多机 Flow Shop 加权完成时间调度问题的渐近最优算法研究*)

古春生[1,2] 陈华平[2] 卢冰原[2] 谷 峰[2]
(江苏技术师范学院计算机科学与工程学院 常州 213001)[1]
(中国科学技术大学商学院 合肥 230052)[2]

摘 要 最近 Chou、Queyranne 和 Simchi-Levi[1],Liu[2]分别证明了恒速平行机调度问题和 Flow shop 调度问题的基于有效作业加权最短处理时间的启发式算法是渐近最优的。本文使用分组机器模型的方法证明:即使对于多机 Flow shop 加权完成时间调度问题,基于有效作业加权最短处理时间的启发式算法也是渐近最优的。

关键词 调度,多机 Flow shop 调度,启发式算法,渐近最优分析

Asymptotically Optimal Algorithm for the Multiprocessor Flow Shop Weighted Completion Time Scheduling Problem

GU Chun-Sheng[1,2] CHEN Hua-Ping[2] LU Bing-Yuan[2] GU Feng[2]
(Computer Science & Engineering Department, Jiangsu Teachers University of Technology, Chanzhou 213001)[1]
(School of Business, University of Science and Technology of China, Hefei 230052)[2]

Abstract Recently, Chou, Queyranne, Simchi-Levi[1] and Liu[2] respectively prove that the heuristics based on weighted shortest processing time among the available jobs are asymptotically optimal for the uniform parallel machine and the flow shop problem scheduling problems. By grouping this machine setting, this paper proves that the heuristic based on weighted shortest processing time among the available jobs is also asymptotically optimal, even for the multiprocessor flow shop weighted completion time scheduling problem.

Keywords Scheduling, Multiprocessor flow shop scheduling, Heuristic algorithm, Asymptotically optimal analysis

1 问题描述

本文研究柔性 flow shop 加权完成时间调度问题(简记为 FFSP)。这种调度模型由 s 个处理机中心组成,第 i 个处理机中心由 l_i 个同速机组成。有一个包含 n 个作业的集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$,作业 $j(j\in J)$ 有 s 个工序 $o_{j,1},\cdots,o_{j,2},\cdots,o_{j,s}$,工序 $o_{j,i}$ 必须在第 i 个处理机中心的任一台机器上加工处理,工序 $o_{j,i}$ 处理时间为 $P_{j,i}$,作业 j 的权重为 w_j,到达时间为 r_j。所有作业有同样的路径依次通过处理机中心 1 到 s。每个作业只有在它到达以后才可加工处理,任何作业工序加工过程中不允许中断。每个作业一次只能在某个处理机中心的一台机器上加工处理,不能同时在一个以上的处理机中心加工处理。处理机中心的任一机器能处理任一作业的相应工序,每个机器一次只能加工一个作业。相邻的处理机中心之间存储单元没有限制。问题的目标是确定一个可行调度,以使所有作业的加权完成时间和 $\sum w_jC_j$ 最小,这儿 C_j 表示作业 j 的完成时间。使用调度问题的标准符号记为:

$$FFs(Pm_1=l_1,Pm_2=l_2,\cdots,Pm_s=l_s)\,|\,r_j\,|\sum w_jC_j$$

为便于叙述,下面将该调度问题和它的最优目标值分别记为 P、Z^*;类似地,给定该问题的启发式算法 H,则由启发式算法 H 产生的加权完成时间目标值记为 Z^H。

显然,该调度问题是强 NP-难的问题,因为问题 $F2\,\|\sum C_j$ 已是强 NP-难问题[3]。

以下内容是:首先介绍与本文相关的研究工作,然后给出启发式算法,并重点证明该算法是渐近最优的,最后给出本文结论。

2 相关研究

众所周知,单机调度问题 $1\,\|\sum w_jC_j$ 可由加权最短处理时间优先规则求得最优解。但该结果不可推广到一般情况,因为问题 $1\,|\,r_j\,|\sum C_j$ 已是 NP-难的[4]。对于问题 $1\,|\,r_j\,|\sum w_jC_j$,Hall 等人[5]设计了性能比为 $3+\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$ 的确定性在线算法,而 Afrati 等人[6]给出该问题的多项式时间近似方案(PTAS, polynomial time approximation scheme)。

