases} \tag{5}$$

其中，N 为种群规模，S_1、S_2 为控制参数，α、β 为调整参数，这里满足条件 $S_1<S_2<1,\alpha>0,\beta>0$。

通过上述隶属函数的模糊映射关系，我们可以知道粒子个体在模糊集中的隶属度。根据每个粒子的隶属度，我们也相应建立如下的惯性权值自适应调整函数，具体形式如下：

$$w(i,x)=u(d_i,x)*[w_s+(w_e-w_s)*cIter/\mathrm{Max}Iter] \tag{6}$$

其中，$cIter$ 为当前迭代次数，$\mathrm{Max}Iter$ 为最大迭代数，w_s、w_e 分别为 w 的初始值和结束值。

3.2 TSP 问题的 PSO 操作[7]

根据上面的 TSP 问题描述，我们假设图的顶点数为 N，则粒子的位置可以定义为序列 $x=(n_1,n_2,\cdots,n_N,n_{N+1})$，$n_i\in E$，$n_1=n_{N+1}$，当所有 n_i 与 n_{i+1} 之间的弧存在。而速度 $v=((i_k,j_k))$ 表示一组置换序列的有序列表，其中 $i_k\in\{1,\cdots,N\}$，$j_k\in\{1,\cdots,N\}$，$k\uparrow|^{v|}$，且 (i_k,j_k) 是一对置换序列。

定义 3.2 （置换序列） 假设某个粒子 k 的位置为 X_k，定义置换序列 (i_k,j_k) 的操作为交换 X_k 中值为 i_k 和 j_k 的位置，则 $X'_k=X_k+(i_k,j_k)$，其中 X'_k 为经过置换操作后得到的新的位置。

例如：$X_k=(1,2,5,3,4)$，$(i_k,j_k)=(1,2)$，则 $X'_k=(2,1,5,3,4)$。

而解决 TSP 的 PSO 基本操作定义如下：

定义 3.3 （减法操作（－）） 设 p_i,p_j 为粒子 i 和 j 的位置，则 p_i-p_j 为粒子 i 和 j 的位置减法操作，结果为一组置换序列。

例如：$A=(1,2,3,4,5)$，$B=(2,3,1,4,5)$，由于 $A(1)=1$，$B(1)=2$，第一个交换序列为 $(1,2)$，$B_2=A-B=(1,3,2,4,5)$，$A(2)=B_2(3)$，第二个置换序列为 $(2,3)$，这样就得到一个置换序列的有序列表：$((1,2),(2,3))$。

定义 3.4 （加法操作（＋）） 设 v_i,v_j 为粒子 i 和 j 的速度，p_k 为粒子 k 的位置，则 v_i+v_j 表示粒子 i 和 j 的速度加法操作，把表示第二个速度的置换序列的列表连接到第一个速度的置换序列的列表末尾。而 p_k+v_j 表示粒子 k 位置与粒子 j 速度的加法操作，将一组置换序列依次作用于某个粒子位置，得到的结果是一新位置。

例如：$A=(1,2,3,4,5)+(2,5)=(1,5,3,4,2)$。

定义 3.5 （乘法操作（×）） 对实数 $c\in(0,1)$，假设速度 v 的长度为 k 个置换序列，乘法操作是截取速度列表，使得新的速度的长度等于 $c\times k$（取整）。

定义 3.6 （合并操作（$\oplus$）） 若干个置换序列可以合并成一个新的置换序列，定义 $\oplus$ 为两个置换序列的合并操作。

根据上述的操作定义，本文使用如下公式更新粒子：

$$v_{t+1}=w_k\times v_t\oplus c_1\times(p_{i,t}-p_t)\oplus c_2\times(p_{g,t}-p_t) \tag{7}$$

$$x_{t+1}=x_t+w_k\times v_{t+1} \tag{8}$$

3.3 模糊自适应 PSO 算法

根据以上的分析和模型建立，本文在惯性权值线性递减 PSO 算法中，加入模糊自适应步骤。根据适应度高低修改粒子的惯性权值，对同一代的不同粒子使用不同惯性权值来更新粒子速度，以期获得更高性能的 PSO 算法。算法的主要步骤如下：

