关于三值逻辑程序中否定和蕴涵完备化程序的不动点语义 *)

刘富春

(广东工业大学应用数学学院 广州 510090) (中山大学计算机系 广州 510275)

摘 要 逻辑程序具有丰富的表达能力和非确定性等特点，在定理机器证明、关系数据库系统、程序验证、模块化程序设计和非单调推理等方面都有了广泛的应用。本文是继续文[8]的工作。首先通过两个反例，指出了文[7]中关于否定完备化程序 $Comp(\neg, Pr)$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\twoheadrightarrow, Pr)$ 的两个重要定理都存在一定程度的错误。然后对这两个定理进行了修改，用后继算子 T_{Pr} 和 Fitting 算子 F_{Pr} 的不动点语义，分别给出了否定完备化程序 $Comp(\neg, Pr)$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\twoheadrightarrow, Pr)$ 的 Herbrand 模型的充分条件和必要条件，这将在逻辑程序的最优不动点和最小不动点的语义研究中有着重要的应用价值。

关键词 逻辑程序，否定和蕴涵完备化程序，Herbrand 模型，后继算子，Fitting 算子

Semantics of Fixedpoints on the $\neg$-Completion and $\twoheadrightarrow$-Completion in Three-Valued Logic Programming

LIU Fu-Chun

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

(Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract Logic programming has been widely applied in mechanical theorem proving, relational database system, modularized programming and non-monotone reasoning. This paper is the continuation of reference [8]. Two faults on $\neg$-completion and $\twoheadrightarrow$-completion in reference [7] are found by examples. Then the fixedpoints of the consequence operator and Fitting's operator are presented, which characterize the semantics on $\neg$-completion and $\twoheadrightarrow$-completion.

Keywords Logic programming, $\neg$-completion and $\twoheadrightarrow$-completion, Herbrand model, Consequence operator, Fitting's operator

1 引言

早在 20 世纪 70 年代，Kowalski 等人提出了逻辑可以作为程序设计语言的基本思想，把逻辑和程序这两个截然不同的概念协调统一为一个概念—逻辑程序(Logic Programming)。这也是早期自动定理证明和人工智能发展的自然结果。随后，逻辑程序得到了迅速发展，特别是基于一阶谓词的逻辑程序，将逻辑推理对应于计算，具有丰富的表达能力、非确定性等特点，在定理机器证明、关系数据库系统、程序验证、模块化程序设计和非单调推理等方面都有了广泛的应用[1~3]。最近，多值逻辑被广泛应用于逻辑程序的研究。Mycroft[4]运用五值逻辑刻画了深度优先的搜索方法，并对三值逻辑进行重新探讨，得到了更一般逻辑框架下的许多深刻结论。Lassez 和 Maher[5]则研究了三值逻辑程序中的最优不动点和最小不动点语义，证明了对于确定性逻辑程序来说，最优不动点与最小不动点是一致的等重要结论。Fitting[6]对带有正规则的三值逻辑程序进行了深入研究。Delahaye 和 Thibau[7]讨论了在一种新蕴涵联结词下的带有负规则的逻辑程序的最小不动点语义。应明生和刘富春[8]则给出了一种带有负规则的三值逻辑程序和四值逻辑程序，将关于逻辑程序的许多重要结论进行了一系列很有意义的推广和改进。

本文是继续文[8]的工作。在文[7]中，Delahaye 和 Thibau 给出了两个重要的算子：后继算子 T_{Pr} 和 Fitting 算子 F_{Pr}，得到了一系列深刻结论。本文首先通过两个反例，指出了文[7]中关于否定完备化程序 $Comp(\neg, Pr)$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\twoheadrightarrow, Pr)$ 的两个重要定理(命题 2.20 和命题 2.21)都存在一定程度的错误。然后对这两个定理进行了修改，用后继算子 T_{Pr} 和 Fitting 算子 F_{Pr} 的不动点语义，分别给出了否定完备化程序 $Comp(\neg, Pr)$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\twoheadrightarrow, Pr)$ 的 Herbrand 模型的充分条件和必要条件，这将在逻辑程序的最优不动点和最小不动点的研究中有着重要的应用价值。

2 Delahaye 和 Thibau 的否定与蕴涵完备化程序的不动点语义

下面出现的术语和记号可详见文[7,8]。

定义 1[7] 设 Pr 是 L 上的三值逻辑程序，后继算子是指 $T_{Pr}: IHT^{\infty}(L) \to IHT^{\infty}(L)$，使得：(1) $T_{Pr}(Contra)=Contra$；而且 (2) 对于任意三值 Herbrand 解释 $i \in IHT(L)$，如果

