模糊集合论与计算机软件

马野元秀

提出模糊集合论[1]至今已有25年左右的时间，随着它对实际系统应用的进展，与信息处理领域之间也产生了相辅相成的关系。

现在，还不能说已经确立了模糊信息处理的领域，不过，为了叙述方便，似乎可以将模糊信息处理大致分为二种。一种是关于模糊集合论中的信息处理方法，另一种是关于信息处理领域中的模糊集合论方法（所谓信息处理，包括硬件和软件，不过本文只讨论与软件的关系）。

前一种问题是在计算机上实现用模糊集合论表述的各种概念，这相当于用计算机处理和表示模糊集合的方法。后一种问题相当于模糊推理、模糊程序和模糊数据库等，因为信息处理的内容并不是很有规律的东西，算法和数据都可能是模糊不清的，因此需要使用模糊集合论加以描述。

本文尽量用例子加以说明。先讨论模糊集及其运算，然后概述模糊集的表示和处理、模糊推理、模糊程序以及模糊数据库等。

一 模糊集及其运算

1.1 模糊集

模糊集可用于元素属于还是不属于某个集合不能明确定义的情况[1]。由此，可以考虑某个元素属于某集合的隶属度。隶属度可取0到1的值，完全属于的隶属度为1，完全不属于的隶属度为0。

〔例1〕 考虑大小范围，可从0到10分11个等级。此时，可以定义「大的」，「小的」和〔中等〕，例如

大的＝{0, 1/6, 0.2/7, 0.8/8, 1/9, 1/10},
小的＝{1/0,1/1,0.8/2, 0.2/3, 0.1/4},
中等＝{0.1/3 0.8/4 1/5 0.8/6 0.1/7}

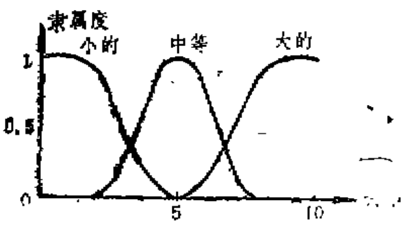

图1 模糊集「大的」，「小的」，「中等」

在{ }中，用隶属度/元素的形式表示。

当然，元素也可以是连续的，此时隶属度可以用公式或图表给出。

〔例2〕 设大小范围为从0到1的连续区间。此时，「大的」，「小的」，「中等」例如可以用图1表示。

一般地说，模糊集A可以用所考虑元素的全体（整个集）到单位区间〔0, 1〕的一个函数μ_A来定义，此函数叫做隶属函数[1]。

进一步还提出了一般模糊集。元素成组的模糊关系[1]、隶属度成组的L-模糊集[2]、元素也成为模糊集的2级模糊集[3]、隶属度成为区间〔0, 1〕上的模糊集的2型模糊集[4]，一般模糊集就是由这些而成的。

1.2 模糊集的运算

模糊集的运算大致可分为以下三类

（1）普通集合运算的推广 也就是求普通集合的并集、交集和余集运算的推广，在模糊集的情况下，这些运算可定义为[1]

交集：$A\cap B=\{\mu_A(u)\wedge\mu_B(u)/u;u\in U\}$ (1)

并集：$A\cup B=\{\mu_A(u)\vee\mu_B(u)/u;u\in U\}$ (2)

余集：$\sim A=\{1-\mu_A(u)/u:u\in U\}$ (3)

其中U是模糊集A和B的全体所成的集合，∧表示min运算，∨表示max运算。

〔例3〕 考虑例1中的[大的]，[小的]，[中等]。此时有

中等或者大的＝中等∪大的

$=\{0.1/3, 0.8/4, 1/5, 0.8/6, 0.2/7, 0.8/8, 1/9, 1/10\}$

非大的＝～大的＝$\{1/0, 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 0.9/6, 0.8/7, 0.2/8\}$

非小的＝～小的＝$\{0.2/2, 0.8/3, 0.9/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10\}$