Step 1：初始化粒子群。即随机产生 m 个粒子的位置和速度；

Step2：计算每个粒子的适应度值；

Step3：对每个粒子，比较它的适应度值和它经历过的最好位置 p_i 的适应度值。如果更好，更新 p_i；

Step4：对每个粒子，比较它的适应度值和种群的最好位置 p_g 的适应度值。如果更好，更新 p_g；

Step5：根据式(6)模糊自适应调整惯性权值 w；

Step6：由 Step5 生成的惯性权值 w，根据式(7)和(8)更新粒子的速度和位置；

Step7：如果达到结束条件（足够好的位置或最大叠代次数）。则结束；否则，转 Step2。

4 实验

4.1 实验设置

为了说明模糊自适应 PSO 算法在 TSP 问题中的有效性，本文与惯性权值线性递减 PSO 的实验结果做比较。新型模糊自适应 PSO 使用惯性权值线性递减 PSO 作为模板，增加了模糊自适应步骤，其中控制参数 S_1、S_2 的值分别为 1/7、4/7。对适应度高的种群放大惯性权值，适应度低的种群缩小惯性权值，适应度中等的种群使用原来的惯性权值。第一代种群采用随机初始化的方法，粒子数为 50，速度长度限制为 7，加速因子 c_1 和 c_2 是 0～1 之间的随机数，惯性权值 w 的线性递减范围是 0.95～0.4，邻近粒子选择为两侧的两个相邻粒子，结束条件为最大叠代次数 5000 代，两种算法各重复运行 30 次。实验采用了 14 个点的 TSP 标准问题（问题来源见

（下转第 185 页）

识约简算法[J]. 计算机科学,2003,30(4):153～155
5 魏大宽,周献中,朱宇光. 基于改进型相容关系的不完备信息系统知识约简[J]. 计算机科学,2005,32(8. A):53～56
6 黄兵,魏大宽,周献中. 不完备信息系统最大分布约简及规则提取算法[J]. 计算机科学,2004,31(10. A):80～83
7 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社,2003
8 Dubois D,Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of Systems,1990,17:191～208
9 Shen Qiang,chouchoulas A. A rough-fuzzy approach for generating classification rules [J] . Pattern Recognition,2002,35:2425～2438
10 Sarkar M. Rough-fuzzy functions in classification [J]. Fuzzy Sets and Systems,2002,132:353～369
11 吴伟志,张文修,徐宗本. 粗糙模糊集的构造与公理化方法[J]. 计算机学报,2004,27(2):197～203
12 张梅,李怀祖,张文修. Fuzzy 信息系统的 Rough 集理论[J]. 模糊系统与数学,2002,16(3):44～49
13 刘贵龙. 模糊近似空间上的粗糙模糊集的公理系统[J]. 计算机学报,2004,27(9):1187～1191
14 管涛,冯博琴. 模糊目标信息系统上的知识约简[J]. 软件学报,2004,15(10):1470～1478
15 Wei Da-Kuan, Zhou Xian-Zhong. Rough Set Model in Incomplete and Fuzzy Decision Information System Based on Improved- Tolerance Relation. In:2005 IEEE International Conference on Granular Computing. Tsinghua University, China, 2005. 278～283

(上接第 162 页)

http://www. iwr. uni-heidelberg. de/groups/comopt/software/TSPLIB95/),问题描述见表 1。

表 1 14 节点的 TSP 标准问题

节点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X 坐标	16.47	16.47	20.09	22.39	25.23	22.00	20.47	17.20	16.30	14.05	16.53	21.52	19.41	20.09
Y 坐标	96.10	94.44	92.54	93.37	97.24	96.05	97.02	96.29	97.38	98.12	97.38	95.59	97.13	94.55

