

再论 Vague 集间的相似度量公式^{*})张福金¹ 王鸿绪²(琼州大学物理系¹ 计算机科学与技术系² 海南五指山市 572200)

摘要 列举了大量 Vague 集间的相似度量公式。例题分析表明它们中的大多数都有缺陷。本文用分段函数的方法试图修补这些公式,使得这些公式中的大多数都能够继续使用。这项工作有益于 Vague 集理论的发展。

关键词 Vague 集,分段函数,相似度量

Second Discuss on the Similarity Measure Formulations between Vague Sets

ZHANG Fu-Jin¹ WANG Hong-Xu²(Department of Physics, Qiongzhou University, Wuzhishan Hainan 572200)¹(Department of Computer of Science and Technology, Qiongzhou University, Wuzhishan Hainan 572200)²

Abstract A great quantity of similarity measure formulations between vague sets is enumerated. The analyzing of these formulations show that most of the formulations have some kind of shortcomings. Using the method of the piecewise functions to try repairing all these formulations could make most part of the formulations effective. This effort has proved useful for the development of Vague sets.

Keywords Vague set, Piecewise function, Similarity measure

Vague 集理论^[1]已经在智能系统中显示出良好的应用前景,它们结构简单,使用方便,应用广泛。本文列举了大量的 Vague 集间的相似度量公式,但遗憾的是例题分析表明:现有的 Vague 集间的相似度量公式中大多数存在缺陷。有些论文实际上采用摒弃现有公式、重新构造较复杂公式的方法来解决这一问题,如文[13,14]。应该指出,现有的有些公式缺陷严重,应该摒弃,如文[11,12]。但这些公式中绝大多数(如文[2~11])的缺陷并不严重,是可以补救的。本文采用分段函数的方法来解决此问题。既可以补救这些公式中的缺陷,又可以使这些公式在 Vague 环境下的各种智能系统的研究中继续发挥作用。

1 预备知识

设论域为 X , X 上的 Vague 集 V 可分别用一个真隶属函数 t_V 和一个假隶属函数 f_V 刻画:

$$t_V: X \rightarrow [0, 1], f_V: X \rightarrow [0, 1]$$

其中 $t_V(x)$ 是从支持 x 的证据所导出的隶属度的下界,而 $f_V(x)$ 是从反对 x 的证据所导出的否定隶属度的下界,并满足约束条件: $t_V(x) + f_V(x) \leq 1$ 。本文用 $V(x) = [t_V(x), 1 - f_V(x)]$ 表示 x 对 V 的 Vague 值。

论域 X 上的全体 Vague 集记为 $V(X)$ 。文中总设任意 $x, y \in X$; 任意 $V, U \in V(X)$ 。用 $V(x)$ 和 $U(y)$ 表示 Vague 值。当论域为有限集时,设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其上的 Vague 集 V 可表示为:

$$V = \sum_{i=1}^n [t_V(x_i), 1 - f_V(x_i)] / x_i, x_i \in X$$

在下文中,总用 V, U 表示有限论域 X 上的任意两个 Vague 集。

2 已知 Vague(值)集间的相似度量公式

记 Vague 值 $V(x)$ 和 $U(y)$ 间的相似度量公式(Measures of similarity)为 $M(V(x), U(y))$, 记 Vague 集 V 和 U 间的相似度量为 $M(V, U)$, 则 $M(V(x), U(y)) \in [0, 1]$, $M(V, U) \in [0, 1]$ 。相似度量数值越大,表示二 Vague(值)集越相似。当相似度量数值达到最大值 1 时,则此二 Vague(值)集最相似;而当相似度量数值为最小值 0 时,则此二 Vague(值)集最不相似。

我们查阅到的 Vague(值)集间的相似度量公式开列如下:

