

超宽带下无线 Ad Hoc 网络容量的理论研究

戴沁芸 胡修林 张蕴玉

(华中科技大学电子与信息工程系 武汉 430074)

摘要 本文在三维球体表面和二维平面上建立了超宽带(UWB)技术下的 Ad hoc 网络模型,运用图论中 Voronoi 小区特性和渗透理论分析了相应的网络容量,得出结论:UWB 技术下无线 Ad hoc 网络容量的上限将随着网络节点数目的增加而增大。该结论一方面说明 UWB 技术是提高 Ad hoc 网络容量的有效手段,物理层设计不同对网络性能会有不同影响,另一方面也为 UWB 技术与 Ad hoc 网络的结合奠定了理论基础。

关键词 无线 Ad hoc 网络,网络容量,图形理论,超宽带,渗透理论

Study about the Capacity of Wireless Ad Hoc Networks under Ultra Wide Band

DAI Qin-Yun HU Xiu-Lin ZHANG Yun-Yu

(Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074)

Abstract In this paper, wireless ad hoc network models under ultra wide band (UWB) are established on the three dimension sphere surface and in the two dimension plane. We analyze the corresponding network capacity by the properties of voronoi cell in graph theory and percolation theory. Our conclusion is that the upper bound of capacity of wireless ad hoc networks under ultra wide band increases as the number of nodes in the network. On the one hand, it shows that UWB technology is an effective way to improve the network capacity, and on the other hand, it provides the theoretical foundation for the integration of UWB technology and wireless ad hoc networks.

Keywords Wireless ad hoc networks, Network capacity, Graph theory, Ultra wide band, Percolation theory

1 引言

无线 Ad hoc 网络起源于 20 世纪 70 年代美国军事研究领域,它允许多个节点在共享的无线信道上进行数据传输,网络中不存在中心控制,具有组网快速灵活、低功耗、低维护等特点,十分适用于传感器网络或军用系统。由于节点共享无线资源,使传输相互干扰,因此构建大型 Ad hoc 网络很具有挑战性。一个自然会考虑的问题就是随网络节点数目的增加,吞吐量如何变化,即节点能够长时间地支持数据传输率是多少。Gupta 等人^[1]构造了经典的 Ad hoc 网络模型,节点在网络中静止且均匀分布,分析得出网络容量会随节点数目的增加而降低。这使众多学者纷纷开始研究提高容量的各种方法,其中增加节点移动性^[2]、采用有向天线^[3]等都有效地改善容量性能。

自 2002 年美国通信委员会同意超宽带(UWB)的商业应用后,超宽带技术便在无线通信领域备受关注,逐步推出相应标准,例如 IEEE802.15.3^[4]。UWB 技术在数据发送端采用极低的发射功率,传输速率在 100Mbps 到 500Mbps 之间,非常适用于 Ad hoc 网络。因此,利用无限带宽资源的 UWB 技术被认为是最有希望提高网络容量的方法。

本文首先给出了无线 Ad hoc 网络容量的定义,分别在三维球体表面和二维平面上建立了 UWB 技术下的 Ad hoc 网络模型,运用图论中 Voronoi 小区特性和渗透理论分析了相应的网络容量,得出结论:UWB 技术下无线 Ad hoc 网络容量的上限将随着网络节点数目的增加而增大。该结论一方面说明 UWB 技术是提高 Ad hoc 网络容量的有效手段,物理层设计不同对网络性能会有不同影响,另一方面也为 UWB 技术

与 Ad hoc 网络的结合奠定了理论基础。

2 网络容量的定义

在分析网络容量之前,首先要给出合理定义。定义不同,分析结果也会不同。为简化数学表达,我们采用了 Knuth 符号表示法^[5]: $f(n)=O(g(n))$ 表示存在常数 c 和整数 N ,这样在 $n>N$ 时有 $f(n)\leq cg(n)$ 。由于我们建立的是随机网络模型,因而讨论需要在极限条件下展开。用 w. h. p (with high probability) 表示随网络节点 $n\rightarrow\infty$ 事件发生的概率趋近于 1。