$\{lit \in Her(L)$：存在 Pr 中的规则基例 $lit \leftarrow for$，使得 $tv_i(for)=T\} \subseteq IHT(L)$，

那么

$T_{Pr}(i)=\{lit \in Her(L)$：存在 Pr 中的规则基例 $lit \leftarrow for$，使得 $tv_i(for)=T\}$，

否则 $T_{Pr}(i)=Contra$。

定理 1[7] 设 Pr 是 L 上的三值逻辑程序，$i \in IHT(L)$

*)广东省自然科学基金项目(020146,031541 和广东工业大学青年基金项目(042027)。**刘富春** 副教授，博士研究生，主要从事数理逻辑、逻辑程序和数据库等研究。

是三值 Herbrand 解释，则 i 是 Pr 的三值 Herbrand 模型的充要条件是 $T_{Pr}(i)\subseteq i$。

定义 2[7] 设 Pr 是只带正规则的三值逻辑程序，定义 Fitting 算子 $F_{Pr}: IHT(L)\to IHT(L)$，使得对于任意 $i\in IHT(L)$，

$F_{Pr}(i)=\{ato\in her(L)$：存在 Pr 中的规则基例 $lit\leftarrow for$，使得 $tv_i(for)=T\}$

$\cup\{\neg ato\in\neg her(L)$：任意 Pr 中的规则基例 $lit\leftarrow for$，都有 $tv_i(for)=F\}$。

文[7]中建立了这两个算子 T_{Pr} 和 F_{Pr} 之间的关系如下：

定理 2[7] 设 Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序，$Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 是 Pr 的否定完备化程序，则 $T_{Comp(\neg,Pr)}=F_{Pr}$。

文[7]还用这两个重要算子 T_{Pr} 和 F_{Pr} 的不动点语义，分别对否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型进行了刻画。

定理 3(文[7]命题 2.20) 设 Pr 是只带正规则的三值逻辑程序，i 是三值 Herbrand 解释，则 i 是否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型的充要条件是 $F_{Pr}(i)\subseteq i$。

定理 4(文[7]命题 2.21) 设 Pr 是只带正规则的三值逻辑程序，i 是三值 Herbrand 解释，则 i 是蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型的充要条件是 $T_{Pr}(i)=i$。

下面我们将通过两个简单的反例指出定理 3 和定理 4 是错误的。

3 关于否定与蕴涵完备化程序的不动点语义的反例和改进

从定理 3 和定理 4 的证明过程可以看出，对于一个只带有正规则的三值逻辑程序 Pr，不一定能够保证其否定完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 也只带正规则，因此，上述定理 3 和定理 4 都存在一定漏洞，下面用两个简单的反例来说明。

反例 1 设 Pr 是只有一条规则的三值逻辑程序：

$p(x)\leftarrow q(x)$

显然，Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序。它的否定完备化程序 $Comp(\neg, Pr)$ 如下：

$p(y)\leftarrow\exists x(y=x\wedge q(x))$,

$\neg p(y)\leftarrow\neg\exists x(y=x\wedge q(x))$,

$\neg q(x)\leftarrow$。

不难看出，$Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 只有一个 Herbrand 模型 $i=\{\neg p(a),\neg q(a)\}$。但是对于一个三值 Herbrand 解释 $j=\{\neg p(a)\}$，根据 $F_{\mathrm{Pr}}(j)$ 的定义，显然有 $F_{\mathrm{Pr}}(j)=\varnothing$。因此，尽管它满足条件 $F_{\mathrm{Pr}}(j)\subseteq j$，但是它却不是 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型。由此说明定理 3 是错误的。

反例 2 设 Pr 是只有一条规则的三值逻辑程序：

$p(a)\leftarrow q(b)$。

显然，Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序。它的蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 如下：

$p(x)\leftarrow x=a\wedge q(b)$,

$x=a\wedge q(b)\leftarrow p(x)$,

$\neg q(x)\leftarrow$。

不难看出，$i=\{\neg q(a),\neg q(b)\}$ 是 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的一个 Herbrand 模型。但是根据 $T_{\mathrm{Pr}}(i)$ 的定义，显然有 $T_{\mathrm{Pr}}(i)=\varnothing$。因此，尽管 $i=\{\neg q(a),\neg q(b)\}$ 是 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的一个 Herbrand 模型，但是它却不满足 $T_{\mathrm{Pr}}(i)=i$。由此说明定理 4 也存在一定漏洞。