(1)文[2]中 Vague(值)集间的相似度量为:

$$M_1(V(x), U(y)) = 1 - |a * (t_V(x) - t_U(y)) + b * (f_V(x) - f_U(y)) + C * (t_U(y) - f_U(y) - (t_V(x) + f_V(x)))| / (a - b) \quad (2.1)$$

$$M_1(V, U) = (\sum_{i=1}^n \omega_i * M_1(V(x_i), U(x_i))) / \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (2.2)$$

其中权数 $a \geq c \geq 0 \geq b$, $\omega_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

(2)文[3]中 Vague(值)集间的相似度量为:

$$M_2(V(x), U(y)) = 1 - |t_V(x) - t_U(y)| / 2 - |f_V(x) - f_U(y)| / 2 \quad (2.3)$$

$$M_2(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_2(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.4)$$

(3)文[3]中 Vague(值)集间的加权相似度量为:

$$M_3(V(x), U(y)) = 1 - [a * |t_V(x) - t_U(y)| + b * |f_V(x) - f_U(y)| + c * |(t_V(x) + f_V(x)) - (t_U(y) + f_U(y))|] / (a + b + c) \quad (2.5)$$

$$M_3(V, U) = \sum_{i=1}^n \omega_i * M_3(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.6)$$

^{*}基金项目:海南省教育厅基金资助项目 HJ200667。张福金 高级工程师,主要研究领域为工业控制技术、模糊控制等。王鸿绪 教授,主要研究领域为模糊矩阵、模糊控制和模糊信息处理等。

其中权数 $a, b, c \geq 0, \omega_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$.

(4)文[4]中 Vague(值)集间的相似度量为:

$$M_4(V(x), U(y)) = 1 - |S(V(x)) - S(U(y))| / 4 - |t_V(x) - t_U(y)| / 4 - |f_V(x) - f_U(y)| / 4 \quad (2.7)$$

$$M_4(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_4(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.8)$$

(5)文[4]中 Vague(值)集间的加权相似度量:

$$M_5(V, U) = \{ \sum_{i=1}^n \omega_i * M_4(V(x_i), U(x_i)) \} / \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (2.9)$$

(6)文[5]中 Vague(值)集间的相似度量:

$$M_6(V(x), U(y)) = 1 - \{ \lambda_1 \max[|t_V(x) - t_U(y)|, |f_V(x) - f_U(y)|] + \lambda_2 \min[|t_V(x) - t_U(y)|, |f_V(x) - f_U(y)|] \} \quad (2.10)$$

$$M_6(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_6(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.11)$$

其中: $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \text{且 } \lambda_1 \geq \lambda_2$.

(7)文[5]中 Vague(值)集间的相似度量:

$$M_7(V(x), U(y)) = \{ 2 - (|t_V(x) - t_U(y)| + |f_V(x) - f_U(y)|) \} / \{ 2 + (|t_V(x) - t_U(y)| + |f_V(x) - f_U(y)|) \} \quad (2.12)$$

$$M_7(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_7(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.13)$$

(8)文[6]中 Vague 集间的相似度量:

$$M_8(V(x), U(y)) = \{ 2n - \sum_{i=1}^n (|t_V(x_i) - t_U(x_i)| + |f_V(x_i) - f_U(x_i)|) \} / \{ 2n + (|t_V(x_i) - t_U(x_i)| + |f_V(x_i) - f_U(x_i)|) \} \quad (2.14)$$

(9)文[6]中另一个 Vague 集间的相似度量:

$$M_9(V, U) = \frac{1 - q(V, U)}{1 + q(V, U)} \quad (2.15)$$

其中: $q(V, U) = \left\{ \frac{|t_V(x_i) - t_U(x_i)|^p + |f_V(x_i) - f_U(x_i)|^p}{2n} \right\}^{1/p}, p \geq 1,$

文[6]还给出了更广泛一类的 Vague 集间的相似度量, 见如下定理:

定理^[6] 令函数 $M_{10}(V, U) = f(q(V, U))$ (2.16)

其中 $f_V(x)$ 是定义在 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 上的严格递减函数, 且满足条件 $f(0) = 1, f(1) = 0$, 则 $M_{10}(V, U)$ 是 V, U 之间的相似度量.