关于平行机调度问题 $P\,|\,r_j\,|\sum C_j$,Chekuri 等人[7]运用抢占式单机松弛算法获得性能比为 $3-1/m$ 近似算法。对于问题 $P\,|\,r_j\,|\sum w_jC_j$,Hall 等人[5]基于线性规划提出性能比为 16/3 的离线算法,而 Skutella[8]基于半正定规划获得了一个 2 近似算法。

对于有(无)作业到达时间的同速处理机中心的柔性 Flow shop 加权完成时间问题,Schulz[9]第一次给出基于线性规划的 $3s+1(3s)$ 近似算法;而对于无作业到达时间的同一问题,Kyparisis 和 Koulamas[10]证明了扩展的加权最短处理时间启发式的最坏性能比为 $(\sqrt{2}+1)/2\times\lceil l_{sum}/l_{min}\rceil$,在 $l_{min}=1$ 或 $w_j=1, j=1,2,\cdots,n$,上面的界变为 $\lceil l_{sum}/l_{min}\rceil$ 这儿 $l_{min}=$

*)本课题受安徽省自然科学基金"二维单机调度问题的启发式算法性能分析"(项目编号:050460404)和中国科学技术大学研究生创新基金资助(基金号:KD2004056)。**陈华平** 教授,博士生导师,主要研究方向为运筹学、分布式系统、商务智能;**古春生** 博士研究生,主要研究方向为运筹学、机器调度;**卢冰原** 博士研究生,主要研究方向为运筹学、机器调度;**谷 峰** 博士研究生,主要研究方向为运筹学、机器调度。

$\min_{1\leqslant i\leqslant s}\{l_i\}$，$l_{\text{sum}}=\sum_{i=1}^{s}l_i$。

本文研究作业数“很大”时启发式的性能，这一研究思路由 Kaminsky and Simchi-Levi[11]首先提出。针对处理机中心为同速处理机的柔性 Flow shop 加权完成时间调度问题，本文使用基于瓶颈优先原则对机器环境进行分组的方法，证明了在作业权重有界，每个作业的工序处理时间为相同分布的有界随机变量、不同作业之间相互独立时，基于有效作业加权最短处理时间的启发式算法是渐近最优的。为了比较我们的结果，现将有关机器调度问题的渐近性能分析结果汇集如表1，表中所用的启发式算法都是基于(有效作业)加权最短处理时间的启发式算法。

表 1　相关机器调度问题渐近性能分析汇总表

问题	参考文件	假设条件
$1\|r_j\|\sum C_j$	Kaminsky and Simchi-Levi[12]	有界处理时间
$1\|r_j\|\sum w_jC_j$	Chou[13]	有界处理时间、有界权重
$Qm\|r_j\|\sum w_jC_j$	Chou, Queyranne and Simchi-Levi[1]	有界处理时间、有界权重
$Fm\|\|\sum C_j$	Kaminsky and Simchi-Levi[14]	有界处理时间、i. i. d (独立同分布)
$Fm\|\|\sum w_jC_j$	Xia, Shanthikumar and Glynn[15]	作业之间独立 每个作业的处理时间同分布
$Fm\|\|\sum w_jC_j$	Kaminsky and Simchi-Levi[11]	处理时间和权重分别有界、i. i. d
$Fm\|r_j\|\sum w_jC_j$	Liu[2]	处理时间和权重分别有界、i. i. d, $r_j=O(n)$

3　启发式算法和主要结果

为了给出启发式算法的描述，我们首先根据 FFSP 的瓶颈处理机中心构造一个与问题 P 关联的同速平行机调度问题 $Pm|r_j|\sum w_jC_j$。如果 q 满足 $l_q=\min_{1\leqslant i\leqslant s}l_i$，则第 q 个处理机中心称为瓶颈处理机中心。关联的平行机问题记为 P_q，构造如下：P_q 有一 n 个作业的集 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，作业 $j(j\in N)$ 的权重 w_j 和到达时间 r_j 与 P 中作业 $j(j\in J)$ 的权重和到达时间相同，处理时间 P_j 为 P 中的作业 j 在处理机中心 q 的处理时间，即 $p_j=p_{j,q}$。问题 P_q 的最优值记为 $Z^*(P_q)$。