下面对上述定理 3 和定理 4 进行改进，分别得到否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 模型的不动点语义刻画的充分条件和必要条件。

定理 5 设 Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序，i 是三值 Herbrand 解释，则有：

(1) 如果 i 是否定完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，则 $T_{\mathrm{Comp}(\neg,\mathrm{Pr})}(i)\subseteq i$。

(2) 如果 i 是否定完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，则 $F_{\mathrm{Pr}}(i)\subseteq i$。

(3) 如果 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 是三值逻辑程序，且 $F_{\mathrm{Pr}}(i)\subseteq i$，则 i 是 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型。

证明：(1) 如果 i 是否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，记集合

$S=\{lit\in Her(L)$：存在 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 中的规则基例 $lit\leftarrow for$，使得 $tv_i(for)=T\}$，则 S 中不同时含有一个原子和这个原子的否定。否则，如果存在一个基原子 $ato\in S$，而且 $\neg ato\in S$，那么在否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 中存在两个规则基例 $ato\leftarrow for\ 1$ 和 $\neg ato$ ($for\ 2$，使得 $tv_i(for\ 1)=T$ 且 $tv_i(for\ 2)=T$。从而 $ato\in i$ 且 $\neg ato\in i$，这与 i 是 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型矛盾。因此，$T_{\mathrm{Comp}(\neg,\mathrm{Pr})}(i)=S$。

对任意 $lit\in T_{\mathrm{Comp}(\neg,\mathrm{Pr})}(i)$，存在 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 中的规则基例 $lit\leftarrow for$，使得 $tv_i(for)=T$。由于 i 是 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，因此 $tvi(lit)=T$。又因为 lit 是基文字，从而 $lit\in i$。这就证明了 $T_{\mathrm{Comp}(\neg,\mathrm{Pr})}(i)\subseteq i$。

(2) 如果 i 是否定完备化程序 $Comp(\neg, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，由(1)得 $T_{\mathrm{Comp}((\neg,\mathrm{Pr})}(i)\subseteq i$。再根据定理 2，有 $T_{\mathrm{Comp}(\neg,\mathrm{Pr})}(i)=F_{\mathrm{Pr}}(i)$，从而 $F_{\mathrm{Pr}}(i)\subseteq i$。

(3) 如果 $\mathrm{Comp}(\neg, Pr)$ 是三值逻辑程序，而且 $\mathrm{F}_{Pr}(\mathrm{i})\subseteq\mathrm{i}$，则根据定理 2，有 $\mathrm{T}_{Comp(\neg,Pr)}(\mathrm{i})=\mathrm{F}_{Pr}(\mathrm{i})$，从而有 $\mathrm{T}_{Comp(\neg,Pr)}(\mathrm{i})\subseteq\mathrm{i}$。再由定理 1 得，i 是 $\mathrm{Comp}(\neg, Pr)$ 的 *Herbrand* 模型。

定理 6 设 Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序，i 是三值 Herbrand 解释，如果 $Comp(\to,\mathrm{Pr})$ 也是三值逻辑程序，而且 i 是 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，则 $T_{\mathrm{Pr}}(i)=i$。

证明：如果 i 是蕴涵完备化程序 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，则 i 也是 Pr 的范式 Pr' 的 Herbrand 模型，而 $\forall Pr\equiv_{TH}\forall Pr'$，所以 i 也是 Pr 的 Herbrand 模型，由定理 1 得，$T_{\mathrm{Pr}}(i)\subseteq i$。反之，对任意 $lit\in i$，由于 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 是三值逻辑程序而且 i 是 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型，因此对于 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 中的规则基例 $lit\leftarrow for$，有 $tv_i(for)=T$，从而 $lit\in T_{Pr}(i)$，即 $i\subseteq TPr(i)$。这就证明了 $T_{\mathrm{Pr}}(i)=i$。

定理 7 设 Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序，i 是三值 Herbrand 解释，如果 $T_{\mathrm{Pr}}(i)=i$，则 i 是 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型。