既非大的也非小的＝非大的∩非小的

$=\{0.2/2, 0.8/3, 0.9/4, 1/5, 0.9/6, 0.8/7, 0.2/8\}$

对于二个（以上）模糊集的相同元素的隶属度，这种类型的算子就是进行min或max之类的运算（～A可看成U－A）。

另外，在一般情况下，∨和∧可以分别换成t-范数（三角形范数）和s-范数下的函数群[5]。还提出了平均算子和补偿算子作为其中的算子[5]。

（2） **元素运算的推广** 为使普通元素定义的函数和运算能适用于模糊集，可以利用以下的推广原理[4]。

〔原理1〕 对全集U中的元素u，所定义的一元函数f，可推广到U中的模糊集A上，定义如下

$$f(A)=f(\{\mu_A(u)|u:u\in U\})$$
$$=\{\mu_A(u)|f(u):u\in U\} \quad (4)$$

这就是说，此函数适用于所有元素，所得结果的隶属度就采用原来元素的隶属度。

〔例4〕 令表示[3左右]的模糊集为

3左右＝$\{0.3/2, 1/3, 0.5/4\}$

此时，[3左右]的平方为

$$3左右^2=\{0.3/2^2, 1/3^2, 0.5/4^2\}$$
$$=\{0.3/4, 1/9, 0.5/16\}$$

对二元函数，此函数适用于各模糊集元素的一切组合，所得结果的隶属度就采用各元素的隶属度的min。

〔原理2〕 对全集U_1的元素u_1和U_2的元素u_2，所定义的二元函数f，可推广到U_1中的模糊集A和U_2中的模糊集B上，定义如下

$$f(A, B)=f(\{\mu_A(u_1)/u_1:u_1\in U_1, \{\mu_B(u_2)/u_2:u_2\in U_2\})$$
$$=\{\mu_A(u_1)\wedge\mu_B(u_2)/f(u_1, u_2):u_1\in U_1, u_2\in U_2\} \quad (5)$$

对不同的u_1，u_2，在$f(u_1, u_2)$存在且取同一值时，统一用max计算其隶属度。

〔例5〕 令表示[3左右]和[4左右]的模糊集为

3左右＝$\{0.3/2, 1/3, 0.5/4\}$

4左右＝$\{0.4/3, 1/4, 0.6/5\}$

时，其加法运算为

3左右＋4左右＝$\{0.3/5, 0.3/6, 0.3/7, 0.4/6, 1/7, 0.6/8, 0.4/7, 0.5/8, 0.5/9\}$

$=\{0.3/5, 0.4/6, 1/7, 0.6/8, 0.5/9\}$

A和B之中有一个是模糊集，而另一个不是模糊集时，设不是模糊集的那一个集合为u，则将此集合看成其元素隶属度均为1的模糊集$\{1/u\}$，就可应用于推广原理。

（3） **对隶属度的运算** 对模糊集的一切隶属度，其运算是适用某函数的运算，可定义为

$$f(A)=f(\{\mu_A(u)/u:u\in U\})$$
$$=\{f(\mu_A(u))/u:u\in U\} \quad (6)$$

也可将余集运算～看作这种类型的运算。

〔例6〕 设例1中[小的]的隶属度的乘方为

$[小的]^2=[\{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.2/3, 0.1/4\}]^2$

$=[\{1/0, 1/1, 0.64/2, 0.04/3, 0.01/4\}]$

常常使用此乘方式作为表示[很小的]的模糊集[5]。

二 模糊集与软件

2.1 模糊集的表示和处理

要想构造应用了模糊集合论的系统，首先必须编出能在计算机上表示和处理模糊集的程序。如果有能表示模糊集的程序设计语

言就方便了，可是这种语言几乎还没有。就作者所知，只有模糊集合论的数据结构系统[7]和用Lisp处理模糊集的系统[8],[9]。

（1） 模糊集合论的数据结构系统 模糊集合论的数据结构系统[7]约有50个模糊集算子，它保持着表示模糊集的数据结构。不仅能表示通常的模糊集，而且还能表示模糊关系、L-模糊集、m级模糊集、n型模糊集以及一般的模糊集。这一系统是用Fortran语言实现的，也可嵌入Fortran中使用。