从概念上来理解,Ad hoc 网络节点的吞吐量是节点每秒发送到目的节点以 w. h. p 成立的比特数,网络容量是所有节点吞吐量之和。采用数学描述,若存在确定常数 $c_1>c_0>0$,使节点吞吐量 $r(n)$ 满足(1)和(2):

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P(r(n)=c_0 f(n))=1 \quad (1)$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P(r(n)=c_1 f(n))<1 \quad (2)$$

节点吞吐量 $r(n)=O(f(n))$ bps,相应地网络容量 $\lambda(n)=O(nf(n))$ bps。

3 三维球体上的网络容量

3.1 三维球体上的网络模型

我们对经典的无线 Ad hoc 随机网络^[1]做了部分改动,引入 UWB 技术,增加了功率和带宽的约束条件。假定 Ad hoc 网络位于单位面积的球体 S^2 表面, n 个固定节点独立地均匀分布。节点具有相同的传输射程 $r(n)$,彼此在无线信道上通信。目的节点独立随机选择。节点 i 到 j 链路成功传输需满足条件 $|X_k - X_j| \geq (1+\Delta)|X_i - X_j|$,其中 X_i, X_j 和 X_k 分别表示节点 i, j 和 k 的位置, k 是同时传输的干扰节点, Δ 为保

戴沁芸 博士研究生,主要研究方向为无线网络;胡修林 教授,博士生导师,主要研究方向为通信系统;张蕴玉 教授,主要研究方向为信号处理和检测。

护区域。该条件保证接收节点的一定范围内不存在其它发射节点。信号传输的功率损失为 $1/d^\alpha$, d 是信号传输的距离, $\alpha \geq 1$ 是距离损失系数。按照 UWB 模型要求, 每个节点的传输功率 P_i 最大不超过 P_0 。节点控制自己的发射功率并按链路需要自适应调整速率^[6], 传输使用任意大带宽 W , 满足条件 $P_0/N_0W \ll 1$, N_0 是噪声功率谱密度。

在该模型下传输采用码分多址(CDMA)的媒体接入方式(MAC), 这必须要求传输带宽 $W = O(n(n^2 \log n)^{\alpha/2})$ 才是可行的, 分析如下。节点 i 到 j 传输链路的信号干扰比 $\text{SINR} = \frac{P_{ij}g_{ij}}{WN_0 + \sum_{k \in I} P_k g_{kj}}$, $P_{ij} \geq 0$ 是节点 i 到 j 的发射功率, 由假定 $P_i \triangleq \sum_j P_{ij} \leq P_0$, $g_{ij} = 1/|X_i - X_j|^\alpha$ 是功率损失系数, $|X_i - X_j|$ 表示球体表面上节点 i 到 j 的距离, I 是干扰节点的集合。若干扰节点 k 与接收节点 j 的距离非常小 ($|X_k - X_j| \rightarrow 0$), 则 g_{kj} 就很大, 相应地 $\sum_{k \in I} P_k g_{kj}$ 也很大, 此时不能忽略干扰节点的影响。根据文[7]引理 1 可知, 在节点均匀分布的条件下, 单位面积的球体表面上两节点间距大于 $1/(n \sqrt{\log n})$ 以 w. h. p 成立, n 为网络的节点数目。又 $P_k \leq P_0$, $|I| \leq n$, 所以 $g_{kj} = 1/|X_k - X_j|^\alpha \leq (n^2 \log n)^{\alpha/2}$, 这样 $\sum_{k \in I} P_k g_{kj} \leq nP_0 (n^2 \log n)^{\alpha/2}$, 取 $W = O(n(n^2 \log n)^{\alpha/2})$, 则干扰 $\sum_{k \in I} P_k g_{kj}$ 相对噪声 WN_0 可忽略不计。换句话说, 给定 W 的数量级, 节点同时传输引起的相互干扰可忽略不计, 所以将 CDMA 作为 MAC 是合理的。

3.2 三维球体上网络容量的上限

3.2.1 分析思想

在该模型下, 根据 Shannon 容量定理, 每条链路(例如节点 $i \rightarrow j$)的容量 r_{ij} 满足

$$r_{ij} = \lim_{W \rightarrow \infty} W \log(1 + \frac{P_{ij}g_{ij}}{N_0W}) \approx \frac{P_{ij}g_{ij}}{N_0} \quad (3)$$