文[6]并指出, 满足上述定理条件的 $f(x)$ 有很多. 例如:

$$f(x) = \frac{1 - x^\alpha}{1 + x^\alpha}, f(x) = 1 - x^\alpha, \alpha \geq 0,$$

(10)文[7]中 Vague 值间的相似度量:

$$M_{11}(V(x), U(x)) = 1 - D(V(x), U(y)) / \sqrt{2} \quad (2.17)$$

其中: $D(V(x), U(y)) = [(t_V(x) - t_U(y))^2 + (f_V(x) - f_U(y))^2]^{1/2}$

(11)文[8]中 Vague 集间的相似度量:

$$M_{12}(V, U) = 1 - \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [|\mu_V(x_i) - \mu_U(x_i)|^p + |v_V(x_i) - v_U(x_i)|^p] \right\}^{1/p} \quad (2.18)$$

其中: $\pi_Q(x_i) = 1 - t_Q(x_i) - f_Q(x_i), \mu_Q(x_i) = t_Q(x_i) - \alpha \pi_Q(x_i), v_Q(x_i) = f_Q(x_i) + \beta \pi_Q(x_i), Q = V, Q = U, 1 \leq p < +\infty$.

(12)文[8]中 Vague 集间的加权相似度量:

$$M_{13}(V, U) = 1 - \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i [q_1 |\mu_V(x_i) - \mu_U(x_i)|^p + q_2 |v_V(x_i) - v_U(x_i)|^p + q_3 (1 - \alpha - \beta) |\pi_V(x_i) - \pi_U(x_i)|^p] \right\}^{1/p} \quad (2.19)$$

其中: $q_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq 3, q_1 + q_2 + q_3 = 1, \omega_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq$

$n, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

而 $\pi_V(x_i), \pi_U(x_i), \mu_V(x_i), \mu_U(x_i), v_V(x_i), v_U(x_i)$ 和 p 均见(11).

(13)文[9]中 Vague(值)集间的相似度量:

$$M_{14}(V(x), U(y)) = 1 - \frac{1}{2} (\delta_{xy} + \alpha_{xy}) \quad (2.20)$$

$$M_{14}(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{14}(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.21)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_x &= 1 - t_V(x) - f_V(x), \delta_x = t_V(x) + T_x t_V(x), \\ \alpha_x &= f_V(x) + T_x f_V(x), \\ \delta_{xy} &= \delta_x - \delta_y = (t_V(x) + T_x t_V(x)) - (t_V(y) + T_y t_V(y)), \\ \alpha_{xy} &= \alpha_x - \alpha_y = (f_V(x) + T_x f_V(x)) - (f_V(y) + T_y f_V(y)) \end{aligned}$$

文[9]中 Vague 集间的加权相似度量:

$$M_{15}(V, U) = \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i M_{14}(V(x_i), U(x_i)) \right\} / \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (2.22)$$

其中: 权重为 $\omega_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n$.

(14)文[10]中第一个 Vague 集间的相似度量:

$$M_{16}(V, U) = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_{VU}(i) - \varphi_{fVU}(i))^p \right]^{1/p} \quad (2.23)$$

其中: $\varphi_{VU}(i) = |t_V(x_i) - t_U(x_i)| / 2, \varphi_{fVU}(i) = |1 - f_V(x_i) / 2 - (1 - f_U(x_i)) / 2|, 1 \leq p < +\infty$.