4.2 实验结果及分析

两种 PSO 算法在解决 14 点 TSP 问题实验结果如表 2 所示。实验中两种 PSO 算法获得的最优解相同,与目前已知的问题最优解一致,路径长度为 30.8785。初始随机解与 PSO 算法找到的最优解如图 1 和 2 所示。

表 2 两种 PSO 算法的实验结果

	最优解	平均值	最优解的次数
新型模糊自适应 PSO	30.8785	31.0535	21
惯性权值线性递减 PSO	30.8785	31.3167	6

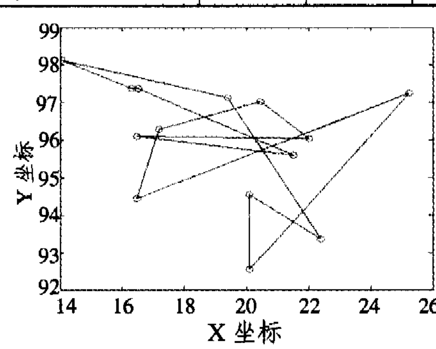

图 1 初始随机解,路径长度=56.6616

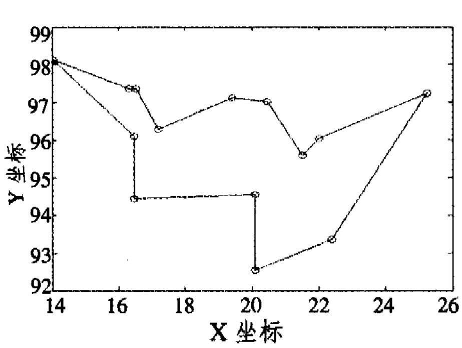

图 2 算法获得的最优结果,路径长度=30.8785

30 次实验中,两种算法都有找到问题的目前已知最优解的记录,但是新型模糊自适应 PSO 的表现明显比惯性权值线性递减 PSO 优异。经过 5000 次叠代运算后,新型模糊自适应 PSO 找到问题最优解的次数明显多于惯性权值线性递减 PSO,为 21 次,这说明新型模糊自适应 PSO 解决 TSP 问题的效率是比较高的。而惯性权值线性递减 PSO 容易陷入某个局部最优解,得到全局最优解的次数明显少于新型模糊自适应 PSO。从实验数据可以得出结论,新型模糊自适应 PSO 在解决 TSP 一类离散问题时,比惯性权值线性递减 PSO 算法优越,进一步说明了新型模糊自适应 PSO 的有效性。

结束语 本文分析了惯性权值的设置对粒子群优化算法性能的关键作用。利用模糊技术,给出了一种惯性权值的自适应调整模型及其相应的粒子群优化算法。本文以惯性权值线性递减的粒子群优化算法为范本,分析了新型粒子群优化算法在 TSP 问题中的有效性。实验结果表明,惯性权值在解决离散问题的 PSO 算法中,同样起着平衡全局搜索能力与局部搜索能力的作用,从而影响了 PSO 算法的性能。

参 考 文 献

1 Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particles swarm theory. In: Proc. Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, Nagoya, Japan: IEEE Service Center, Piscataway, NJ, 1995. 39～43
2 Kennedy J, Eberhart R C. Swarm Intelligence. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 2001
3 Shi Y H, Eberhart R C. Experimental study of particle swarm optimization. In: Proceedings of the World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics 2000 Orlando, FL, 2000
4 Engelbrecht A P, Ismail A. Training product unit neural networks. Stability and Control: Theory and Applications, 1999, 2 (1-2): 59～74
5 Shi Y H, Eberhart R C. A Modified Particle Swarm Optimizer. In: IEEE International conference of Evolutionary Computation, Piscataway, NJ: IEEE, 1998. 69～73
6 徐扬. 模糊模式识别及其应用. 成都: 西南交通大学出版社, 1999
7 Clerc M. Discrete Particle Swarm Optimization—Illustrated by the Traveling Salesman Problem. http://www. mauriceclerc. net, 2000