基于两个集合上粗集模型的算法实现*)

刘贵龙
(北京语言大学信息科学学院 北京 100083)

摘 要 为了处理人工智能中不精确和不确定的数据和知识，Pawlak 提出了粗集模型，之后粗集理论得到拓广，人们提出了许多新的粗集模型，拓广的方法主要有两种，一种是减弱对等价关系的依赖，另一种是把讨论问题的论域从一个拓展到两个，Y. Y. Yao 提出了一种基于两个论域的粗集模型，本文研究基于两个论域的粗集模型的具体算法实现，给出了上下近似的矩阵算法及其相应的焦点集的算法，并把相关结论及矩阵算法推广到模糊集上，还给出了相关模型的极为简洁的公理刻画，即仅用一条公理刻画该模型。

关键词 模糊集，粗集，上下近似算子，信任函数，公理方法

The Algorithms of Rough Sets Based on Two Universes

LIU Gui-Long
(School of information Sciences, Beijing Language & Culture University, Beijing 100083)

Abstract To deal with the uncertain data and knowledge in applications related to artificial intelligence, consider work has been done on the development and application of rough sets theory. Y. Y. Yao[3] gives a rough set model research framework based on two distinct but related universes. The paper also studies rough sets model based on two universes. The algorithms of lower, upper approximation operator and focal element of rough sets based on two universes are given. The research framework has been extended to Fuzzy environment. Axiomatic characterization of rough Fuzzy sets model based on Fuzzy set using two distinct universes is obtained.

Keywords Fuzzy sets, Rough sets, Lower and upper approximation operators, Belief functions, Axiomatic approaches

波兰人 Pawlak 在上世纪 80 年代给出粗(Rough)集理论后，人们发现它在处理不精确数据和不完全信息方面有重要应用，因而引起计算机及相关领域专家的兴趣，其理论被应用于许多领域，特别是在数据挖掘方面的应用获得成功。近年来粗集理论和应用两个方面都得到迅速发展，粗集的概念也有了各种各样的推广，粗集模型的推广一直是粗集理论研究的主流，例如，Y. Y. Yao[3] 给出了一类基于两个论域(或称泛集)的粗集模型。本文在文[3]的基础上给出该模型的算法实现，即给出了上下近似的矩阵算法及其相应的焦点集的算法，并把相关结论及矩阵算法推广到模糊集上，给出了极为简洁的公理刻画。

在 Pawlak 给出的粗集模型中，等价关系起着关键作用。任意给定一个概念，人们不一定能用知识库中的知识来精确地描述，这时就用粗集的一对上下近似来描述，但是，对等价关系的严格要求限制了粗集理论的应用，特别是等价关系要求只能在一个论域上讨论问题。而实际问题也往往要求我们考虑两个或多个论域的情形，同时我们也总是希望考虑问题的范围尽可能地大些，以便有更大的应用范围。

本文主要在两个有限论域 U,W 上考虑问题。设 U,W 是两个论域，R 为 U 到 W 上的任意二元关系(即 R 为迪卡尔积 $U\times W$ 的子集)，通常三元组(U,W,R)称为近似空间，本文较多地用到粗集和模糊集的有关知识，其基本概念、基本结论及术语不再详细解释。

1 两个泛集的上下近似的矩阵表述形式

设 U,W 为两个有限论域，$P(W)$为 W 的幂集，R 为 U 到 W 上的二元关系，那么 R 也可以通过映射 $F:U\rightarrow P(W)$(U 到 $P(W)$的映射通常称之为集值映射)来等价地定义；事实上，若 R 是从 U 到 W 的二元关系，则可以定义 $F(x)=\{y\mid y\in W,(x,y)\in R\}$，$\forall x\in U$，$F(x)$通常称为元素 x 的 R 邻域，易见 F 是 U 到 $P(W)$的集值映射；反之，若 $F:U\rightarrow P(W)$是集值映射，我们定义 U 到 W 的二元关系 R 如下：$(x,y)\in R$ 当且仅当 $y\in F(x)$，$x\in U$，$y\in W$。这样二元关系与集值映射就有一一对应的关系。