(15)文[10]中第二个 Vague 集间的相似度量:

$$M_{17}(V, U) = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_{s_1}(i) + \varphi_{s_2}(i))^p \right]^{1/p} \quad (2.24)$$

其中: $m_Q(x_i) = (t_Q(x_i) + 1 - f_Q(x_i)) / 2, m_{Q1}(x_i) = (t_Q(x_i) + m_Q(x_i)) / 2$

$$\begin{aligned} m_{Q2}(x_i) &= (m_Q(x_i) + 1 - f_Q(x_i)) / 2, Q = V \text{ 或 } Q = U, \\ \varphi_{s_1}(i) &= |m_{V1}(x_i) - m_{V2}(x_i)| / 2, \varphi_{s_2}(i) = |m_{U2}(x_i) - m_{U1}(x_i)| / 2 \end{aligned}$$

(16)文[10]中 Vague 集间的一个加权相似度量:

$$M_{18}(V, U) = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sum_{m=1}^3 \omega_m \varphi_m(i))^p \right]^{1/p} \quad (2.25)$$

其中: $\varphi_1(i) = \varphi_{VU}(i) + \varphi_{fVU}(i)$, 或 $\varphi_1(i) = \varphi_{s_1}(i) + \varphi_{s_2}(i), \varphi_2(i) = |\varphi_V(i) - \varphi_U(i)|, \varphi_V(i)$ 和 $\varphi_U(i)$ 的定义见(11). $\varphi_V(i) = |1 - f_V(x_i) - t_V(x_i)| / 2, \varphi_U(i) = |1 - f_U(x_i) - t_U(x_i)| / 2, \varphi_3(i) = \max\{\varphi_V(i), \varphi_U(i)\} - \min\{\varphi_V(i), \varphi_U(i)\}$, 权重 $\omega_m \in [0, 1], \sum_{m=1}^3 \omega_m = 1$.

(17)文[10]中 Vague 集间的另一个加权相似度量:

$$M_{19}(V, U) = 1 - \left[\sum_{i=1}^n \omega_i (\sum_{m=1}^3 \omega_m \varphi_m(i))^p \right]^{1/p} \quad (2.26)$$

其中: 权重 $\omega_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \sum_{m=1}^3 \omega_m = 1$.

(18)文[11]中 Vague 集间的相似度量:

$$M_{20}(V, U) = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_V(i) - \varphi_U(i))^p \right]^{1/p} \quad (2.27)$$

其中: $\varphi_Q(i) = (t_Q(x_i) + 1 - f_Q(x_i)) / 2, Q = V \text{ 或 } Q = U, 1 \leq p < +\infty$

(19)文[12]中 Vague(值)集的相似度量:

$$M_{21}(V(x), U(y)) = 1 - |S(V(x), U(y))| / 2 \quad (2.28)$$

$$M_{21}(V, U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{21}(V(x_i), U(x_i)) \quad (2.29)$$

3 Vague 集间相似度量的缺陷及补救方法

3.1 Vague(值)集间相似度量的缺陷及补救方法

例 3.1 设 $V(x) = [0.2, 0.8], U(x) = [0.4, 0.6]$, 显然 $V(x)$ 和 $U(x)$ 相差甚远. 但对于文[12]中的式(2.28), 由计算可知: $M_{21}(V(x), U(x)) = 1$. 计算结果表示 $V(x)$ 和 $U(x)$

最相似,这是与人们的认识相悖的。

例 3.2 设 $V = \{[0.1, 0.9][0.2, 0.8][0.3, 0.7]\}$, $U = \{[0.4, 0.6][0.5, 0.5][0.4, 0.6]\}$ 。显然 V 与 U 相差甚远, V 与 U 不应该最相似,但文[12]中的 Vague 集相似度量式(2.29)计算得: $M_{21}(V, U) = 1$ 。文[11]中的 Vague 集间的相似度量式(2.27)计算得: $M_{20}(V, U) = 1$; 文[10]中的 Vague 集间的相似度量式(2.23)计算得: $M_{16}(V, U) = 1$ 。

计算结果都显示 V 与 U 最相似。这违背了人们的认识。

综合例 3.1 和例 3.2 所述,式(2.28)、(2.29)、(2.27)和(2.23)不应该作为 Vague(值)集间的相似度量。顺便指出,用第 2 节列举的其他相似度量公式进行例 3.1 和例 3.2 的计算,不会出现等于 1 的结果。

例 3.3 设 $V(x) = U(y) = [0, 1]$, 由计算可知:

$$M_i(V(x), U(y)) = 1, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 14.$$

