基于提升框架的 M 通道小波滤波器的构造*)

林椹尠[1,2]　薛　文[3]　宋国乡[1]
(西安电子科技大学理学院数学系　西安 710071)[1]　(西安邮电学院数理系　西安 710061)[2]
(西安政治学院教育技术中心　西安 710068)[3]

摘　要　提升框架的核心思想是通过有限步预测和更新来构造小波滤波器。由于小波的多相位矩阵可以分解为多个矩阵的乘积，因此这些矩阵可以被看作是预测算子和更新算子。本文根据 M 通道小波变换理论，给出了基于提升框架下的 M 通道小波变换所对应的滤波器库的构造方法。与传统的方法不同，利用提升框架构造的任何滤波器库都自动满足精确重构性，所设计的预测滤波器满足 $\tilde{N}$ 阶对偶消失矩，所设计的更新滤波器满足 N 阶基本消失矩，并给出了具体例子。

关键词　M 通道小波变换，提升框架，小波滤波器

Construction of M-Channels Wavelet Filters By Lefting Scheme

LIN Zhen-Xian[1,2]　XUE Wen[3]　SONG Guo-Xiang[1]
(Xidian University, Xi'an 710071)[1]　(Xi'an Posts and Telecommunications Institute, Xi'an 710061)[2]
(Xi'an Politics College, Xi'an 710068)[3]

Abstract　The key idea of the lifting scheme is to construct wavelet filters by several predict operators and update operators. As we know that the polyphase matrix can be factored into finite matrixes, which can be regarded as the predict operators and update operators. According to the theory of M-channels wavelet transform, the construction of the M-channels wavelet filters based on the lifting scheme is given in this paper. It's different to the traditional method. Any filters based on the lefting scheme are automatically satisfied with the exact reconstruction condition. The constructed predict filters are satisfied with $\tilde{N}$ dual vanishing moments and the constructed update filters are satisfied with N basis vanishing moments. Some examples are given.

Keywords　M-channels wavelet transform, Lifting scheme, Wavelet filters

1　引言

1995 年，Sweldens 提出了一种基于空间域的小波构造方法——提升(lifting scheme)方法[1]。它成为构造第二代小波的基本工具，使我们能够用一种简单的方法去解释小波的基本理论，因此受到新一代静止图像压缩标准 JPEG 2000[2] 的推荐。

2 通道小波变换已经在许多领域得到了广泛应用。但在实数域 2 通道小波变换中，低通滤波器以及相应的尺度函数不能同时拥有有限冲激响应或紧支集、正交性、高阶消失矩、线性相位或对称性以及插值性，而这些性质对于离散小波变换的实现非常重要。

本文在 M 通道小波变换的理论基础上，给出了基于提升框架下的 M 通道小波变换所对应的滤波器库的构造方法。与传统的方法不同，利用提升框架构造的任何滤波器库都自动满足精确重构性，所设计的预测滤波器满足 $\tilde{N}$ 阶对偶消失矩，所设计的更新滤波器满足 N 阶基本消失矩。

2　M 通道小波变换与提升框架

2.1　传统的 M 通道双正交小波变换

设 M 通道双正交小波变换的尺度方程分别为：

$$\varphi(x)=\sum_{k\in z}h_k\varphi(Mx-k)$$
$$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{k\in z}\tilde{h}_k\tilde{\varphi}(Mx-k)$$

其中 h_k、$\tilde{h}_k$ 构成滤波器 H、$\tilde{H}$ 的脉冲响应，且 $\langle\varphi_{j,k},\tilde{\varphi}_{j,k}\rangle=\delta_{k-k'}$。

$\varphi(x)$、$\tilde{\varphi}(x)$ 的伸缩平移分别定义为：

$$\varphi_{j,k}(x)=M^{j/2}\varphi(M^jx-k)$$
$$\tilde{\varphi}_{j,k}(x)=M^{j/2}\tilde{\varphi}(M^jx-k)$$

对应的 $M-1$ 个双正交小波函数分别为：

$$\Psi_i(x)=\sum_{k\in z}g_{i,k}\varphi_i(Mx-k)$$
$$\tilde{\Psi}(x)=\sum_{k\in z}\tilde{g}_{i,k}\tilde{\varphi}_i(Mx-k),1\leqslant i\leqslant M-1$$