证明：根据 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 中的两种类型规则分以下两种情形证明。

(1) 对于 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 中的规则 $lit\leftarrow for$，由于它也是 Pr 的范式 Pr' 的规则，因此如果 $T_{Pr}(i)=i$，则 $T'_{Pr}(i)=i$。根据定理 1 得，i 是 Pr' 的 Herbrand 模型，从而证得 i 满足规则 $lit\leftarrow for$。

(2) 对于 $Comp(\to, \mathrm{Pr})$ 中的规则 $lit(x_1,\cdots,x_n)\to for'$，其中

$for'=\vee_{i=1}(\exists y_1\cdots\exists y_p(x_1=t_{i1}(y_1,\cdots,y_p)\wedge\cdots\wedge x_n=$

(下转第 147 页)

4 实验结果

4.1 实验条件

表1 实验条件

操作系统	Windows 2000 Pro
CPU	Celeron1.7G
内存	DDR256M
软件环境	Matlab6.5
计算软件	Steve Gunn SVM[8]

4.2 实验数据

数据 ringnorm 数据集是从 http://svm.first.gmd.de Delve Datasets 上下载的，是 Leo Breiman 用于两类划分的包含 7400 个样本点的数据集，数据均取自一个 20 维的多变量正态分布。类 1 的均值为 0，方差为 4 倍单位元；类 2 的均值为$(a,a,\cdots a)$，其中 $a=2/\sqrt{20}$，方差为单位元。

4.3 结果分析

支持向量机涉及到一个 $n\times n$ 的 Hession 矩阵的计算，由于受到微机内存的限制，大样本数据支持向量机会造成内存的溢出。对于数据集 ringnorm 我们只取前 2000 个样本作为训练集，之后的 1000 个作为测试集。表 2 中 CBSVM 为本文提出的基于聚类的大样本支持向量机算法，而 SVM 则为标准支持向量机算法，计算采用的核函数为 RBF 径向基函数，其中参数 $C=100,\sigma=0.5,k=100$，计算结果如下：

表2 实验结果

算法	参与训练样本数	支持向量数	测试正确率	训练时间
CBSVM	839	276	92.6%	863.5(s)
SVM	2000	543	93.0%	3762.5(s)

基于聚类的支持向量机参与训练样本数为 839，支持向量数为 276，测试正确率为 92.6%，训练时间为 863.5s；而标准支持向量机是全部 2000 个样本参与训练，得到 543 个支持向量，测试正确率为 93.0%，训练所用时间为 3762.5s。可以看出，经过聚类筛选出支持族后，参与训练的样本明显比标准支持向量机少，而得到的支持向量也要少。在保持分类精度基本一致的情况下，训练速度则是明显加快。实验说明本文提出的算法是有效的。

结论 采用改进的支持向量机算法——基于聚类的支持向量机做大样本分类训练，首先利用 *k-mean* 聚类筛选出超平面附近的支持类，得到可能的支持向量训练分类器，从而使训练样本大为压缩。理论和实验表明，在保持泛化精度一致情况下，改进算法的训练速度提高了。

参考文献

1 Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory [M]. New York: Springer, 1999

2 vapnik V N. Statistical learning theory [M]. New York: Wiley, 1998

3 Han Jiawei 等著. 数据挖掘-概念与技术[M]. 范明，孟小峰译. 北京:机械工业出版社, 2001

4 奉国和，等. 基于支持向量机的分解合作加权算法及其应用[M]. 计算机科学, 2005, 32(4): 91～93

5 Boser B E, Guyon I M, Vapnik V N. A Training Algorithm for optimal margin classifiers [J]. In: Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theroy, Pittsburgh, PA: ACM Press, 1992. 144～152

6 Osuna E, Freund R, Girosi F. An Improved Training Algorithm for Support Vector Machines [C]. New york: ICNNSP97, 1997. 276～285

7 Platt J. Fast training of support vector machines using sequential m inimal optimization [A]. Scholkopf B, Burges C, Smola A. Advances in Kernel Methods-Support Vector Learning [C]. Cambridge, MA: MIT Press, 1999. 185～208

8 Gunn S. Support vector machines for classification and regression [R]: [TR 1998-10]. University of southampton, 1998

9 Zhang T, Ramakrishnan R, Livny M. BIRCH: an efficient data clustering method for very large databases [C]. In: Proc. ACM SIGMOOD Int Conf. Management of Data, 1996. 103～114

(上接第 142 页)