对于 U 到 W 上的二元关系 R，文[3]通过与 R 对应的集值映射 F 给出了粗集的上下近似的如下定义：

定义 1[3] 设 U,W 为两个有限论域，$P(W)$为 W 的幂集，R 为 U 到 W 上的二元关系，$F:U\rightarrow P(W)$是与 R 对应的集值映射，对任意的 $X\subseteq W$，记

$\underline{R}X=\{x\mid x\in U,F(x)\subseteq X\}$ 及 $\overline{R}X=\{x\mid x\in U,F(x)\cap X\neq\varnothing\}$

则 $\overline{R}$，$\underline{R}$ 分别称为 X 关于二元关系 R 的上近似和下近似，而分别称 $\underline{R},\overline{R}:P(W)\rightarrow P(U)$为下近似算子与上近似算子。

上下近似作为 W 的子集，可以通过特征函数来表述，设 $X\in W$，为了和模糊集合的表述一致，我们把 X 的特征函数写成 $X(x)$，具体如下：

*)本课题得到教育部留学归国人员专项研究项目(010201)及教育部科学技术重点项目(01043)资助。**刘贵龙** 博士，教授，主要研究领域为粗集、模糊集及计算应用。

$$X(x)=\begin{cases}1, x\in X\\ 0, x\notin X\end{cases}$$

这样 X 的上下近似用特征函数的形式可以写成($X\subseteq W$):

$(\overline{R}X)(x)=\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge X(y))$,及$(\underline{R}X)(x)=\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))\vee X(y))$

这里$R(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in R\\ 0,(x,y)\notin R\end{cases}$,$\vee$,$\wedge$ 分别表示取大,取小运算,其证明与后面定理 1 的证明一致。

我们想通过矩阵来描述二元关系 R 的上下近似,使得上下近似的计算变得简单。为此取定两个有限论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 及 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,利用集合的特征函数把 U,W 的子集写成 0,1 序列的形式,即把 U,W 的子集分别写成 m, n 维列(布尔)向量的形式,其每个分量只能为 0 或 1。设 U 到 W 的二元关系 R 相应的关系(布尔)矩阵为 M_R($m\times n$ 矩阵),则 M_R 的第 i 行的元素就是 $F(u_i)$。通过矩阵 M_R 我们可以给出 U 到 W 的二元关系 R 的下近似和上近似的另一表述形式,这种表述形式实际上提供了上下近似的极为简单的计算方法,此外矩阵的方法也可以用于粗集的推理。

定理 1 设 U,W 为两个有限论域,U 到 W 的二元关系为 R,设关系 R 对应的关系矩阵为 M_R,则对任意的 $X\subseteq W$,有 $\overline{R}X=M_RX$,这里 X 可理解为 n 维列(布尔)向量,M_RX 理解为 $m\times n$(布尔)矩阵 M_R 与 n 维列(布尔)向量 X 的布尔乘积。

证明:为叙述方便,设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$、$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,$F:U\rightarrow P(W)$ 是与 R 对应的集值映射,$F(u_i)=(a_{i1},\cdots,a_{in})$(行向量的形式),$M_R=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$,则 $u_i\in\overline{F}X$ 当且仅当 $F(u_i)\cap X\neq\varnothing$,即存在 j 使得 $a_{ij}=1$ 且 $w_j\in X$,这样 M_RX 的第 i 个分量为 1。反之亦然,即 $\overline{R}X=M_RX$,证毕。

文[3]在给出上下近似的定义时,是借助与 R 相应的集值映射给出的,通过我们的定理 1,上近似的计算由关系 R 的矩阵 M_R 直接给出,同时我们也看到,上近似的计算我们有极为简单的计算公式 $\overline{R}X=M_RX$,而下近似的计算我们虽没有这么简单的计算方法,但我们知道上近似与下近似之间有对偶关系,利用这种对偶关系我们可以较简单地计算出下近似,即通过 $\underline{R}X=\sim\overline{R}(\sim X)=\sim M_R(\sim X)$ 来计算下近似,这里~表示集合的非运算。定理 1 实际上解决了两个论域上粗集上下近似的计算问题。需要指出的是利用公式 $\overline{R}X=M_RX$ 及矩阵的运算可以推演出粗集的许多性质,例如,我们极易推出性质 $\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$ 及 $\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$,事实上,