说明, 虽然传输带宽 $W \rightarrow \infty$, 但链路容量仍然有限, 这主要是传输功率受限的缘故。由式(3)可以得到每条链路上功率和传输速率之间的关系:

$$r_{ij} = P_{ij}g_{ij}/N_0 \Rightarrow P_{ij} = r_{ij}N_0 |X_i - X_j|^\alpha \quad (4)$$

为了推导网络容量的上限, 我们把对每个节点传输功率的限制 ($P_i \leq P_0, i \in n$) 放宽为对整个网络传输功率的控制, 即

$$\sum_{i=1}^n P_i \leq nP_0, P_i \geq 0 \quad (5)$$

源点到目的节点的路由实际是一组链路的集合, 如果我们能够对路由中每条链路进行优化配置且满足方程(5), 就可以使节点吞吐量最大。考虑一源目的节点对 $X_i \rightarrow X_d$, X_i 是源点, X_d 是目的节点, 不妨假定存在两条路由: $R_1 = [X_i^0 X_1^1 X_2^1 \dots X_d^1]$ 和 $R_2 = [X_i^0 X_2^2 X_3^2 \dots X_d^2]$, 其中 $X_1^1, X_2^1, X_3^2, X_4^2$ 等都是路由的中继点, $X_i^0 = X_i^1 = X_i^2 = X_i$, $X_d^1 = X_d^2 = X_d$ 。令 $r_1(n)$ 和 $r_2(n)$ 是各自的传输速率, 由方程(4)得到

$$P(R_1) = r_1(n)N_0 (\sum_{i=0}^k |X_i^1 - X_{i-1}^1|^\alpha) \quad (6)$$

$$P(R_2) = r_2(n)N_0 (\sum_{i=0}^k |X_i^2 - X_{i-1}^2|^\alpha) \quad (7)$$

如果 $\sum_{i=0}^k |X_i^1 - X_{i-1}^1|^\alpha < \sum_{i=0}^k |X_i^2 - X_{i-1}^2|^\alpha$, 在相同功率限制下, 有 $r_1(n) > r_2(n)$ 。如果使源点到目的节点间链路 $\sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^\alpha$ 达到最小, 就能够获得最大的节点吞吐量。当网络中所有源-目的节点对都满足该条件, 且整个网络的路由功率之和 $\sum_i P(R_i) = nP_0$, 那么网络容量便达到最大。相应地, 路由设计可以通过最短路由来实现。用 $r^*(n)$ 表示均匀吞吐量的上限。

3.2.2 路由的最大跳数

在推导 $r^*(n)$ 之前, 首先考虑网络中源-目的节点路由路径上的最大跳数。我们把网络划分为若干个 Voronoi tessellation 小区^[8], 简称 Voronoi 小区或 V 小区。若球体表面 S^2 上存在 n 个节点 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则 Voronoi 小区 $V(a_i)$ 是指在球体表面上最靠近节点 a_i 的点集, 即 $v(a_i) = \{x \in S^2 : |x - a_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - a_j|\}$ 。文[1]已经证明了 Voronoi 小区在球体网络区域的存在性, 这里我们根据 Voronoi 小区 V_n 特性来推导源-目的节点路径上的最大跳数。

球体表面上每个 V 小区至少包含一个节点, 具有如下特性:

- 每个 V 小区包含一个面积为 $(100 \log(n))/n$ 的圆, 相应的半径是 $\rho(n)$;
- 每个 V 小区被一个半径为 $2\rho(n)$ 的圆包含。

根据球体表面圆的性质, 半径为 $\rho(n)$ 的圆, 面积要小于 $\pi\rho^2(n)$, 大于 $\pi\rho^2(n)/2$ 。又由 V 小区特性和半径为 $\rho(n)$ 的圆面积是 $(100 \log(n))/n$, 可推出

$$4\rho(n) \leq \sqrt{\frac{3200 \log(n)}{\pi n}} \quad (8)$$

文[1]将 Vapnik-Chervonenkis (VC) 定理^[9] 运用于 V 小区, 证明

$$P(\sup_{V \in \mathcal{V}_n} |N(V) - 100 \log(n)| \leq 50 \log(n)) > 1 - \frac{50 \log(n)}{n} \quad (9)$$

