维普资讯 http://www.cqvip.com

近似推理的理论(II)

L. A. Zadeh

4 模糊逻辑(FL)

从广义上讲，模糊逻辑就是近似推理的逻辑；即它与近似推理的关系就像二值逻辑对精确推理的关系一样。

这一节，将集中讨论一种特殊的模糊逻辑(FL)，它的真值是语言的，即是可表示为语言变量*Truth*的值，它的基变量在单位区间内取值。在这个意义上，FL的逻辑基础是真值集合为闭区间[0，1]的Lukasiewicz的$L_{\aleph_1}$逻辑。

FL的基本成分有下述三部分，(i)翻译法则(ii)评估法则，(iii)推理法则。

所谓翻译法则是指这样一组法则，通过这组法则可以从被修饰的或合成命题的成分的翻译得出复合命题的翻译。例如，如果p和q是模糊命题(见(2.8))，把它们分别翻译成：

$$p\to\prod(X_1,\cdots X_n)=F \qquad (4.1)$$

和

$$q\to\prod(Y_1,\cdots Y_m)=G \qquad (4.2)$$

则由合取的合成法则产生合成命题"p and q"的翻译，将在本节的后面加以说明。

评估法则是指这样一些法则，它们从复合命题的成分的真值（或概率值或可能性值）的说明中，得出修饰的或合成命题的真值（或概率值或可能性值）。评估法则的一个典型例子是合取评估法则，它把合成命题"p and q"的真值表示成p和q的一个真值的函数。例如，p和q分别为*not very true*和*quite true*。

FL中基本的推理法则是：(a)投影原理，(b)特指/合取原理，(c)必含原理。这些法则一经结合便导致推理的合成法则，可以把它看成是一个推广的假言推理。

下面我们将简要地讨论模糊逻辑中与近似推理直接有关的那些内容。FL的更详细的讨论可以在Zadeh (1975a) 和 Bellman 和 Zadeh(1976)的文章中找到。

翻译法则

在FL中的翻译法则可以分为以下几种基本类型：

第一类，修饰法则。

第二类，合成法则。

第三类，量词限定法则。

第四类，性词修饰法则。

下面给出的一些命题的简单例子，是用来说明，哪类法则可以应用于哪种命题。

第一类法则. X is very small.

Therese is highly intelligent.

第二类法则. X is small and Y is large.

If X is small then Y is large.

第三类法则. Most Swedes are tall.

Many men are taller then most men.

第四类法则. John is tall is very true.

John is tall is not very likely.

John is tall is quite possible.

结合使用这些法则，可以用于翻译更复杂的命题，例如，

If((*X* is small and *Y* is large) is very likely) then (*Z* is very large is not very likely).

((Many men are taller than most men) is very true) is quite possible.

第一类法则 第一类基本法则是修饰法则。说明如下。

令X是一个在$U=\{u\}$中取值的变量，

维普资讯 http://www.cqvip.com

令F是U的一个模糊子集，并且令p是一个形如"X is F"的命题。如果p的翻译表示为

$$X \text{ is } F \to \prod_X = F \qquad (4.3)$$

那么，修饰的命题"X is mF"(其中m是像不(*not*)，很(*very*)，或多或少(*more or less*)等这类的修饰词。)的翻译，是由下式给出的：

$$X \text{ is } mF \to \prod_X = F^+ \qquad (4.4)$$

其中F^+是由m引入的对F的一个修正。(在Zadeh(1972a, 1975c), Lakoff(1973a, b), Wenstop(1975), Mcvicar—Whelan(1975), Hersh和Caramazza(1976)，和文献目录中列出的其它文章中，有关于各种类型的修饰词的更详细的讨论。)更明确地说，

$$\text{如果} m = \text{not}, \text{则} F^+ = F' \triangleq F\text{的补} \qquad (4.5)$$

$$\text{如果} m = \text{very}, \text{则} F^+ = F^2 \qquad (4.6)$$

$$\text{其中} F^2 = \int_U \mu_F^2(u)/u \qquad (4.7)$$

模糊集合的这种$F = \int_U \mu_F(u)/u$积分的表示的实际含义是说，F是模糊个体$\mu_F(u)/u$的并，$u \in U$，μ_F是F的隶属函数。因此，(4.7)表示F^2的隶属函数是F的隶属函数的平方。

$$\text{如果} m = \text{more or less}, \text{则} F^+ = \sqrt{F} \qquad (4.8)$$

$$\text{其中} \sqrt{F} = \int_U \sqrt{\mu_F(u)}/u \qquad (4.9)$$

$$\text{或者} F^+ = \int_U \mu_F(u) K(u) \qquad (4.10)$$

其中$K(u)$是more or less的核(Zadeh, 1972)。

举一个简单例子，看"X is small"这个命题，其中*small*定义为：

$$small = 1/0 + 1/1 + 0.8/2 + 0.6/3 + 0.4/4 + 0.2/5 \qquad (4.11)$$

$$\text{则} X \text{ is very small} \to \prod_X = F^+ \qquad (4.12)$$

$$\text{其中} F^+ = F^2 = 1/0 + 1/1 + 0.64/2 + 0.36/3 + 0.16/4 + 0.04/5 \qquad (4.13)$$