由定理 1,$\overline{R}(X\cup Y)=M_R(X\cup Y)=M_RX\cup M_RY=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$

同理 $\underline{R}(X\cap Y)=\sim(\overline{R}(\sim(X\cap Y)))=\sim(\overline{R}(\sim X\cup\sim Y))$

$=\sim(\overline{R}(\sim X)\cup\overline{R}(\sim Y))=\sim\overline{R}(\sim X)\cap\sim\overline{R}(\sim Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$

例 1 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$,$W=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$,关系 R 对应的矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,设 $X=\{w_1,w_2,w_4\}$,把 X 写成列向量的形式 $X=(1,1,0,1)^T$(T 表示向量的转置),则 $M_RX=(1,0,1,1,1)^T$,$\sim M_R(\sim X)=(1,1,1,0,1)^T$,即,$\overline{R}=\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$,$\underline{R}=\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$ 与通过公式 $\underline{R}X=\{x|x\in U,F(x)\subseteq X\}$ 及 $\overline{R}X=\{x|x\in U,F(x)\cap X\neq\varnothing\}$[3] 计算所得的结论完全一致。

2 两个论域的焦点集的算法

Y. Y. Yao[1] 还给出了粗集的上下近似与人工智能中的证据理论之间的关系,这种关系是通过所谓的焦点集来实现的,这是一个有趣的结论,类似地我们也可以给出两个论域时焦点集的定义,本节我们给出焦点集的有效算法。

类似于文[1]我们给出焦点集的定义:

定义 2 设 U,W 为两个有限论域,$P(W)$ 为 W 的幂集,R 为 U 到 W 上的二元关系,$F:U\rightarrow P(W)$ 是与 R 对应的集值映射,定义 $j:P(W)\rightarrow P(U)$ 如下:

$j(X)=\{u|u\in U,F(u)=X\}$,$X\subseteq W$

若 $j(X)\neq\varnothing$,则称 X 为 j 的焦点集,我们将看到全体焦点集的集合构成了 U 的一个划分(或称分类)。

很自然的问题是这些 $j(X)$ 是什么?如何计算?下面我们给出焦点集的算法。

设 U 到 W 的二元关系为 R,其相应的集值映射为 $F:U\rightarrow P(W)$,在 U 上定义关系~如下:

$x,y\in U$,$x\sim y$ 当且仅当 $F(x)=F(y)$

那么容易证明~具有自反性、对称性和传递性,因而~是 U 上的等价关系,进而确定了 U 的一个分类,记 x 所在的类为$[x]_\sim$,所有类的全体构成的商集(或称商空间)记为 $U/\sim$,我们将证明 $U/\sim$ 就是所有的焦点集。

定理 2 设 U,W 及 R 如上,则商集 $U/\sim$ 的全体元素正好是所有的焦点集。

证明:1)证明商集 $U/\sim$ 的每个元素均为 j 的焦点集:即对 $U/\sim$ 的每个元素$[x]_\sim$有$[x]_\sim=j(F(x))$,事实上,由焦点集的定义 $j(X)=\{x|x\in U,F(x)=X\}$,若 $y\in[x]_\sim$,则 $F(x)=F(y)$,于是 $y\in j(F(x))$,即$[x]_\sim\subseteq j(F(x))$;反之,若 $y\in j(F(x))$,则 $F(x)=F(y)$,即 $x\sim y$,$y\in[x]_\sim$,即,$j(F(x))\subseteq[x]_\sim$,于是$[x]_\sim=j(F(x))$。

2)证明每个焦点集均为商集 $U/\sim$ 的某个元素。

设 $j(X)\neq\varnothing$ 是一个焦点集,取 $x\in j(X)$,则 $F(x)=X$,重复上述论证有$[x]_\sim=j(F(x))$,证毕。

这样所有的焦点集恰好构成商集 $U/\sim$,于是映射 $j:P(W)\rightarrow P(U)$ 可具体表述为:$j(Y)=\begin{cases}[x]_\sim,\text{如果存在 } x \text{ 使 } F(x)=Y\\ \varnothing,\text{如果对于任意的 } x \text{ 均有 } F(x)\neq Y\end{cases}$