在此例中,尽管 $V(x) = U(y)$,但是它们都是 $[0, 1]$ 。在这里 $t_V(x) = f_V(x) = t_U(y) = f_U(y) = 0$ 。对这两个 Vague 值,人们是一无所知的。但用上述公式计算居然得到的结论是 $V(x)$ 与 $U(y)$ 最相似的,这不符合人们的认识。

例 3.4 设 $V = U = \sum_{i=1}^n [0, 1]/x_i, x_i \in X$, 由计算可知:

$$M_i(V, U) = 1, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19.$$

Gau 和 Buehrer 早就指出:“用差 $1 - f_V(x) - t_V(x)$, 表示的不确定特征的知识的精确度,如果它很小,则关于 x 的知识是相对精确的;如果它很大,则知道相应的很少”。因此,当 $1 - f_V(x) - t_V(x)$ 达到最大值 1 时,对 x 的知识知道的最少的,此时 $f_V(x) = t_V(x) = 0$ 。也就是当 $V(x_i) = U(x_i) = [0, 1]$ 时,我们对 x_i 的知识知道的是最少的,当然更谈不上 V 与 U 是最相似的。

例 3.3 和例 3.4 表明,原来的 Vague(值)集间的相似度量式(2.1)~(2.22), (2.24)~(2.26)全部出现了问题。那么在例 3.3 和例 3.4 的条件下, $M(V(x), U(y))$ 和 $M(V, U)$ 的值等于多少时才是合理得呢? 从上述分析可见,显然应该是: $M(V(x), U(y)) = \text{不确定}, M(V, U) = \text{不确定}$ 。

3.2 Vague(值)集间的相似度量的新定义

综合上述所有的 Vague(值)集间的相似度量公式所满足的性质(或公理),以及从实例分析看到的问题,我们给出如下的 Vague(值)集间的相似度量的新定义:

定义 3.1 设 X 是一个点(对象)空间, $V, U \in V(X), x, y \in X$ 。如果函数 $M(V(x), U(y))$ 满足如下准则:

准则 1(对称性) $M(V(x), U(y)) = M(V(y), U(x));$

准则 2(有界性) $M(V(x), U(y)) \in [0, 1];$

准则 3(边界条件 1) $M(V(x), U(y)) = 1 \Leftrightarrow t_V(x) = t_U(y), f_V(x) = f_U(y).$

准则 4(边界条件 2) 若 $V(x) = [0, 0], U(y) = [1, 1];$ 或者若 $V(x) = [1, 1], U(y) = [0, 0],$ 则 $M(V(x), U(y)) = [0, 0].$

那么如下函数称为 Vague(值) $V(x)$ 和 $U(y)$ 间的相似度量:

$$S(V(x), U(y)) = \begin{cases} \text{不确定, 当 } V(x) = U(y) = [0, 1] \text{ 时} \\ M(V(x), U(y)), \text{ 其它,} \end{cases}$$

例如: $S_1(V(x), U(y)) =$

$$\begin{cases} \text{不确定, 当 } V(x) = U(y) = [0, 1] \text{ 时} \\ M_1 V(x), U(y), \text{ 其它} \end{cases}$$

就是由式(2.1)修补成的新的 Vague(值)间的相似度量公式。

定义 3.2 设 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 是一个有限点(对象)

空间, $V, U \in V(X)$ 。如果函数 $M(V, U)$ 满足如下准则:

准则 1(对称性) $M(V, U) = M(U, V);$

准则 2(有界性) $M(V, U) \in [0, 1];$

准则 3(边界条件 1) $M(V, U) = 1 \Leftrightarrow t_V(x_i) = t_U(x_i), f_V(x_i) = f_U(x_i), i = 1, 2, \dots, n;$

准则 4(边界条件 2) 若 $U(x_i) = [1, 1], V(x_i) = [0, 0];$ 或 $V(x_i) = [1, 1], U(x_i) = [0, 0] 1 \leq i \leq n$ 时, 则 $M(V, U) = 0;$