但是，要将此系统应用于知识信息处理领域中，其功能是不够的，因此，作为此系统的发展，又构造出了用Lisp处理模糊集的系统。

（2） 用Lisp处理模糊集的系统 在用Lisp处理模糊集的系统中[8,9]，将模糊集表示为表。这个系统的特征，除了（1）的系统特征外，还有

①以自然形式将模糊集写成{ }，元组写成< >。

②自己可以方便地定义模糊集用的函数。

③Lisp函数也可适用于模糊集或元组（根据推广原理计算）

④Lisp的大部分功能都能原封不动地使用等。

下面用实例示范一下这一系统的功能。

〔例7〕 为了将模糊集代入符号F1和F2，用Lisp函数setq，可置

```
→(setq F1{0.1/a, 0.2/b, 0.3/c})
  {0.1/A, 0.2/B, 0.3/C}
→(setq F2{0.7/b, 0.2/c, 0.4/d})
  {0.7/B,0.2/C,0.4/D}
```

其中，→是系统的提示符。而且，接着，用户输入下边划有线的部分，系统就评价用户的输入，并将其值表示在下一行。

〔例8〕 为求出F1和F2的并集和交集，可置

```
→(union F1 F2)
  {0.1/A, 0.7/B, 0.3/C, 0.4/D}
→(intersection F1 F2)
  {0.2/B, 0.2/C}
```

除此之外，约有60个内部函数。

〔例9〕 Lisp函数只要在前面加上&记号，就可使其适用于模糊集，计算按推广原理进行。

例4和例5的计算，首先定义模糊数

```
→(setq about-3{0.3/2, 1/3, 0.5/4})
  {0.3/2, 1/3, 0.5/4}
→(setq about-4{0.4/3,1/4,0.6/5})
  {0.4/3, 1/4, 0.6/5}
```

和平方函数

```
→(defun sqr(x)(*xx))
sqr
```

然后可置

```
→(& sqr about—3)
  {0.3/4,1/9, 0.5/16}
→(& +about—3 about—4)
  {0.3/5, 0.4/6, 1/7, 0.6/8, 0.5/9}
```

〔例10〕 例6的计算，利用例9中所定义的函数sqr，可置

```
→(gapply' sqr
      {1/0, 1/1, 0.8/2, 0.2/3, 0.1/4})
  {1/0, 1/1, 0.64/2, 0.04/3, 0.01/4}
```

现在，此系统在Franz Lisp (Unix 4.X BSD), UTI-Lisp (ACOS-6/MVX), mu-Lisp-86 (MS-DOS), Kyoto Common Lisp (Unix4.X BSD) 上运行。

我认为能描述模糊集的这种程序设计语言是很重要的，但是除此之外几乎不存在。为促进今后对这种模糊集的利用，希望能大量设计并广泛普及这种程序设计语言。

2.2 模糊推理

我们所进行的这种推理是基于模糊的规则和模糊的数据（事实）。而推理过程的哪一部分如何进行模糊化，却有几种方法。

（1） 可信度 可信度最初在MYCIN中和产生式系统一起使用，如今在知识工程领域中正得到广泛使用。

可信度使用0和1之间的值表示数据或规则的结论部分的确信程度（在MYCIN中，用

一1和＋1之间的值表示)。而且，使用可信度的推理进行如下[1]。

①由与规则各个条件一致的数据之可信度求出整个条件部分的可信度。例如，此时可以利用求最小值的运算。

②由整个条件部分的可信度和规则结论的可信度求出推理结果的可信度。例如，此中可用乘法运算。

③在二个以上的规则导出同样的推理结果时，由各自的可信度求出该推理结果的整个可信度。例如，此中可以用求最大值的运算。

为了作为软件来实现，只要在通常推理中加上计算可信度的部分就行了，所以在构造现在的专家系统所用的工具中，会用可信度已成了常事。

(2) **近似推理** 是指含有意义模糊的单词的推理

关系：x和y大致相等

事实：x是大的 (7)

结果：y怎么样?

或者

规则：如果x是大的，则y是小的

事实：x是非常大的 (8)

结果：y怎么样?