其中 $N(V)$ 表示小区 V 中节点的数目, n 代表网络中的节点数目。由式(9)可知, 每个 V 小区包含节点数以 w. h. p 满足 $50 \log(n) \leq N(V) \leq 150 \log(n)$ 。

以上述结论为依据, 我们开始推导源-目的节点路由路径上的最大跳数。定义 D_i 是球体表面上源点 X_i 到目的节点 X_d 间的距离, L_i 是每跳长度之和。由三角不等式有 $L_i = \sum_{j=0}^k |X_i^j - X_{j+1}^j| \geq |X_i^0 - X_d^1| = D_i$ 。

引理 1 源点到目的节点路径上的最大跳数为 $(c_1 \log(n) + c_2 L_i \sqrt{n \log(n)})$, 这里 c_1, c_2 均为常数, L_i 是路由路径每跳长度之和, n 是网络中的节点数目。

证明: 网络中任意源点 X_i 发送数据沿着相应的优化路由 R_i^* 到达目的节点。定义一个区域 $C(R_i^*) \subset S^2$, $C(R_i^*)$ 表示路由 R_i^* 周围的区域。若 Y 和 Z 都是 S^2 上的点, 那么 $Y \in C(R_i^*)$ 当且仅当 $\exists Z \in R_i^*$ 使 $|Y - Z| \leq 4\rho(n)$ 。因此与路由 R_i^* 相交的所有 V 小区都包含在 $C(R_i^*)$ 中。这样, 路由 R_i^* 中每条链路周围的区域是一个长方形, 它的宽度为 $4\rho(n)$, 长度为相应链路两节点间的距离 $|X_i^j - X_{j+1}^j|$ 。此外, 在路由边缘还包含 2 个半圆区域, 半径为 $4\rho(n)$, 如图 1。

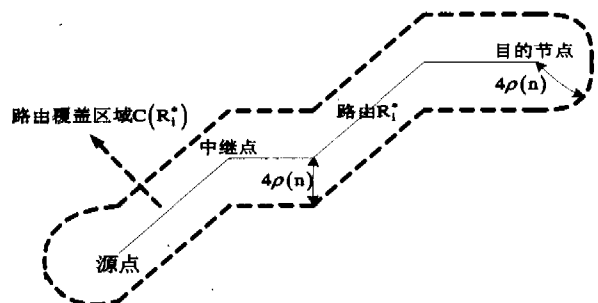


图 1. $C(R_i^*)$ 区域覆盖示意图

由图 1 可知, $C(R_i^*)$ 的覆盖区域面积为:

$$\text{Area}(C(R_i^*)) \leq \frac{3200 \log(n)}{n} + 2\sqrt{\frac{3200 \log(n)}{\pi n}} L_i \quad (10)$$

又一个 V 小区至少占有的区域面积是 $(100\log(n))/n$, 所以 $C(R_i^*)$ 覆盖区域中最多包含小区数目 N_{\max} 为

$$N_{\max} \leq \frac{\text{Area}(C(R_i^*))}{V \text{ 小区至少占有的面积区域}} \leq 32 + \frac{16L_i \sqrt{n}}{10\sqrt{\pi} \sqrt{\log(n)}} \quad (11)$$

由方程(9)可知, 一个 V 小区存在最多的节点数目是 $150\log(n)$ 以 w. h. p 成立, 所以在源点到目的节点的路径 R_i^* 上最多可能的节点数目 N_{\max}^{nodes} (也是路由上最大可能的跳数) 是:

$$N_{\max}^{\text{nodes}} \leq (150\log(n)) \times (N_{\max}) \leq (c_1 \log(n) + c_2 L_i \sqrt{n \log(n)}) \quad (12)$$