重要的是，注意(4.6)和(4.8)仅仅是作为标准的缺省定义，如果它们不符合修饰词m的期望的意义，则可以用其它的定义来替换。另外还有一点要注意的是，在(4.3)中的X不一定非得是一元变量。因此(4.3)包含"X and Y are F"这种形式的命题，像"X and Y are close"这样的命题，这里*CLOSE*是$U \times U$中一个二元模糊关系。因此，如果

$$X \text{ and } Y \text{ are close} \to \prod_{(X,Y)} = CLOSE \qquad (4.14)$$

则

$$X \text{ and } Y \text{ are very close} \to \prod_{(X,Y)} = CLOSE^2. \qquad (4.15)$$

第二类法则 第二类的翻译法则是合成法则，适用于命题p的翻译，而p是由命题q和r合成的命题。最常用的合成方式是：合取，析取和条件合成(或蕴涵)。下面是这些合成方式的翻译法则。(我们假定这里的合成在Zadeh(1975c)中定义的意义下是非交互的。)

令X是Y分别是取值于U和V的变量，并且令F和G分别是U和V的模糊子集。如果

$$X \text{ is } F \to \prod_X = E \qquad (4.16)$$

$$Y \text{ is } G \to \prod_Y = G \qquad (4.17)$$

则

(a) X is F and Y is $G \to$

$$\prod_{(X,Y)} = \overline{F} \cap \overline{G} = F \times G \qquad (4.18)$$

(b) X is F or Y is $G \to$

$$\prod_{(X,Y)} = \overline{F} + \overline{G} \qquad (4.19)$$

且 (c_1) If X is F then Y is $G \to \prod_{(X,Y)}$

$$= \overline{F'} \oplus \overline{G} \qquad (4.20)$$

或 (c_2) If X is F then Y is G—$\prod_{(X,Y)}$

$$= F \times G + F' \times V \qquad (4.21)$$

其中$\prod_{(X,Y)}$是二元变量(X, Y)的可能性分布，$\overline{F}$和$\overline{G}$分别是F和G的柱形扩张，即

$$\overline{F} = F \times V \qquad (4.22)$$

$$\overline{G} = U \times G, \qquad (4.23)$$

$F \times G$是F和G的笛卡尔积，它可以表示成$\overline{E} \cap \overline{G}$，并且定义为

$$\mu_{F \times G}(u, v) = \mu_F(u) \wedge \mu_G(v), \quad u \in U, \quad v \in V, \qquad (4.24)$$

$+$是求并运算，$\oplus$是有界和，即

$$u\overline{F'} \oplus \overline{G}(u, v) = 1 \wedge [1 - \mu_F(u) +$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\mu_G(v)] \qquad (4.25)$$

其中＋和－代表算术和与算术差。注意条件合成有两种解释(c_1)和(c_2)。(c_1)是与L_{Aleph1}逻辑中的蕴涵的定义相一致，而(c_2)则是对应于下面的表。

	X	Y
	F	G
	F'	V

举一个非常简单的例子，假定$U=V=1+2+3$。(为了与我们的模糊集合的表示一致，一个有限非模糊集合$U=\{u_1,\cdots u_n\}$可以表示成$U=u_1+\cdots+u_n$)

$$F\triangleq small\triangleq 1/1+0.6/2+0.1/3 \qquad (4.26)$$

$$G\triangleq large\triangleq 0.1/1+0.6/2+1/3$$

则由(4.18)，(4.19)，(4.20)和(4.21)得出：

X is small and Y is large$\longrightarrow\Pi_{(X,Y)}$
$=0.1/(1,1)+0.6/(1,2)+1/(1,3)$
$+0.1/(2,1)+0.6/(2,2)+0.6/(3,2)$
$+0.1/(3,1)+0.1/(3,2)+0.1/(3,3)$

X is small or Y is large$\longrightarrow\Pi_{(X,Y)}=$
$=1/(1,1)+1/(1,2)+1/(1,3)$
$+0.6/(2,1)+0.6/(2,2)+1/(2,3)$
$+0.1/(3,1)+0.6/(3,2)+1/(3,3)$

If X is small then Y is large$\longrightarrow\Pi_{(X,Y)}$
$=0.1/(1,1)+0.6/(1,2)+1/(1,3)$
$+0.5/(2,1)+1/(2,2)+1/(2,3)$
$+1/(3,1)+1/(3,2)+1/(3,3)$

If X is small then Y is large$\longrightarrow\Pi_{(X,Y)}$
$=0.1/(1,1)+0.6/(1,2)+1/(1,3)$
$+0.4/(2,1)+0.6/(2,2)+0.6/(2,3)$
$+0.9/(3,1)+0.9/(3,2)+0.9/(3,3)$.