$t_{in}(y_1,\cdots,y_p))\wedge for_i(y_1,\cdots,y_p))),$

下面证明如果 $tv_i(lit(x_1,\cdots,x_n))=T$，则有 $tv_i(for')=T$。

如果 $tv_i(lit(x_1,\cdots,x_n))=T$，则对任意论域中的个体 $a_1,\cdots,a_n$，都有 $tv_i(lit(a_1,\cdots,a_n))=T$，即 $lit(a_1,\cdots,a_n)\in i$。因为对于 Pr 的范式 Pr'，有 $T_{Pr}'(i)=T_{Pr}(i)$，所以如果 $T_{Pr}(i)=i$，则 $T_{Pr}'(i)=i$，从而 $lit(a_1,\cdots,a_n)\in T_{Pr}'(i)$，这表明存在范式 Pr' 中的规则基例

$lit(a_1,\cdots,a_n)\leftarrow\vee_{i=1}(\exists y_1\cdots\exists y_p(a1=t_{i1}(y_1,\cdots,y_p)\wedge\cdots\wedge a_n=t_{in}(y_1,\cdots,y_p)\wedge for_i(y_1,\cdots,y_p)))$，使得 $tv_i(\vee_{i=1}(\exists y1\cdots\exists y_p(a_1=t_{i1}(y_1,\cdots,y_p)\wedge\cdots\wedge a_n=t_{in}(y_1,\cdots,y_p)\wedge for_i(y_1,\cdots,y_p))))=T$。这表明 $tv_i(lit(x_1,\cdots,x_n)\rightarrow for')=T$。因此，$i$ 也满足规则 $lit(x_1,\cdots,x_n)\rightarrow for'$。

由(1)(2)得，i 是 $Comp(\rightarrow,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型。

定理 8 设 Pr 是只带有正规则的三值逻辑程序，如果 $Comp(\rightarrow,Comp(\neg,\mathrm{Pr}))$ 也是一个三值逻辑程序，而且 i 是 $Comp(\rightarrow,Comp(\neg,\mathrm{Pr}))$ 的 Herbrand 模型，则 $F_{\mathrm{Pr}}(i)=i$。

证明：对于只带有正规则的三值逻辑程序 Pr，如果 $Comp(\rightarrow,Comp(\neg,\mathrm{Pr}))$ 也是一个三值逻辑程序，而且 i 是 $Comp(\rightarrow,Comp(\neg,\mathrm{Pr}))$ 的 Herbrand 模型，根据定理 6 得，$T_{Comp(\neg,\mathrm{Pr})}(i)=i$。再由定理 $T_{Comp(\neg,\mathrm{Pr})}=F_{\mathrm{Pr}}$，有 $F_{\mathrm{Pr}}(i)=i$。

结束语 本文是继续文[8]的工作。首先通过两个反例，指出了文[7]中关于否定完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的两个定理(命题 2.20 和命题 2.21)都存在一定程度的错误。然后对这两个定理进行了修改，用后继算子 T_{Pr} 和 *Fitting* 算子 F_{Pr} 的不动点语义，分别给出了否定完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 和蕴涵完备化程序 $Comp(\neg,\mathrm{Pr})$ 的 Herbrand 模型的充分条件和必要条件，这将在逻辑程序的最优不动点和最小不动点的研究中有着重要的应用价值。

参考文献

1 Kowalski R A. The Relation Between Logic Programming and Logic Specification. In: Hoare C, Shepherdson J, eds. Mathematical Logic and Programming Languages [C]. Prentice-Hall: Englewood C, 1985. 11～27

2 Lloyd J W. Foundations of Logic Programming, 2nd Edition [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 1～203

3 王鼎兴，温冬婵，高耀清，黄志毅. 逻辑程序设计语言及其实现技术. 北京:清华大学出版社，广西:广西科学技术出版社, 1996

4 Mycroft A. Logic Programs and Many-Valued Logic. STACS 84, Lecture Notes in Computer Science 166, Springer-Verlag, Berlin, 1984. 274～286

5 Lassez J L, Maher M J. Optimal Fixpoints of Logic Programs. Theoretical Computer Science, 1985, 39: 15～25

6 Fitting M. Partial Models and Logic Programming. Theoretical Computer Science, 1986, 48: 229～255

7 Delahaye J P, Thibau V. Programming in Three-Valued logic. Theoretical Computer Science, 1991, 78: 189～216

8 Ying Ming-sheng, Liu Fu-chun. Three-valued and four-valued approach to logic programming with negation. Chinese Journal of Advanced Software Research, 1999, 6(1): 71～83