下一步的问题就是如何计算焦点集,为此我们给出焦点集的算法。

由于商集 $U/\sim$ 就是所有的焦点集,很自然,集合的分类算法可以用于焦点集的计算。

焦点集的算法:即计算所有的焦点集

输入:论域 U,W 及二元关系 R。
输出:所有的焦点集 $J_1,J_2,\cdots,J_s$
1. 对论域 U,W 进行排序,即设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,通过 R 写出布尔矩阵 M_R;
2. $s=1$,$J_1=\{u_1\}$;
3. for $i=2$ to m
 for $j=1$ to s
 在矩阵 M_R 中,如果第 i 行与第 W_j 的第一个元素对应的行的元素完全相同,则 $J_j=J_j\cup\{u_i\}$
 否则 $s=s+1$,$J_s=\{u_i\}$
算法结束

该算法的最终结果产生所有的焦点集 $J_1,J_2,\cdots,J_s$，在最坏的情况(即产生 $m=|U|$ 个焦点集)需要检验的次数为 $1+2+\cdots+(m-1)=m(m-1)/2$，再加上每次检验需要比较 $|W|$ 个数据，因此该算法的时间复杂性为 $O(|U|^2|W|)$。

例 2 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_6\}$，$W=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$，关系 R 对应的矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则按照上述算法 $U/\sim=\{\{u_1,u_4\},\{u_2,u_6\},\{u_3\},\{u_5\}\}$ 为全部焦点集。

此外，由定理 2 我们还可以通过焦点集来描述上下近似，即有 $\overline{R}X=\bigcup_{F(x)\cap X\neq\varnothing}[x]_\sim$ 及 $\underline{R}X=\bigcup_{F(x)\subseteq X}[x]_\sim$。

3 两个泛集上模糊关系的上下近似及计算

本节我们把前三节的概念和结论推广到模糊集上，定义模糊关系的上下近似，仍设 U,W 是两个有限论域，若 U 为集合，我们用 $F(U)$ 来表示 U 上的模糊集的全体，若 $X\in F(U)$，即 X 是模糊集合，用 $X(x)$ 表示元素 $x(x\in U)$ 关于模糊集 X 的隶属度，为使问题简化，我们有时把 X 写成模糊列向量的形式，$X_\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 表示阈值 λ 的截集。U 到 W 的模糊关系 R 指的是 $U\times W$ 的模糊子集，即 $R\in(F(U\times W)$，设 R 为 U 到 W 的模糊关系，把 R 对应的模糊关系矩阵记为 M_R。

我们先给出模糊关系下粗集上下近似的定义：

定义 4 设 U,W 为两个有限论域，R 为 U 到 W 的模糊关系，$F(W)$ 为 W 的模糊集全体，对任意的 $X\in F(W)$

(1)X 的上近似：$\overline{R}X\in F(U)$；$(\overline{R}X)(x)=\bigvee_{y\in W}(R,(x,y)\wedge X(y))$，$\forall x\in U$；

(2)X 的下近似：$\underline{R}X\in F(U)$；$(\underline{R}X)(x)=\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))\vee X(y))$，$\forall x\in U$。

这里 $R(x,y)$ 表示元素对 $(x,y)\in U\times W$ 的隶属度，$\vee,\wedge$ 分别表示取大、取小运算，则 $\overline{R}X,\underline{R}X$ 分别称为 X 关于模糊关系 R 的上近似和下近似，而分别称 $\underline{R},\overline{R}:F(W)\to F(U)$ 为下近似算子与上近似算子。这时我们称 $(\underline{R}X,\overline{R}X)$ 或 (U,W,R,X) 为模糊关系下的粗糙模糊集；容易看出，当 R 为普通二元关系且为的普通子集时，与前面给出的定义完全一致。其计算与推理也有与定理 1 完全类似的办法，即