其中 $g_{i,k}$、$\tilde{g}_{i,k}$ 构成滤波器 G、$\tilde{G}$ 的脉冲响应。它们的伸缩平移为：

$$\Psi_{i,j,k}(x)=M^{j/2}\varphi_i(M^jx-k)$$
$$\tilde{\psi}_{i,j,k}(x)=M^{j/2}\tilde{\varphi}_i(M^jx-k),j,k\in z$$

且构成 $L^2(R)$ 的无条件基及满足双正交关系。

对于信号 $f(x)\in L^2(R)$，利用 M 通道双正交小波变换可以分解为：

$$f(x)=\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z}\langle\tilde{\varphi}_{j,k}(x),f(x)\rangle\varphi_{i,k}(x)+\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z}\sum_{i=0}^{M-1}\langle\tilde{\psi}_{i,j,k}(x),f(x)\rangle\psi_{i,j,k}(x)$$

也就是说，M 通道小波变换就是对每个子带再重新进行 M 尺

*)论文得到总装预研基金资助(项目编号：51487020203DZ0103)。林椹尠　博士研究生，副教授，主要研究方向为：小波理论及其在信号、图像方面的应用；宋国乡　博士生导师，主要研究方向：小波理论及其应用；薛　文　讲师，主要研究方向：人工智能、图像处理、多媒体技术。

度的细分过程[3]。小波变换过程可以设计成多通道滤波器结构，即子带滤波器。

2.2 提升框架

提升框架给出了双正交小波简单有效的构造方法，它通过使用多项式插值法来获得信号的高频分量，构建尺度函数获得信号的低频分量，主要包括分割、预测、更新三个步骤。即提升框架把一个离散序列分解为偶数序列和奇数序列，用偶数序列去预测奇数序列，再用奇数序列的真实值和预测值的偏差去修正偶数序列。经过有限步更新和预测，最后的偶数序列为尺度系数，奇数序列为小波系数。尺度系数和小波系数经过有限步反预测和反更新，然后合并奇偶序列，得到完全重构原始信号。我们也可以用奇数序列去修正偶数序列，再用偶数序列去预测奇数序列，然后重复进行，最后偶数序列为轮廓信号，奇数序列为细节信号。轮廓信号和细节信号依次经过有限步的反预测和反更新，合并奇偶序列，得到完全重构的原始信号。

3 基于提升框架的 M 通道小波滤波器的构造

3.1 插值滤波器与 Neville 滤波器

定义 1(插值滤波器)　若脉冲响应满足 $h_{Mk}=\delta_k, k\in Z$，则称滤波器 H 是插值滤波器。

对于 2 通道插值滤波器，$h_{2k}=\delta_k, k\in Z$，这意味着滤波器的偶数下标系数除 0 之外都为 0，这种滤波器也称为半带滤波器。对于一般插值滤波器则意味着滤波器在第 0 个陪集(Mz)中除原点以外的所有位置上的系数都为 0。若信号在向上采样之后在与插值滤波器作用，则原采样位置上的值保持不变，而新采样位置上的值是原采样位置上的值的线性组合。若滤波器的 z-变换能表示为：

$$H(z)=1+\sum_{i=1}^{M-1} z^{t_i} P_i(z^M)$$

则滤波器是插值的。其中 t_i 是陪集代表元。这种滤波器称为 M 带滤波器。

定义 2(Neville 滤波器[4])　若 $P\pi(Z)=\pi(Z+\tau)\quad \tau\in \Pi_N$，其中 τ 不一定是整数，则称 P 是一个平移参数为 $\tau\in R$ 的 N 阶 Neville 滤波器。

Neville 滤波器是利用提升技术构造滤波器库和小波的关键。Neville 滤波器的构造等价于求解一个 $N\times N$ 的线性系统。在一维情形下，该系统是一个 Vandermonde 矩阵，因此总是可逆的。

3.2 提升框架下的 M 通道插值滤波器库的构造

3.2.1 2 通道插值滤波器库的构造

为了叙述简便，首先考虑 2 通道滤波器库。设有两个分析滤波器 $\tilde{H}$(低通)和 $\tilde{G}$(高通)以及两个合成滤波器 H(低通)和 G(高通)[5,6]。令

$$H=(\downarrow 2)H, G=(\downarrow 2)G, \tilde{H}=(\downarrow 2)\tilde{H}, \tilde{G}=(\downarrow 2)\tilde{G},$$

$$H^*=(\downarrow 2)H^*$$

则精确重构条件为：

$$H^*\tilde{H}+G^*\tilde{G}=1, \tilde{H}H^*=1, \tilde{H}G^*=0, \tilde{G}H^*=0, \tilde{G}G^*=1 \quad (1)$$