设 $[k]=\{1,2,\cdots,k\}$ 表示一个符号集。其次，我们将 FFSP 机器模型划分成 l_q 个组：$G^1,G^2,\cdots,G^{l_q}$。对于 $\forall l\in[l_q-1]$，组 G^l 有 s 个处理机中心，每个处理机中心仅有一台机器组成调度模型；组 G^{l_q} 也有 s 个处理机中心，但处理机中心 i 有 l_i-l_q+1 台同速机器组成调度模型。下面约定，组 G^l 与平行机的处理机 l 一一对应。设 $n^l(l\in[l_q])$ 表示在平行机 l 或组 G^l 上加工的作业数，$n=\sum_{l=1}^{l_q}n^l$。

对于问题 P_q，我们使用启发式算法 WSPTA(有效作业加权最短处理时间优先)，产生的作业调度序列记为 π：当一个机器变为空闲，分配给它的下一个作业为当前所有有效作业中权重与处理时间之比 w_j/p_j 最大者；否则，如果没有有效作业，该机器等待直到下一个作业到达。该启发式算法产生的目标值记为 $Z^\pi(P_q)$。

启发式算法 H：根据调度序列 π，如果问题 P_q 的作业 j 在平行机 l 上加工处理，则问题 P 的作业 j 也在组 G^l 上加工处理，并且组 G^l 上所有处理机中心的作业加工序列与平行机 l 上作业加工序列相同，即在组 G^l 上按照排列方式加工处理作业，且作业加工序列与平行机 l 上的作业加工序列相同。

下面主要分析证明如果作业参数满足一定概率假设条件，则上述启发式算法 H 是渐近最优的。

定理 1　在 FFSP 上，假定问题 P 有一 n 个作业的集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$，作业 $j(j\in J)$ 在处理机中心 $i(i=1,2,\cdots,s)$ 的处理时间为 $P_{j,i}$，关联的作业权重为 w_j，作业到达时间为 r_j。假设：①作业权重 w_j 为有界随机变量；②每个作业的处理时间 $p_{j,1},P_{j,2},\cdots,P_{j,s}$ 为相同分布的有界随机变量，不同作业之间相互独立；③作业到达时间 r_j 为非负的随机变量，且 $r_j=O(n)$。则在上述假设条件下，我们概率为 1 地有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z^H}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{Z^*}{n^2}$$

4　定理 1 的证明

引理 1[1]　在定理 1 的假设条件下，对于同速平行机调度问题 P_q，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z^*(P_q)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{Z^\pi(P_q)}{n^2}$$

引理 2[15]　在定理 1 的假设条件下，我们概率为 1 地有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant n}\sum_{j=c}^{d}(p_{j,k}-p_{j,q})=0,\ k\in[s]\backslash q$$

定理 1 的证明：

为证明简便，不失一般性，我们将有界的处理时间和权重值都映射到区间上。

设 r_j^l、p_j^l 和 C_j^l 分别表示在平行机 $l(l\in[l_q])$ 加工的第 j 个作业的到达时间、处理时间和完成时间；r_j^l、p_j^l、$C_{j,i}^l$ 分别表示在组 $G^l(l\in[l_q])$ 上加工处理的第 j 个作业的到达时间、作业 j 在第 i 个处理机中心的处理时间、完成时间。

问题 P_q 和 P 的作业完成时间计算如下：

① 计算平行机 l 上第 j 个作业的完成时间 C_j^l

$$C_j^l=\max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}P_r^l\}$$

② 计算组 $G^l(l\in[l_q-1])$ 上第 j 个作业的完成时间 $C_{j,s}^l$

设 $C_{j,0}^l=r_j^l,j\in[n]$；$C_{0,i}^l=0,i\in[s]$

由 $C_{j,i}^l$ 的递归公式：

$$C_{j,i}^l=\max\{C_{j-1,i}^l,C_{j,i-1}^l\}+p_{j,i}^l$$

展开 $C_{j,i}^l$ 的递归公式：

$$C_{j,i}^l=\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-1}\leqslant t_i=j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{t_1}p_{r,1}^l+\sum_{r=t_1}^{t_2}p_{r,2}^l+\cdots+\sum_{r=t_{i-1}}^{j}p_{r,i}^l\}$$