要想将上述推理公式化，用可信度的方法不能完全处理。

L.A.Zadeh用模糊集的概念公式化了这样的模糊推理[4]。

(7)式推理的一般形式，可考虑

关系：x和y是R

事实：x是A (9)

结果：y是B

其中，R是在全集U×V中的模糊关系，A是U中的模糊集，B是V中的模糊集。此时，可由

$$B=A\circ R=\{\max_{u\in U}(\mu_A(u)\wedge\mu_R(u,v)/v:v\in V\} \quad (10)$$

求出B。上式称为「推理的合成规则」。

其次，考虑用规则的推理

规则：如果x是P，则y是Q

事实：x是A (11)

结果：y是B

其中，P和A是全集U中的模糊集，Q和B是V中的模糊集。此时，规则由算术规则

$$R=\{1\wedge(1-\mu_P(u)+\mu_Q(u))/\langle u,v\rangle:u\in U,\ u\in V\} \quad (12)$$

变换为U×V上的模糊关系R，并由推理的合成规则(10)计算B。

〔**例11**〕 若令

U=V={1, 2, 3, 4, 5},

大的={0.6/4, 1/5}

小的={1/1, 0.6/2}

很大的={0.3/4, 1/5}

则由算术规则(12)和推理的合成规则(10)可知，(8)式的模糊推理变成

很大的∘R={1/1, 0.6/2, 0.3/3, 0.3/4, 0.3/5}

这一结果可看作与「还算小的」近似。

其后的研究结果，除了算术规则以外，还提出了几种新的变换规则，同时也提出了推理的合成规则(10)的改进[5]。

近似推理作为一段推理过程虽然研究得很好，但从软件实现的观点来看，进展就不怎么大，这是因为

①规则的条件数一多时，所需存储就多，执行速度也慢。

②规则很多时的实现方法没有怎么研究。

(3) **在模糊控制中的模糊推理** 模糊控制是这样一种控制方法：以含有模糊集的规则形式描述操作员经验的控制知识，由模糊推理决定控制动作。

例如，模糊控制规则是

r1: if E=大体上是零 & ΔE=正小的

then ΔU=负小的

其中「大体上是零」，「正小的」，「负小的」等都是模糊集。这样的规则有几个，在把E和ΔE的值分开时，①求出条件的符合度作为对这些值的隶属函数之值，②然后计算整个条件部分的符合度，③根据符合度对结论的模糊集加权，④将加权了的各规则的结论结合起来，⑤选出一个值。这是用得最多的推理法，细节在此略去[12]。

这一方法虽然在数据中没有模糊性，但在规则的条件和结论中可以加进模糊性。不过，由于各规则的推理结果结合起来，所以规则的条件和结论成了受限制的形式。

作为软件实现并不那样困难，处理速度也可能很高，通用的模糊控制工具也有几个公司在出售。此外，作为硬件实现的就是采用这一推理方式[13]。

（4） **其它模糊推理法** 除上述方法外，还提出了模糊化Prolog和产生式系统的模糊Prolog[14~17]和模糊产生式系统[18~19]。

模糊Prolog各式各样，而文献[14~16]只处理了可信度方面的模糊性。但是，文献[16]中的Prolog可以用区间值作为可信度。另一方面。文献[17]的内容能表示单词意义具有的模糊性和可信度的模糊性这两个方面，并根据模糊的模式匹配动作。

在Prolog情况下，理论研究也很重要。在只处理可信度时，理论处理也不那样难，但是若要使模糊模式匹配成为可能，理论处理就变得很难了。

模糊产生式系统[18,19]不仅能写出含模糊集的规则和数据，而且也能描述可信度的模糊性。而且，在数据和条件进行模糊匹配时，在结论中可写任意动作（例如，Lisp程序）。虽然在模糊控制的情况，不能把推理结果结合起来，但可选出和模糊数据符合最好的规则，执行其动作部分。

2.3 模糊算法和模糊程序

只用规则不能描述我们所使用的算法和程序。因此，人们还对过程型算法和程序的模糊化进行了研究[20~21]。

（1） **模糊算法** Zadeh将模糊算法定义为一列含模糊集的赋值语句、动作语句和条件语句[20]。以下语句可作为其例子。

①赋值语句，$x \approx 5$, x=small, x is large等

② 动作语句，multply x by y, decrease x slightly, delete the first few occurrence of x, stop等