令滤波器库具有 N 阶基本消失矩和 $\tilde{N}$ 阶对偶消失矩，则有：

$$G\pi=0, \pi\in \Pi_N, \tilde{G}\pi=0, \pi\in \Pi_{\tilde{N}} \quad (2)$$

而要构造的滤波器库必须满足 3 个性质：PR(精确重构条件)，即(1)式；DM(对偶消失矩)，即(2)式；PM(基本消失矩)，即(2)式。

已有的构造满足上面 3 个条件的滤波器库的方法一般都是试图一次同时满足这些条件，这增加了代数条件的复杂性，而提升的主要特点是分别满足每个条件。首先，利用提升构造的任何滤波器库都自动满足精确重构条件。一般是从一个平凡的滤波器库出发构造出一个新的滤波器库，然后利用几步提升改进它的性质。这里的构造只需要两步提升：第一步提升也称为预测，保证满足 DM 条件；第二步提升又称为更新，保证 PM 条件成立。每一步提升可以独立设计。这里开始提升所用的平凡滤波器库为多相位变换，它将信号分成偶数下标项和奇数下标项两组。这种非时不变滤波器库(出于下采样)在多相位域中变成时不变滤波器库。在第一步提升中，用预测滤波器 P 由偶数下标项预测奇数下标采样，偶数下标项保持不变，从实际的奇数下标项中减去预测滤波器作用于偶数下标项得到的奇数下标预测值，产生高通或小波系数。在第二步提升中，利用更新滤波器 U，基于前一步中计算出来的高通或小波系数来修正偶数下标项。设计更新滤波器 U 时要求满足 PM 条件。

设多相位矩阵为：

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\tilde{H}_e & \tilde{H}_o\\ \tilde{G}_e & \tilde{G}_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-UP & U\\ -P & 1\end{bmatrix} \quad (3)$$

其伴随逆矩阵为：

$$\Lambda^{*^{-1}}=\begin{bmatrix}H_e & H_o\\ G_e & G_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & P^*\\ -U^* & 1-U^*P^*\end{bmatrix}$$

由多相位分解得到滤波器 H 为：

$$H(z)=H_e(z^2)+z^t H_o(z^2)$$

显然，$H_e(z)=1$，因此 H 是插值的。此时 DM 条件变为：$\tilde{G}\pi(Z)=\tilde{G}_e\pi(2Z)+\tilde{G}_o\pi(2Z+t)=0$ 将多相位矩阵(3)中的相应值代入，即得 $P\pi(2Z)=\pi(2Z+t)$ (4)

假设(4)式对于所有 $\pi\in \Pi_{\tilde{N}}$ 都必须成立，则有：

$$P\pi(2Z)=\pi(Z+2^{-1}t), \pi\in \Pi_{\tilde{N}}$$

因此，要满足 DM 条件，P 必须是一个平移参数为 $\tau=2^{-1}t$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器。如果输入一个次数小于 $\tilde{N}$ 的多项式序列，则所有高通系数必须为 0，才能使高通系数有 $\tilde{N}$ 阶零矩，这表明预测总是准确的。因此预测滤波器作用于在“偶数”网格 $2Z$ 上采样的多项式序列得到的结果一定是同一个多项式在“奇数”网格 $2Z+t$ 上的采样，这就是方程(4)的含义。

类似地，要满足 PM 条件，必有

$$G\pi(Z)=G_e\pi(2Z)+G_o\pi(2Z+t)=-U^*\pi(2Z)+(1-U^*P^*)\pi(2Z+t)=0$$

若 $N\leqslant\tilde{N}$，则有：

$$-U^*\pi(2Z)+\pi(2Z+t)-U^*\pi(2Z)=0, \pi\in \Pi_N \text{ 或者 } 2U^*\pi(2Z)=\pi(2Z+t)$$

因此，$2U$ 是一个平移参数为 $-\tau=-2^{-1}t$ 的 N 阶 Neville 滤波器。对于 U 的一个自然的选择是 N 阶预测滤波器的伴随除以 2，即有下面的定理 1。

定理 1[4]　设 $N\leqslant\tilde{N}$，则可以构造具有 N 阶基本消失矩和 $\tilde{N}$ 阶对偶消失矩的滤波器库，其中预测滤波器是一个平移参数为 $\tau=2^{-1}t$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器，并选择更新滤波器是平移参数为 τ 的 N 阶 Neville 滤波器的伴随除以 2。