3.2.3 吞吐容量的上限

根据上述分析, 我们有

$$P(R_i^*) = r^\mu(n) N_0 \sum_{j=0}^k |X_j^i - X_{j-1}^i|^\alpha \quad (13)$$

不妨令 $Q(X_j^i) = |X_j^i - X_{j-1}^i|^\alpha, j \in [0, k]$, 因为 $\alpha \geq 1$, 所以函数 $Q(x_i)$ 是在 $(X_0^i, X_1^i, X_2^i, \dots, X_k^i)$ 上的凸函数。由凸函数性质, 对每个 $X_j^i, X_j^i \in (X_0^i, X_1^i, X_2^i, \dots, X_k^i)$ 在 $0 \leq \mu \leq 1$ 时, 有

$$Q(\mu X_j^i + (1-\mu) X_j^i) \leq \mu Q(X_j^i) + (1-\mu) Q(X_j^i) \quad (14)$$

当且仅当 $\mu=0$ 和 $\mu=1$ 时等号成立。所以方程(13)有:

$$P(R_i^*) = r^\mu(n) N_0 \sum_{j=0}^k |X_j^i - X_{j-1}^i|^\alpha \geq r^\mu(n) N_0 N_{\max}^{\text{nodes}} \left(\frac{L_i}{N_{\max}^{\text{nodes}}}\right)^\alpha \geq r(n) N_0 \frac{L_i^\alpha}{(c_1 \log n + c_2 L_i \sqrt{n \log n})^{\alpha-1}} = r(n) N_0 f(L_i) \quad (15)$$

这里定义 $f(L_i) \triangleq \frac{L_i^\alpha}{(c_1 \log n + c_2 L_i \sqrt{n \log n})^{\alpha-1}}$, 且 $r(n) \geq r^\mu(n)$ 。因为要控制整个网络传输功率低于 nP_0 , 所以每条路由 R_i^* 功率的期望都不能超过 P_0 :

$$P_0 \geq EP(R_i^*) \geq r(n) N_0 Ef(L_i) \geq r(n) N_0 Ef(D_i) \geq r(n) N_0 P(D_i \geq \epsilon) E(f(D_i) | D_i \geq \epsilon) \quad (16)$$

又节点在球体表面上均匀分布, 根据文[7]中引理 1 可知, 源点与目的节点间的距离大于 ϵ 的概率小于 $(1-\epsilon^2)$, 因此方程(16)为:

$$P_0 \geq r(n) N_0 (1-\epsilon^2) E(f(D_i) | D_i \geq \epsilon) \quad (17)$$

且在 $D_i \geq \epsilon$ 条件下, 方程 $f(D_i)$ 中分母 $c_2 D_i \sqrt{n \log n}$ 占主导地位, 有

$$P_0 \geq r(n) N_0 (1-\epsilon^2) E(f(D_i) | D_i \geq \epsilon) \geq r(n) N_0 \left(\frac{c_3 E(D_i)}{\sqrt{n \log(n)}}\right)^{\alpha-1} \quad (18)$$

其中 $E(D_i), P_0, N_0, c_3$ 均为常数, 所以由方程(18)推出 $r(n) \leq c_4 P_0 (n \log(n))^{(\alpha-1)/2}$, 即 $r^\mu(n) = O((n \log(n))^{(\alpha-1)/2})$, 相应的网络容量上限是:

$$\lambda(n) = nr^\mu(n) = O(n \log(n))^{(\alpha-1)/2}$$

4 二维平面上的网络容量

这部分我们将 3.1 节构造的网络模型放置到二维平面上, 利用渗透理论^[10] 推导超宽带下无线 Ad hoc 网络在二维平面上的容量极限。

4.1 渗透理论与无线网络

渗透理论(percolation theory)最初源于如下问题: 水从多孔石头的一边流入, 从另一边流出的可能性有多大。把石头看作由若干个格型组成的正方形模型, 格型每边若能让水通

过, 称该边为开边, 否则为闭边。每条边的开与闭都相互独立, 是开边的概率为 p , 闭边的概率 $1-p$ 。根据渗透理论, 若 $p > 1/2$, 则水从石头一边流入、另一边流出的概率是 1。把水从一边流入另一边流出所经过的边的集合称为路径。将渗透理论运用于随机网络, 随机网络中的节点看作渗透理论的开边, 这些开边组成无线网络的传输路径。我们将网络区域分割为若干个格形, 每个格形的边长是 c_0/\sqrt{n} , n 是网络中的节点数目, 如图 2。由渗透理论可知, 改变常数 c_0 , 可以调整格型中存在至少一个节点的概率:

$$p(\text{格形中至少包含一个节点}) = 1 - e^{-\frac{c_0^2}{c_0}} = p \quad (19)$$

若格型包含至少一个节点, 称格型为开, 否则为闭。两个格型共享一条边或顶点, 称这两个格型相邻。每个格型都存在 8 个相邻的格型(除了正方形边缘的格型)。例如格型 (i, i) , 其相邻格型有 $(i-1, i-1), (i-1, i), (i-1, i+1), (i, i-1), (i, i+1), (i+1, i-1), (i+1, i), (i+1, i+1)$ 。我们定义路径是一组有序格型, 其中前后格型彼此相邻, 且每个格型仅出现一次。若路径包含的所有格型都是开的, 称该路径为开。路由是从源点到目的节点的一组节点。

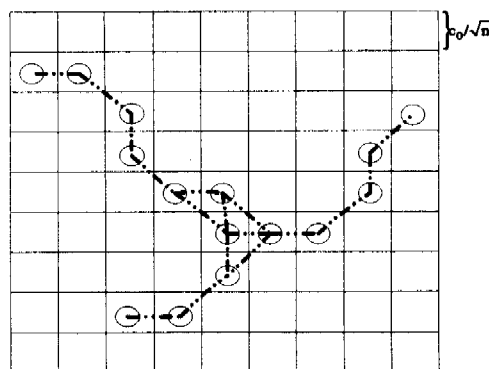


图 2 随机网络示意图, 其中的虚线表示所有可能的开链路

从源点所在格型到目的节点所在格型, 其路由是从路径中的每个格型中选择一个节点, 这样每一跳的最大长度是 $2\sqrt{2}c_0/\sqrt{n}$ 。如果网络中不存在开路径, 则源点到目的节点上的任何路由必然存在一跳, 其长度是 c_0/\sqrt{n} 。为了推导网络容量的上限, 我们给出渗透理论中的两个引理。证明过程见文[10]。

引理 2 令 p 表示随机网络格型为开的概率, 即格型中存在至少一个节点的概率(如图 2)。 $N(m)$ 是从源点出发存在长度为 m 的开路径数目, 有

$$p(N(m) \geq 1) \leq \frac{8}{7} (7p)^m \quad (20)$$

该引理说明在 $p < 1/7$, 源点与目的节点间距无穷大时 $(m \rightarrow \infty)$, 它们之间以 w. h. p 不存在开路径。

引理 3 令 A 表示事件从源点到目的节点存在长度为 m 的开路径, F_A 是为了让事件 A 发生, 需要将闭格转换为开格的最小数目, 有

$$P_p(A) \geq \left(\frac{p-p'}{1-p'}\right) P_{p'}(F_A \leq r) \quad (21)$$

其中 $0 < p' < p < 1, P_p$ 和 $P_{p'}$ 是开格概率为 p 和 p' 的概率测度。

4.2 吞吐容量的上限

在推导网络容量的过程中, 将用到以下 2 个引理。

引理 4 单位区域内 n 个节点均匀分布, 若源-目的节点

对间距 $D_i \geq \epsilon > 0$, 则随 $n \rightarrow \infty$ 有

$$P\left(\sum_{i=0}^k Q(X_i) = \sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a > c_1 n^{(1-a)/2}\right) \geq 1 - \frac{8}{7} \cdot \exp(-c_2 \sqrt{n}) \quad (22)$$

其中常数 c_1 和 c_2 大于零。

证明: 源点与目的节点的通路包含了与路由相交的所有格型。通过整理, 去除一些不必要的格型, 构成一条路径。我们把包含闭格最少的路径定义为优化路径 R_i^* 。如前所述, 因为路由过程每一跳的最大长度是 $2\sqrt{2}c_0/\sqrt{n}$, 所以 R_i^* 的路径长度至少是 $m = D_i / (2\sqrt{2}c_0/\sqrt{n}) \triangleq c_3 \sqrt{n}$, 这里 $c_3 = D_i / 2\sqrt{2}c_0$ 为常数。也就是说, 在优化路径 R_i^* 中最多存在的闭格数目是 $c_3 \sqrt{n}$ 。如果是这样, 仅需将 $c_3 \sqrt{n}$ 个闭格转化为开格, 形成从源点到目的节点路径长度为 m 的开路径。由引理 3, 令 A 是从源点到目的节点长度为 m 的开路径事件, F_A 是闭格的最小数目, 为了让 A 发生, 需将 R_i^* 中最多包含的 $c_3 \sqrt{n}$ 个闭格转化为开格。由式(21)可知:

$$P_p'(F_A \leq c_3 \sqrt{n}) \leq P_p(A) \left(\frac{p-p'}{1-p'}\right)^{-c_3 \sqrt{n}} \quad (23)$$

$$\text{再由引理 2 得到 } P_p(A) \leq \frac{8}{7} \cdot (7p)^m = \frac{8}{7} \cdot (7p)^{c_3 \sqrt{n}}.$$

选择 c_0 使 $p = 1 - e^{-2} < \frac{1}{7}$ 。再令 $k > 1/p$ 使 $p' = \frac{kp-1}{k-1} < p$, 则式(23)变为:

$$P_p'(F_A \leq c_3 \sqrt{n}) \leq \frac{8}{7} \cdot (7p)^{D_i \sqrt{n} / 2\sqrt{2}c_0} k^{c_3 \sqrt{n}} = \frac{8}{7} \cdot \exp\left(\sqrt{n} \left(\frac{D_i \log(7p)}{2\sqrt{2}c_0} + c_3 \log k\right)\right) \quad (24)$$

若 $0 < c_3 < -\frac{\epsilon \log(7p)}{2\sqrt{2}c_0 \log k} < -\frac{D_i \log(7p)}{2\sqrt{2}c_0 \log k}$, 有

$$P_p'(F_A \leq c_3 \sqrt{n}) \leq \frac{8}{7} \cdot \exp(-c_2 \sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (25)$$

其中 $c_2 = -\frac{\epsilon \log(7p)}{2\sqrt{2}c_0} - c_3 \log k > 0$ 。如果把格型尺寸定为 c'_0/\sqrt{n} , 相应地 $p' = 1 - e^{-2}$, 其优化路径 R_i^* 包含闭格超过 $c_3 \sqrt{n}$ 的概率至少是 $p_1 \triangleq 1 - \frac{8}{7} \exp(-c_2 \sqrt{n})$ 。不失一般性, 选用最短距离路由的方法传输数据。由渗透理论可知, 源点到目的节点的路由上至少存在一条链路, 其长度为 c'_0/\sqrt{n} , 它与优化路径 R_i^* 相交。为了推导容量上限, 我们假定每条链路最多与一个格型相交。若路由上每条链路与 R_i^* 的 $j (j > 1)$ 个闭格相交, 则该链路长度至少是 jc'_0/\sqrt{n} 。根据 3.2.1 节的分析, 把前种情况定义为 R_1 , 后者为 R_2 , 这样有 $\sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a < \sum_{i=0}^k |X_2 - X_1^{-1}|^a$ 。在相同功率限制下, 有 $r_1(n) > r_2(n)$ 。换句话说, 该假定可以使 $\sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a$ 达到最小, 获得最大的网络吞吐量。这样, 每条链路的长度为 c'_0/\sqrt{n} , 而路由上至少有 $c_3 \sqrt{n}$ 个链路。这样, $\sum_{i=0}^k Q(X_i) = \sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a > c_3 \sqrt{n} \cdot (c'_0/\sqrt{n})^a = c_3 c'_0^a n^{(1-a)/2}$, 其概率为 p_1 , 这样得到式(22)。证毕。

引理 5 渗透理论中证明了: ①域中节点数目在 $n/2$ 与 $2n$ 之间以 w. h. p 成立; ②按给定路由方案, 源点与目的节点间距大于 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 的源-目的节点对的数目为 $n/8$ 以 w. h. p 成立(证明过程见文[10])。

以下开始推导网络容量的上限。令 J 表示源点与目的节

点间距至少是 ϵ 的路由集合。按引理 5, $n/8 \leq |J| \leq 2n$ 以 w. h. p 成立。将 J 与所有路由结合, 根据式(13)得到

$$\sum_{i \in J} P(R_i^*) = \sum_{i \in J} r(n) N_0 \sum_{j=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a \leq \sum_{i \in J} r^a(n) N_0 \sum_{j=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a \quad (26)$$