定理 3 设 U,W 为两个有限论域，R 为 U 到 W 的模糊关系，R 对应的模糊关系矩阵为 M_R，则对任意的 $X,Y\in F(W)$，有：

(1)$\overline{R}X=M_RX$，$\forall X\subseteq F(W)$，这里模糊关系矩阵 M_R 与模糊集 X 的乘积为布尔乘积；

(2)与普通集合的转化关系：$\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $(\overline{R}X)_\lambda=\overline{R_\lambda}X_\lambda$，这里 $X_\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 表示模糊集 X 关于阈值 λ 的截集合，R_λ 表示关系 R 的截关系。

证明：(1)$(\overline{R}X)(x)=\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge X(y))$ 写成矩阵的形式就是 $\overline{R}X=M_RX$。

(2)设 $x\in U,\lambda\in[0,1]$，则 $x\in(\overline{R}X)_\lambda$ 当且仅当 $(\overline{R}X)(x)\geqslant\lambda$，当且仅当存在 $y\in R_\lambda(x)$ 使 $X(y)\geqslant\lambda$，即 $y\in R_\lambda(x)\cap X_\lambda$，即 $x\in\overline{R_\lambda}X_\lambda$，于是 $(\overline{R}X)_\lambda=\overline{R}_\lambda X_\lambda$，证毕。

定理 3(1)解决了上近似的计算问题，而下近似的计算问题可以通过对偶关系来计算，因而上下近似的计算问题可以说是解决了；定理 3(2)说明，对于任意的 $\lambda\in[0,1]$，模糊集 X 的上近似的截集 $(\overline{R}X)_\lambda$ 是普通集 X_λ 的上近似 $\overline{R_\lambda}X_\lambda$，这给出了普通集合与模糊集合之间的转化关系。

4 两个泛集上模糊关系的粗集的公理方法

Y. Y. Yao[3] 就两个泛集上的二元关系(实际上为串行二元关系)所定义的粗集给出了极为简单的公理刻画，类似地，对于两个泛集上的二元模糊关系所定义的粗集，也应该有类似的公理化方法。由于上下近似的对偶性质，上下近似相互唯一确定，因此我们只考虑上近似的公理刻画。对于模糊关系下的粗集上近似我们仅用一条公理即可。

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 为两个论域，令 $e_i=\{u_i\}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$，即 e_i 的第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 个分量为 1，其余分量全为零的 m 维列向量，$v_j=\{w_j\}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$，即 v_j 的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 个分量为 1，其余分量全为零的 n 维列向量，设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F(W)$，$x_i=X(u_i)$，这里 T 表示向量的转置(不再区分模糊向量与模糊集)，设 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，数 λ 与模糊集 X 的乘积(布尔)定义为 $\lambda X=(\lambda\wedge x_1,\lambda\wedge x_2,\cdots,\lambda\wedge x_n)^T$，把模糊集写成列向量的形式后，模糊集就可以写成 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=x_1v_1\cup x_2v_2\cdots\cup x_nv_n$。

定理 4 设 U、W 是两个有限论域，$H:F(W)\to F(U)$ 是一个映射(或称为 $F(U)$ 上的一元算子)，若 H 满足：

$H(\lambda X\cup\mu Y)=\lambda H(X)\cup\mu H(Y)$，$\lambda,\mu\in[0,1]$，$X,Y\in F(W)$

这里的乘积为数与模糊集的(布尔)乘积，则存在 U 到 W 的模糊关系 R 使得 $H(X)=\overline{R}X$，因此若定义 $\underline{R}X=\sim\overline{R}(\sim X)$，那么 $(\underline{R},\overline{R})$ 是一对粗算子。

证明：我们只要找出 U 到 W 的二元模糊关系 R 使得 $M_RX=H(X)$ 即可。

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots u_m\}$，$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，建立模糊关系矩阵 M_R 及相应的二元模糊关系 R：