预测滤波器和 Neville 滤波器之间的关系是直观的，但更新滤波器却不直观。更新算子的作用是将“偶数”采样转换为低通采样，使其均值与原始序列的均值相同。两个数的均值总是等于一个数加上两个数之差的一半，因此更新滤波器中有因子 1/2。为了对高次多项式有同样的效果，需要 Neville 滤波器。由于“奇数”网格 $MZ+t$ 可以由“偶数”网格 MZ 相对平移 $-\tau$ 得到，因此自然需要 Neville 滤波器的伴随滤波器。

3.2.2 M 通道插值滤波器库的构造

现在考虑 M 通道插值滤波器库。整数集有 $M-1$ 个陪集，形如 $MZ+t_i, t_i=i(0\leqslant i<M)$；有 M 个多相位成分，用下标 0－$(M-1)$ 表示，即 $H(z)=\sum_{i=0}^{M-1} z^{-t_i} H_i(z^M)$。对第 i 个通道 $(1\leqslant i\leqslant M-1)$ 做两步提升：一步预测 (P_i) 和一步更新 (U_i)。第 i 个预测器根据第 0 个陪集中的元素（原采样网格）来预测第 i 个陪集。这时多相位矩阵是一个 $M\times M$ 矩阵，即

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 1-\sum_{i=1}^{M-1}U_iP_i & U_1 & U_2 & \cdots & U_{M-1} \\ -P_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -P_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{M-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

伴随的逆为

$$\Lambda^{*-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & P_1^* & P_2^* & \cdots & P_{M-1}^* \\ -U_1^* & 1-U_1^*P_1^* & -U_1^*P_2^* & \cdots & -U_1^*P_{M-1}^* \\ -U_2^* & -U_2^*P_1^* & 1-U_2^*P_2^* & \cdots & -U_2^*P_{M-1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -U_{M-1}^* & -U_{M-1}^*P_1^* & -U_{M-1}^*P_2^* & \cdots & 1-U_{M-1}^*P_{M-1}^* \end{pmatrix}$$

对偶消失矩条件 DM 为：

$$\tilde{G}_j\pi(Z)=\tilde{G}_{j,0}\pi(Z)+\sum_{i=1}^{M-1}\tilde{G}_{j,i}\pi(Z+t_i)=0$$

将多相位矩阵 P 的第 j 行中的响应值代入上面方程，即得：

$$P_j\pi(MZ)=\pi(MZ+t_j), j=1,2,\cdots,M-1$$

这表明 P_j 是平移参数为 $\tau_j=M^{-1}t_j$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器。

基本消失矩条件 PM 为：

$$-U_j^*\pi(MZ)-\sum_{i=1}^{M-1}U_j^*P_i^*\pi(MZ+t_i)+\pi(MZ+t_j)=0,$$

$$\pi\in\amalg_N, j=1,2,\cdots,M-1$$

由 DM 条件已知 P_j 是平移参数为 $\tau_j=M^{-1}t_j$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器，若 $N\leqslant\tilde{N}$，则上式简化为：$MU_j^*\pi(MZ)=\pi(MZ+t_j)$，$j=1,2,\cdots,M-1$ 因此 MU_j^* 是平移参数为 τ_j 的 N 阶 Neville 滤波器，即有下面的定理 2。

定理 2[4] 设 $N\leqslant\tilde{N}$，则可以构造具有 N 阶基本消失矩和 $\tilde{N}$ 阶对偶消失矩的滤波器库，其中预测滤波器是一个平移参数为 $\tau_j=M^{-1}t_j$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器，并选择修正滤波器是平移参数为 $-\tau_j$ 的 N 阶 Neville 滤波器的伴随除以 M。

由定理知，预测滤波器是平移参数为 $\tau_j=M^{-1}t_j$ 的 $\tilde{N}$ 阶 Neville 滤波器 $P_j^{\tilde{N}}$，更新滤波器 $U_j=P_j^{N^*}/M$ 是平移参数为 $-\tau_j=-M^{-1}t_j$ 的 N 阶 Neville 滤波器 $P_j^{N^*}$ 的 $1/M$ 倍，U 本身并不是 Neville 滤波器。

4 M 通道插值滤波器库的例子

4.1 2 通道插值滤波器库的例子

(1) Haar 小波，$N=\tilde{N}=1$。需要最简单的预测滤波器和更新滤波器：$P(z)=1, U(z)=1/2$。从而 $H(z)=1+z^{-1}$，$G(z)=-1/2+z^{-1}/2$，这是非规范化 Haar 滤波器库[5]。