引理 1 说明存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使 $P\left(\sum_{i=0}^k Q(X_i) = \sum_{i=0}^k |X_i - X_{i-1}|^a \leq c_1 n^{(1-a)/2}\right) \leq \frac{8}{7} \cdot \exp(-c_2 \sqrt{n})$ 。不失一般性, 可以假定 $|J| \leq 2n$, 这样 J 中最多存在 $2n$ 种路由的可能, 所以

$$P(\exists i \in J, \sum_{i=0}^k Q(X_i) \leq c_1 n^{(1-a)/2}) \leq 2n \cdot \frac{8}{7} \exp(-c_2 \sqrt{n}) \quad (27)$$

不等式右边方程在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛至 0。又 $|J| \geq n/8$, 所以至少存在 $n/8$ 个路由, 相应的 $\sum_{i=0}^k Q(X_i)$ 大于 $c_1 n^{(1-a)/2}$ 以 w. h. p 成立。按照引理 5 和模型假定, 网络中总的传输功率最大为 $2nP_0$ 。把结果代入方程(26), 则

$$r(n) \leq \frac{2W_0}{N_0 c_1 n^{(1-a)/2} / 8} = c_4 n^{(a-1)/2} = r^a(n)$$

相应的网络容量上限是 $\lambda(n) = nr^a(n) = O(n \cdot n^{(a-1)/2})$ 。

小结 本文研究了 UWB 技术下无线 Ad hoc 网络容量的性能, 在第 3 部分运用图论中 Voronoi 小区特性分析了三维球体表面上网络容量的上限, 第 4 部分采用渗透理论分析了二维平面上网络容量的上限。虽然三维与二维网络的容量极限不同, 但都具有共同的趋势, 即网络容量的上限会随着网络节点数目的增加而增大, 这与经典的 Gupta 结论(见文[1])不同。这一方面说明物理层设计不同对网络性能会产生很大影响, 另一方面也表明 UWB 技术是提高 Ad hoc 网络容量的有效手段。本文结论可针对以下两种实际应用:

1) 超宽带系统。带宽达到 GHz 级, 如 IEEE 802.15.3 标准^[4]。如本文所建模型, 带宽 $W \rightarrow \infty$, 同时功率限制为 P_0 , 满足 $P_0/N_0W < 1$, 目前这类系统正考虑投入商用。

2) 传感器网络。该网络带宽在 MHz 级或更小, 使用非常低的传输功率 $P_0 \rightarrow 1$, 延长了电池使用寿命, 且满足 $P_0/N_0W < 1$ 。该网络被希望同时应用于军用和商用。

目前无线 Ad hoc 网络尚未进入实用阶段, 其网络容量很值得探讨。本文对超宽带下无线 Ad hoc 网络容量进行了定性及定量的分析, 为未来网络的建立提供了理论依据。

参考文献

- Gupta P, Kumar P R. The capacity of wireless networks [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 3(46): 388~404
- Mathias G, Tse D N C. Mobility increases the capacity of ad hoc wireless networks [J]. IEEE/ACM Transaction on Networking, 2002, 6(3): 1577~1586
- Yi S, Pei Y, Kalyanaraman S. On the capacity improvement of ad hoc wireless networks using directional antennas [A]. In: ACM MobiHoc'03 [C]. Maryland, June 2003. 108~116
- IEEE 802.15 WPAN High Rate Alternative PHY Task Group 3a [S]. Internet draft, <http://grouper.ieee.org/groups/802/15/pub/TG3a.html>
- Knuth D E. The art of computer programming [M]. MA: Addison-Wesley, 1997
- Negi R, Cioffi J. Delay-constrained capacity with causal feedback [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 9(48): 2478~2494
- Negi R, Rajeswaran A. Capacity of power constrained ad-hoc network [A]. IEEE INFOCOM'04 [C], Hong Kong, Mar 2004
- Okabe A, Boots B, Sugihara K. Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams [M]. New York: Wiley, 1992
- Vapnik V N. Statistical Learning Theory [M]. John Wiley & sons, 1998
- Geoffrey G. Percolation [M]. Springer, 1998