③ 条件语句：

if x is small then y is large else y is not large,

if x is positive then decrease y slightly,

if x is small then go to 7等

而且，将模糊算法分成五类，并分别举例如下：

① 模糊定义算法：（例）椭圆的定义。

② 模糊生成算法，（例）字母P的生成。

③ 模糊关系算法：给出变量间的关系。模糊控制可看成这种关系的发展形式。

④ 模糊行为算法：状态转移表的推广。

⑤模糊决定算法：（例）经过交叉点。（例）避开障碍物移动物体。

这些例子的解释和执行可以使用推广原理和推理的合成法则，但即席的部分很多。

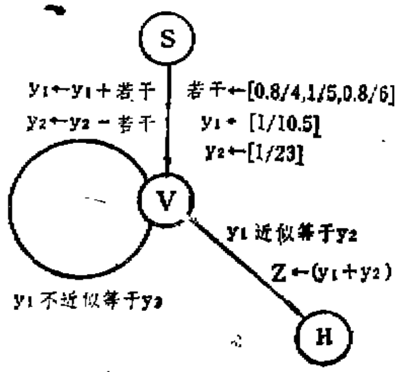

图2 模糊程序的例子

又以字生成和汽车司机的行为（根据模糊命令和正确的地图到达目标）作为模拟实例[21]。

（2） **模糊程序** 在文〔22〕中提出了流程图式的模糊程序。它虽然相当于（1）的特殊情况，但与通常的程序更接近。

〔例12〕 考虑图2的模糊程序[22]。其中，“近似等于”是模糊关系，对相同元素隶属度为1，对异于0.5的元素隶属度是0.5，而在异于1以上的情况是0。“不近似等于”是近似等于的余集。

在这一程序的执行中，于节点V处选择分支的哪一边成了问题。暂且考虑可并行执行两个路径，例如可以将条件“y_1近似等于

y_2”看成与

$$y_1 \leftarrow y_1 \cap (\text{近似等于} \circ y_2)$$
$$y_2 \leftarrow y_1 \cap (y_1 \circ \text{近似等于}) \tag{13}$$

具有同样效果。这里，∩是交集运算，∘是（10）式的合成运算。这一式子意味着将各个变量的值仅限在条件成立的那部分。此外，模糊集合之间的加法和减法用（5）式的推广原理2计算。执行结果汇总在表1中。

表 1　　模糊程序的执行

控制路径	y_1	y_2	z
S	—	—	—
SV	{1/10,5}	{1/23}	—
SVH	Φ	Φ	Φ
SVV	{0.8/14.5, 1/15.5 0.8/16.5}	{0.8/19, 1/18, 0.8/17}	—
SVVH	{0.5/16.5}	{0.5/7}	{0.5/33.5}
SVVV	{0.8/18.5, 0.8/19.5, 1/20.5, 0.8/21.5, 0.8/22.5}	{0.8/15,0.8/14,1/13, 0.8/12, 0.8/11}	—

最近，模糊推理（可看作规则型模糊算法）虽然作了深入研究，但过程式模糊算法和模糊程序似乎没有怎么研究。不过有可能用自然语言编程序，这是一个非常重要的领域，因此希望这种研究能活跃起来。此外，作为重要的程序设计范例的面向对象型的模糊化也很感兴趣。

2.4 模糊数据库

为收集、检索和处理现实世界中的模糊数据，提出了模糊数据库。

（1）**模糊查询**　首先，对于通常的关系模型，可以考虑在查询检索条件中使用模糊集。

V. Tahani以SEQVEL为基础揭示了模糊查询的处理方法[23]。

〔**例13**〕对于图3所示的数据库，考虑查询：［找出最近雇用的年纪轻、工资高的人的名单］[23]。用检索语言写成

```
SELECT   名字
FROM     雇员
WITH（年令＝年轻的or雇用年＝最近的）
         and工资＝高的
```

其中，年轻的，最近的，高的是有各种属性的模糊集

雇员

名 字	年龄	工 资	雇用年
Anderson	30	20000	1974
Brown	30	15000	1974
Long	25	40000	1972
Nelson	55	20000	1950
Smith	25	26000	1975

图 3　雇员数据库

表 2　　模糊查询的处理

组/条件	年龄＝年轻的	雇用年＝最近的	工资＝高的	整个查询
〈Anderson, 30 20000, 1974〉	0.5	0.6	0.5	0.5
〈Brown, 30 15000, 1974〉	0.5	0.6	0	0
〈Long, 26 40000, 1972〉	1	0	1	1
〈Nelson, 55 20000, 1950〉	0	0	0.6	0
〈Smith, 25 25000, 1975〉	1	0.8	0.8	0.8