(2) 高阶一维滤波器库。预测和更新滤波器分别为表 1 中的 P^4 和 $P^{2^*}/2$，由定理 1 得：

$$P(z)=P^4(z)=(-z+9+9z^{-1}-z^{-2})/16$$

$$U(z)=1/2P^{2^*}(z)=(z+1)/4$$

$$\tilde{H}(z)=\tilde{H}_e(z^2)+z^{-1}\tilde{H}_o(z^2)=(1+z^{-1})^2(z^4-2z^3-5z^2+28z-5-2z^{-1}+z^{-2})/64$$

$$H^*(z)=-(1+z^{-1})^4(z^3-4z^2+z)/16$$

$\tilde{H}(z)$ 和 $H^*(z)$ 的因式分解说明有 2 阶基本消失矩和 4 阶对偶消失矩，同时基本/合成低通滤波器 H^* 是插值的[7]。

4.2 M 通道插值滤波器库的例子

陪集代表元为 $t_i=i(0\leqslant i<M)$，相应的平移参数为 $\tau_i=i/M$，因此 P_i 是平移参数为 $\tau_i=i/M$ 的 Neville 滤波器。因为 $\tau_i=1-\tau_{M-i}$，所以 $P_i(z)=zP_{M-i}(z^{-1})$。表 1 和表 2 给出了 3 通道和 4 通道的预测滤波器。

由表 1 中取 $N=2$ 的 Neville 滤波器，则得到一组 3 通道插值滤波器库，分析与综合滤波器都具有 2 阶消失矩，滤波器如下：

$$\tilde{h}_0=(-4z^3+3z^2+17+6z^{-1}-4z^{-3}+6z^{-5}+3z^{-8})/3^3$$

$$\tilde{h}_1=(-2+3z^{-1}-z^{-3})/3,$$

$$\tilde{h}_2=(-2z^3-z^6+3z^{-8})/3$$

$$h_0=(z^2+3+2z^{-1}+2z^{-5}+z^{-8})/3$$

$$h_1=\frac{1}{3^3}(-2z^2-6+22z^{-1}-3z^{-3}-2z^{-4}-4z^{-5}-4z^{-8}-z^{-11})$$

$$h_2=\frac{1}{3^3}(-z^8-3z^6-4z^5-6z^3-4z^2-2z+22z^{-2}-3z^{-3}-2z^{-5})$$

结束语 小波的滤波器可以用多相位矩阵来表示，多相位矩阵又可以分解为有限步的提升，但分解形式不唯一。因此，基于提升框架下的 M 通道小波变换所对应的预测滤波器与更新滤波器也不唯一。找出更好的预测滤波器与更新滤波器将是我们下一步的研究方向。

表 1 3-通道 Neville 滤波器

	分子								分母
$N\backslash K$		2	1	0	−1	−2	−3	−4	
2				2	1				3
4			−5	60	3	−4			3^4
6		8	−70	560	280	−56	7		3^6
8	−44	440	−2310	15400	7700	−1848	385	−40	3^9

表中给出 $P_1, P_2(z)=zP_1(z^{-1})$

表 2 4-通道 Neville 滤波器

	分子								分母
$N\backslash K$	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	
2				3	1				2^2
4			−7	105	35	−5			2^7
6		77	−693	6930	2310	−495	63		2^{13}
8	−495	5005	−27027	225225	75075	−19305	4095	−429	2^{18}

表中给出，$P_1, P_3(z)=zP_1(z^{-1})$，P_2 是 Deslauriers-Dubuc 预测滤波器

参考文献

1 Sweldens W. Wavelets and the lifting scheme: A 5 minute tour [J]. Zeitschrift für angewandte mathematic und mechanic, 1996, 76(Suppl. 2):41～44

2 FCD15444-1, JPEG2000 [S/OL]. http: // www. jpeg. org / FCD15444-1. htm

3 程正兴. 小波分析算法与应用. 西安：西安交通大学出版社，1999

4 Kovacevic J, Sweldens W. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9 (3):480～496

5 冯向初，甘小冰，宋国乡. 数值泛函与小波理论. 西安：西安电子科技大学出版社，2003

6 王卫卫. 小波与提升及其在图像数字水印中的算法研究：[博士论文]. 2001, 9

7 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Commun Pure Appl Math, 1992, 45(5):485～560