令 $a_{ij}=e_i^TH(v_j)$，$(i=1,2\cdots,m,j=1,2\cdots,n)$，$M_R=(a_{ij})$，显然 a_{ij} 为模糊向量(集合)e_i 与 $H(v_j)$ 的内积，则 $H(v_j)=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$，设 R 是对应 M_R 的模糊关系，若 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in F(W)$，则反复用 $H(\lambda X\cup\mu Y)=\lambda H(X)\cup\mu H(Y)$ 有

$$M_RX=(a_{ij})\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(a_{ij})(x_1e_1)\cup x_2e_2\cup\cdots\cup x_ne_n)=\begin{pmatrix}a_{11}\wedge x_1\\\vdots\\a_{m1}\wedge x_1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}a_{12}\wedge x_2\\\vdots\\a_{m2}\wedge x_2\end{pmatrix}\cup\cdots\cup\begin{pmatrix}a_{1n}\wedge x_n\\\vdots\\a_{mn}\wedge x_n\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}\cup x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}\cup\cdots\cup x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=x_1H(v_1)\cup x_2H(v_2)\cup\cdots\cup x_nH(v_n)=H(x_1v_1\cup x_2v_2\cup\cdots\cup x_nv_n)=H(X)$$

即 $M_RX=H(X)$。由定理 3，H 确定了模糊关系 R 的上近似，证毕。

定理 4 仅用一条公理就给出了模糊关系下粗集上近似的刻画。

结束语 粗集理论采用上下近似来处理模糊性，其计算

通过严格的数学公式来进行，其计算结果完全是由数据决定的，因而具有客观性，无人为因素，正是这样，粗集理论才引起人们的兴趣与关注。随着人们对粗集认识的深入，各种粗集模型被发现，本文实际上给出了两个算法。即两个泛集上的粗集的上下近似的矩阵算法及其相应的焦点集的算法。因为上下近似及相应的焦点集是粗集模型的关键概念，粗集理论的应用最后都要通过算法来实现。粗集模型的应用也不例外，也是要通过相应的算法来实现。在研究粗集的过程中，人们较少考虑用矩阵的方法，大多数研究者主要是通过集合论的方法来进行推理，本文则较多地采用了矩阵的方法，事实上，采用矩阵的方法有时能带来意想不到的方便，因此本文也为粗集的研究提供一种新方法，此外本文还给出了公理化的方法，仅用一条公理就给出了模糊关系下粗集上近似的刻画，公理化的方法可以使问题得到简化。总之，通过本文的工作，粗集上下近似的计算及概念的理解均得到简化。

参 考 文 献

1 Yao Y Y, Lingras P J. interpretations of belief functions in the theory of rough sets. Information Sciences, 1994, 104(1-2), 81～106

2 Yao Y Y. constructive and algebraic methods of the rough sets. Information Sciences, 1998, 109(1-4): 21～47

3 Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes. International Journal of Approximation reasoning, 1996, 15(4): 291～317

4 Banerjee M, Pal S K. roughness of a fuzzy set. Information Sciences, 1996, 93: 235～246

5 刘清. rough 集及 rough 推理. 科学出版社, 2001

6 石纯一，黄昌宁. 人工智能原理. 清华大学出版社，北京大学，1993

（上接第 180 页）

3. 终止规则：结束剪接操作。

(6) $\#CE\$BS_0\#wE$，其中 $w\in T^*$

(7) $\#E\$BC\#$

迭代剪接计算模型的模拟推导从字符串 BS_0SE 开始。在文法 G 中，依照产生式规则 $u\rightarrow v\in P$ 推导时，u 可以处于字符串中的任何位置。而在迭代剪接计算模型中使用模拟规则(1)时，u 必须处于字符串的右端。所以当 u 不处于字符串的右端时，还需要通过转换规则(2)、(3)、(4)、(5)将 u 移动到字符串的右端。

转换过程如下：

设 u 右边的字符串为 α，$\alpha\in N\cup T\cup\{S_0\}$，符号 $Bwu\alpha E$ 表示整个字符串，$w\in(N\cup T\cup\{S_0\})^*$。当 $\alpha=S_0$ 时，$w\in(N\cup T)^*$。

按照规则(2)：$(Bw|\alpha E, C|E_\alpha \vdash BwE_\alpha, E_\alpha$，保存了被切割掉的 α 的内容。

按照规则(3)：$(B'\alpha|C, B|wE_\alpha)\vdash B'\alpha wE_\alpha$，这里的 α 与规则(2)的 α 内容相同。