对于各组雇员，计算和条件的符合度，和模糊集的符合度取作隶属函数的值，而and和or分别用min和max计算。各组符合度的计算列于表2。只要选出必要的定义域，查询的结果为

{0.5/Anderson, 1/Long, 0.8/Smith}

（2）**数据模型的推广**　为表示模糊数据，以前的数据模型已经不够用了，必须推广数据模型。大部分是推广关系模型的，但随着想要表示的模糊性的类型不同，公式化的方法也很不相同。

①模糊关系模型：最简单的推广是在通常关系中加上隶属度而变成模糊关系。虽然已有几个系统可供使用[24,25]，但这些系统不是模糊数据库研究的核心。

② 按类似关系的集中：在检索与查询条件相符的组后，将相同的组汇集一起，提出了按类似关系[26]汇集相似组的模糊数据库[27]。为此，可以把集合看作元素，推广关系模型。

③ 可能性分布-关系模型：用可能性分布[28]表示数据本身所具有的模糊性，提出了可以具有这些模糊性作为属性值的可能性分布-关系模型，从而也可实现基于此模型的数据操作语言[29,30]。

〔例14〕 考虑含有如图4所示的可能性分布的关系[29]。Richard的小孩名字{Judy, Anna}$_p$是可能性分布，表示取值Judy还是Anna。Raimond的年龄为[年轻]的可能性分布，例如，可定义为

年轻＝{0.3/15, 0.6/16, 0.8/17, 1/18, 1/19, 1/20, 1/21, 1/22, 1/23, 0.9/24, 0.8/25, 0.7/26, 0.6/27, 0.3/28, 0.1/29}$_p$

而且也可以将[不知道(unknown)]和[没有(undefined)]以及[NULL(不知道是unknown还是undefined]解释为可能性分布。

对此，如果提出[找出年龄在25岁以上的人]这一查询，那么除了[确实满足]和[确实不满足]查询条件外，还有[可能满足]查询条件。它们为

确实满足＝{1/Suzan, 1/Richard, 1/Smith}

可能满足＝{1/Raimond, 1/Bieckter}

确实不满足＝{1/Tom}

查询条件：[是否25岁以上]并不是模糊的，因此属于各集合的隶属度为0或1（0的情况不写）。若提出具有模糊条件的查询，则属于上述各集合的隶属度就在0和1之间取值。

此外，利用关系中的数据满足查询条件的可能性测度和必要性测度，提出了定义关系代数运算的方法[31]。

而且，还实现了基于波音公司开发RIM

人

名	年龄	孩子名
Tom	23	Tad
Suzan	35	June
Suzan	35	Micah
Richard	40	{Judy, Anna}$_p$
Raimond	年轻	不知道
Bieckter	不知道	没有
Smith	{50, 51}$_p$	NULL

图4 含有可能性分布的关系

（关系信息管理系统）的关系代数型语言[32]。

④ 可能性分布-模糊关系模型，除了③所述的数据值本身所具有的模糊性以外，还有关于数据之间关系的模糊性。在文献[33]中，提出了可能性分布-模糊关系模型。并且，对这种模型，公式化了大部分的关系代数和关系计算[33,34]。

⑤ 理论处理：最近，作为理论处理，研究了对①的模型的模糊函数依赖和无损联接等[35]。

以上介绍了模糊数据库，若以近似通常关系模型的水平建立数据模型，则理论的处理或实现都比较容易，可是表示现实世界的数据之能力却不够。另一方面，若按照现实世界的数据表示建立数据模型，理论的处理或实现就难了。所以有必要找到协调两者的数据模型，不过，目前只是处于提出各种各样数据模型的阶段。而且，还对非关系型的数据模型的模糊数据库感兴趣。

* * *

上面，集中讨论了模糊集及其运算，并概述了模糊集的表示和处理、模糊推理、模糊算法和模糊程序以及模糊数据库。由于涉及的内容范围广泛，所以阐述往往就不够充分。

人类所进行的信息处理几乎全都是模糊信息处理，而模糊信息处理的研究才刚刚开始，有待今后的大力发展。

参考文献（35篇，从略）

〔毕译自日刊《情报处理》1989, vol.30, №8, 王 心校〕