由上式计算并化简 $C_{j,s}^l$：

$$\begin{aligned}C_{j,s}^l&=\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{s-1}\leqslant t_s=j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{t_1}p_{r,1}+\sum_{r=t_1}^{t_2}p_{r,2}+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{t_s}p_{r,s}\}\\&=\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{s-1}\leqslant t_s=j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^l+\sum_{r=t}^{t_1}(p_{r,l}^l-p_{r,q}^l)+\cdots\\&\qquad+\sum_{r=t_{q-2}}^{t_{q-1}}(p_{r,q-1}^l-p_{r,q}^l)+\sum_{r=t_q}^{t_{q+1}}(P_{r,q+1}^l-P_{r,q}^l)+\\&\qquad\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{t_s}(P_{r,s}^l-p_{r,q}^l)+\sum_{r=1}^{s-1}p_{t_{r,q}}^l\}\\&\leqslant\max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^l\}+\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_{s-1}\leqslant t_s=j}\{\sum_{r=t}^{t_1}(p_{r,l}^l-\\&\qquad p_{r,q}^l)+\cdots+\sum_{r=t_{q-2}}^{t_{q-1}}(p_{r,q-1}^l-p_{r,q}^l)+\sum_{r=t_q}^{t_{q+1}}(p_{r,q+1}^l-p_{r,q}^l)\\&\qquad+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{t_s}(p_{r,s}^l-p_{r,q}^l)\}+(s-1)\end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^l\}+\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant j}+\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}^l-p_{r,q}^l)+s-1$$

③ 计算组 G^{l_q} 上第 j 个作业的完成时间

设 $P_{j,l_i}^{l_q,k_i}$ 表示在组 G^{l_q} 的处理机中心 i 的机器 k_i($k_i\in[l_i-l_q+1]$)上加工处理的第 j 个作业的时间量，即如果工序 $O_{j,i}$ 由机器 k_i 加工处理，则 $p_{j,l_i}^{l_q,k_i}=p_{j,l_i}^{l_q}$；否则 $p_{j,l_i}^{l_q,k_i}=0$。故

$$C_{j,l_s}^{l_q}\leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_s=j,k_i\in[l_i-l_q+1],i\in[s]}\{r_t^{l_q,k_1}+\sum_{r=t}^{t_1}p_{r,1}^{l_q,k_1}+\sum_{r=t_1}^{t_2}p_{r,2}^{l_q,k_2}+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{j}p_{r,s}^{l_q,k_s}\}=$$

$$\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_s=j,k_i\in[l_i-l_q+1],i\in[s]}\{r_t^{l_q}+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^{l_q}+\sum_{r=t}^{t_1}(p_{r,1}^{l_q,k_1}-p_{r,q}^{l_q})+\cdots+\sum_{r=t_{q-2}}^{t_{q-1}}(p_{r,q-1}^{l_q,k_{q-1}}-p_{r,q}^{l_q})+\sum_{r=t_q}^{t_{q+1}}(p_{r,q+1}^{l_q,k_{q+1}}-p_{r,q}^{l_q})+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{j}(p_{r,s}^{l_q,k_s}-p_{r,q}^{l_q})+\sum_{r=1}^{s-1}p_{t_r,q}^{l_q}\}$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^{l_q}+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^{l_q}\}+\max_{1\leqslant t\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_s=j}\{\sum_{r=t}^{t_1}(p_{r,1}^{l_q}-p_{r,q}^{l_q})+\cdots+\sum_{r=t_{q-2}}^{t_{q-1}}(p_{r,q-1}^{l_q}-p_{r,q}^{l_q})+\sum_{r=t_q}^{t_{q+1}}(p_{r,q+1}^{l_q}-p_{r,q}^{l_q})+\cdots+\sum_{r=t_{s-1}}^{j}(p_{r,s}^{l_q}-p_{r,q}^{l_q})+\sum_{r=1}^{s-1}p_{t_r,q}^{l_q}\}$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^{l_q}+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^{l_q}\}+\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant j}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}^{l_q}-p_{r,q}^{l_q})+s-1$$

④ 计算问题 P_q 和 P 总的加权完成时间

$$Z^{\pi}(P_q)=\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^lC_j^l=\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=1}^{j}p_r^l\}$$

$$Z^{\mathrm{H}}=\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^lC_{j,s}^l\leqslant\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\{\max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^l\}+\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant j}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}^l-p_{r,q}^l)+s-1\}$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\max_{1\leqslant t\leqslant j}\{r_t^l+\sum_{r=t}^{j}p_{r,q}^l\}+\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\{\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant j}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}^l-p_{r,q}^l)\}+n(s-1)$$