按照规则(4)：$(B'\alpha w|E_\alpha, C|E)\vdash B'\alpha wE$

按照规则(5)：$(B|C, B'|\alpha wE)\vdash B\alpha wE$

通过以上转换步骤，u 移到了字符串的右端。在转换过程中，由于 S_0 始终标示着被模拟的字符串的开始位置，因此并没有打乱字符串在文法 G 中的顺序。比如，当前字符串的形式为 $X\alpha_1S_0\alpha_2Y$，其中 X 为 B 或者 B'，Y 为 E 或者 E_α，那么在文法 G 中的字符串应为 $\alpha_2\alpha_1$。模拟规则和转换规则可以根据需要，迭代使用。

如果剪接结果中除了符号 B, E, S_0 外，其它的符号都属于终结符集合 T，就可以按照规则(6)和(7)，剪切掉字符串中的 B, E, S_0，结果就是剪接计算模型所产生的字符串，当然这个字符串也就是文法 G 所产生的字符串。

所以 $L(\gamma)=L(G)$，即 $L=\Psi_{dd}(FIN, REG)\cap T^*$。

小结 研究结果表明，基于 DNA 分子重组技术的 DNA 剪接计算模型的计算能力，大大超过了 DNA 粘接计算模型的计算能力，所有图灵机可计算的函数理论上都可以通过 DNA 剪接计算模型来计算。本系列文章应用形式语言及自动机理论技术，系统地对 DNA 分子的可计算性及其计算能力进行了理论探讨，使我们认识到 DNA 计算也是一种递归计算。DNA 计算拓宽了人类对自然计算现象的理解，特别是对计算本质的理解。相信，随着越来越多的专家、学者们对 DNA 分子计算的深入研究和探索，必将对科学技术的进步带来巨大的推动作用，对人类的生活方式及生活质量产生极大的影响。

参 考 文 献

1 Paun G, et al. Computing by Splicing [J]. Theoretical Computer Science, 1996, 168(2): 321～336

2 Paun G, Salomaa A. DNA Computing Based on the Splicing Operation [J]. Mathematica japonicae, 1996, 43(3): 607～632

3 Kari L, et al. DNA computing, sticker system, and universality. Acta Informatica, 1998, 35(5): 401～420

4 Kari L, et al. At the Crossroads of DNA Computing and Formal Languages: Characterizing Recursively Enumerable Languages by Insertion-Deletion Systems [A]. In: Proc. of 3rd DIMACS Workshop on DNA-Based Computers, Philadel-phia, June 1997. 318～333

5 Paun G H, Rozenberg G. sticker systems. Theoretical Computer Sci, 1998, 205

6 邹海明，等. 形式语言、自动机和语法分析[M]. 武昌：华中工学院出版社，1985

7 Sipser m. 计算理论导引[M]. 北京：机械工业出版社，2000

8 Roweis, Sam, Erik W, et al. A sticker based model for DNA computation [J]. Journal of Computational Biology, 1998, 5(4): 615～629

9 Cox J C, Cohen D S, Ellington A D. The complexities of DNA computation [J]. Trends in Biotechnology, 1999, 17(4): 151～154

10 Pixton D. Regularity of splicing languages. Discrete Applied Mathematics, 1996, 69: 101～124

11 Garzon M H, et al. Biomolecular Computing and Programming [J]. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 1999, 3(3): 236～250

12 Dassow J, Mitrana V. Splicing grammar systems [J]. Computers and AI, 1996, 15(2-3)

13 Csuhaj Varju E, et al. DNA Computing Based on Splicing: Universality Results [A]. In: Proc. of First Annual Pacific Symposium on Biocomputing, Hawaii, World Sci Publ Singapore, 1996. 179～190

14 Reif J H. Local parallel biomolecular computing [J]. In: Proc. of the 3rd DIMACS Workshop on DNA Based Computing, 1997. 243～264

15 Paun G, et al. Computing by Splicing: Programmed and Evolving Splicing Systems [A]. In: Proc. of 1997 IEEE Intl. Conf. on Evolutionary Computation, Indianapolis, IN, USA, 1997. 273～277

16 Gatterdam R W. Splicing systems and regularity [J]. International Journal of Computer Mathematics, 1998(31): 63～67