那么如下函数称为 Vague 集 V 和 U 间的相似度量:

$$S(V, U) = \begin{cases} \text{不确定, 当 } V = U = \sum_{i=1}^n [0, 1]/x_i, x_i \in X \\ M(V, U), \text{ 其它} \end{cases}$$

例如: $S_1(V, U) =$

$$\begin{cases} \text{不确定, 当 } V = U = \sum_{i=1}^n [0, 1]/x_i, x_i \in X \\ M_1(V, U), \text{ 其它,} \end{cases}$$

就是由式(2.2)修补成的新 Vague 集间的相似度量公式。

当引入上述定义以后,例 3.3 和例 3.4 所反映出的现有大量 Vague(值)集间的相似度量的缺陷得以补救。应该说明的是文[13]已经指出如例 3.3 和例 3.4 所反映出的问题,而且“为了更合理地度量 2 个 Vague 集(值)之间的相似度量,本文提出了一种新的度量方法——最小区间法”^[13]。文[14]发展了该方法,使得文[13]给出的方法是文[14]给出方法的特例。给出新相似度量方法是正常的事情,但是对现有的大量相似度量公式如果仅因为有缺陷就摒弃,也是不应该的,因为这些公式结构简单,使用方便,应用广泛,弃之实在可惜。本文的思路是通过分段函数的方法来补救这些公式,以利更好地应用它们。但是也不得不注意到,因为不满足准则 3,所以式(2.23), (2.27), (2.28) 和 (2.29) 应予以摒弃,而式(2.1)~(2.22), (2.24)~(2.26) 这些公式皆满足准则 1~准则 4,皆可按定义 3.1 或定义 3.2 修补成新的可继续应用的 Vague(值)集间的相似度量公式。

结论 通过对列举的现有大量的 Vague(值)集间的相似度量公式,应用例题分析的方法,反映出它们都有缺陷。少数公式的缺陷是严重的,应予摒弃。而所列举其它大量公式按定义 3.1 和定义 3.2 修补,仍可继续发挥作用。

参考文献

- Gau W L, Buehrer D J. Vague Sets [J]. IEEE. Tran. Syst. Man. Cybern, 1993, 23(2): 610~614
- Chen S M. Similarity measure between vague sets and between lements [J]. IEEE. Trans. Syst. Man. Cybern, 1997, 27(2): 153~158
- Hong D H, Kim C. A not on similarity measures between vague sets and between lements [J]. Information Sciences, 1999, 115(1): 83~96
- 李凡, 等. Vague 集间的相似度量[J]. 软件学报, 2001, 12(6): 922~927
- 黄国顺, 等. Vague 集相似度量及其在模式识别中的应用[J]. 复旦学报(自然科学版), 2004, 43(5): 869~872
- 黄国顺, 等. 一类新 Vague 集相似度量[J]. 计算机应用与软件, 2005, 7: 24~26, 85
- 张东风, 等. 一种计算 Vague 集之间相似程度的新方法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2004, 32(5): 59~60
- 刘华文. Vague 集之间的相似度量及其在模式识别中的应用[J]. 山东大学学报(工学版), 2004, 34(1): 100~104
- 张诚一, 党平安. 关于 Vague 集之间的相似度量[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(17): 92~94, 102
- Liang Z, Shi P. Similarity, measures on intuitionistic fuzzy sets [J]. Pattern Recognition letters, 2003, 24: 2687~2693
- Li D, Cheng C. New Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and applications to pattern recognition [J]. Pattern Recognition letters, 2002, 23(1-3): 221~225
- Chen S M. Measures of Similarity Between Vague Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2): 217~223
- 夏少云, 等. Vague 集之间相似度量的分析与研究[J]. 北方交通大学学报, 2004, 28(1): 95~99
- 石玉强, 王鸿绪. 关于 Vague 集之间相似度的注[J]. 计算机科学, 2005, 32(8A): 119~120, 140