根据问题 P_q 的构造，我们知道 $p_r^l=p_{r,q}^l$，故

$$Z^{\mathrm{H}}\leqslant Z^{\pi}(P_q)+\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\{\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant j}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}^l-p_{r,q}^l)\}+n(s-1)$$

$$\leqslant Z^{\pi}(P_q)+\sum_{l=1}^{l_q}\sum_{j=1}^{n^l}w_j^l\{\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant n}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}-p_{r,q})\}+n(s-1)$$

$$\leqslant Z^{\pi}(P_q)+n\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant n}\sum_{r=c}^{d}(p_{r,k}-p_{r,q})+n(s-1)$$

对于问题 P，启发式算法 H 产生的作业序列是可行的，因此 $Z^*(P_q)\leqslant Z^*\leqslant Z^{\mathrm{H}}$。故

$$Z^*(P_q)\leqslant Z^*\leqslant Z^{\mathrm{H}}\leqslant Z^{\pi}(P_q)+n\sum_{k\in[s]\backslash q}\max_{1\leqslant c\leqslant d\leqslant n}\sum_{r=c}^{d}(P_{r,k}-P_{r,q})+n(s-1)$$

由引理 1 和 2，概率为 1 地有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z^*(P_q)}{n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{Z^*}{n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{Z^{\mathrm{H}}}{n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{Z^{\pi}(P_q)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{Z^*(P_q)}{n^2}$$ □

小结 对于柔性 Flow shop 加权完成时间调度问题，本文证明了如果作业参数满足一定概率假设条件，基于有效作业最短加权处理时间的启发式算法也是渐近最优的。下一步我们希望将这一结果扩展到处理机中心为恒速处理机的柔性 Flow shop 调度模型。

参 考 文 献

1 Chou C, Queyranne M, Simchi-Levi D. The Asymptotic Performance Ratio of an On-Line Algorithm for Uniform Parallel Machine Scheduling with Release Dates. In: Lecture Notes in Computer Science 2081, Springer-Verlag, 2001. 45~59

2 Liu H. Probabilistic Analysis and Practical Algorithms for Machine Scheduling Problems with or without Release Date Constraints: [PhD thesis]. Evanston, Illinois, U S A: Northwestern University, 2001

3 Garey MR, Jhonson DS, Sethi R. The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling. Mathematics of Operations Research, 1976, 1(2): 117~129

4 Lenstra JK, Rinnooy Kan AHG, Brucker P. Complexity of Machine Scheduling Problems. Annals of Discrete Mathematics, 1977, 1: 343~362

5 Hall LA, Schulz AS, Shmoys DB, et al. Scheduling to Minimize Average Completion Time: Off-line and On-line Approximation Algorithms. Mathematics of Operations Research, 1997, 22(3): 513~544

6 Afrati F, Bampis E, Chekuri C, et al. Approximation Schemes for Minimizing Average Weighted Completion Time with Release Dates. In: Proceeding of the FOCS'99, 1999. 32~43

7 Chekuri C, Motwani R, Natarajan B, et al. Approximation Techniques for Average Completion Time Scheduling. In: Proceedings of the Eight Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1997. 609~618

8 Skutella M. Convex Quadratic and Semi-definite Programming Relaxations in Scheduling. Journal of the ACM, 2001, 48(2): 206~242

9 Schulz AS. Polytopes and Scheduling.: [PhD thesis]. Berlin, Germany: Technical University of Berlin, 1996

10 Kyparisis GJ, Koulamas C. A note weighted completion time minimization in a flexible flow shop. Operations Research Letters, 2001, 29: 5~11

11 Kaminsky P, Simch-Levi D. Probabilistic Analysis and Practical Algorithms for the Flow Shop Weighted Completion Time Problem. Operations Research, 1998, 46: 872~882

12 Kaminsky P, Simchi-Levi D. Probabilistic Analysis of an On-Line Algorithm for the Single Machine Completion Time Problem with Release Dates. Operations Research Letters, 2001, 29: 141~148

13 Chou CM. Asymptotic Performance Analyses of Machine Scheduling Problems with Release Dates: [PhD thesis]. Evanston, Illinois, U S A: Northwestern University, 2001

14 Kaminsky P, Simch-Levi D. The Asymptotic Optimality of the SPT Rule for the Flow Shop Mean Completion Time Problem. Operations Research, 2001, 49: 293~304

15 Xia C, Shanthikumar JG, Glynn PW. On the Asymptotic Optimality of the SPT Rule for the Flow Shop Average Completion Time Problem. Operations Research, 2000, 48: 615~622