第三类法则 第三类翻译法则是量词限定法则，这类法则用于处理如下形式的命题。

$$p\triangleq QX \text{ are } F \qquad (4.27)$$

其中Q是一个模糊量词，如大多数(*most*)，许多(*many*)，很少(*few*)，一些(*some*)，几乎全部(*allmost all*)等，X是取值于U的变量，F是U的一个模糊子集。下面是(4.27)式的简单的例子。

(a) Most X's are small;
(b) Some X's are small;
(c) Many X's are very small;
(d) Most large X's are much smaller than α.

最后的(d)是稍微复杂一点的例子，其中α是一个指定数字。

一般地，一个模糊量词是实线的一个模糊子集。然而当Q与一个命题有关，如是*most*的真实程度，则可以把它表示成单位区间的一个模糊子集。因此$Q\triangle most$的隶属函数可表示成

$$\mu_{most}=S(0.5,0.7,0.9) \qquad (4.28)$$

其中S-函数是由(3.5)定义的。

为了能够翻译(4.27)这种形式命题，必须先定义模糊集合的基的概念，即在论域U中落入模糊集F的元素的个数(或比例)。当U是一个有限集合$\{u_1,\cdots,u_n\}$，一个非模糊集合的基的概念的一个可能的扩张，我们称作模糊基，是下面这样说明的。令

$$F=\sum_{\alpha}\alpha F_\alpha \qquad (4.29)$$

是把F变成它的水平截集的分解，即

$$F_\alpha\triangleq\{u|\ \mu_F(u)\geqslant\alpha\} \qquad (4.30)$$

其中αF_α是一个模糊集合，定义为

$$\mu_{\alpha F_\alpha}=\alpha\mu_{F_\alpha} \qquad (4.31)$$

$\sum_\alpha$表示大于α的αF_α的并，$\alpha\in[0,1]$。令$|F_\alpha|$表示非模糊集合F_α的基，则F的模糊基是用$|F|_f$表示，它被定义成$\{0,1,2,\cdots\}$的模糊子集，表示为$|F|_f=\sum_\alpha\alpha/|F_\alpha|$。 (4.32)

举一个简单例子，来看由(2.1)定义的模糊子集small。在这种情况下，

$F_1=0+1$, $|F_1|=2$
$F_{0.8}=0+1+2$, $|F_{0.8}|=3$
$F_{0.6}=0+1+2+3$, $|F_{0.6}|=4$
$F_{0.4}=0+1+2+3+4$, $|F_{0.4}|=5$
$F_{0.2}=0+1+2+3+4+5$, $|F_{0.2}|=6$

且 $|F|_f=1/2+0.8/3+0.6/4+0.4/5+0.2/6$ (4.33)

维普资讯 http://www.cqvip.com

往往必需用一个非模糊的实数（或一个整数）而不是用一个模糊数字来表示一个模糊集合的基，因为这样比较方便。在这种情况下，一个模糊集合的势的概念（DeLuca和Termini 1972）可以用作一个模糊集合的模糊基的数字的概括。因此$U=\{u_1, \cdots u_n\}$的一个模糊子集F的势，定义为：

$$|F| \triangleq \sum_{i=1}^{N} \mu_F(u_i) \tag{4.34}$$

其中$\mu_F(u_i)$是u_i在F中的隶属度，Σ表示算术和。例如，对于用(2.1)定义的模糊集合 small，我们有$|F|=1+1+0.8+0.6+0.4+0.2=4$.

对于一些应用，必需去掉F中那些隶属度低于一个指定阈值的元素的计算。这就是等价于在(4.34)中用$F\cap\Gamma$替换F，其中Γ是一个模糊的或非模糊的集合，由它引入期望的阈值。

由于N的增加使U变成一个连续统，F的势的概念给了一种测度F的方法（Zadeh，1968；Sugeno，1974），它可以看成是在U中属于F的那些元素的比例表达式的极限形式。更明确说，如果ρ是定义在U上的一个密度函数，则所述的测度定义为

$$||F|| \triangleq \int_U \rho(u)\mu_F(\mu)\,du \tag{4.35}$$

其中μ_F是F的隶属函数。例如，如果$\rho(u)du$是那些高度处于区间$[u, u+du]$的男人的比例，则高个男人的比例由下式给定

$$||tall|| = \int_0^{\infty} \rho(u)\mu_{tall}(u)\,du \tag{4.36}$$

利用上面的定义，一个形如"$QX$are$F$"的命题的量词限定法则可以说明如下：

如果$U=\{u_1, \cdots, u_n\}$且

$$X \text{ is } F \longrightarrow \Pi_X = F \tag{4.37}$$

则 $$QX \text{ are } F \longrightarrow \Pi_{|F|} = Q \tag{4.38}$$

并且如果U是连续统，

则 $$QX \text{ are } F \longrightarrow \Pi_{|F|} = Q \tag{4.39}$$

它隐含着更明确的法则

$$QX \text{ are } F \longrightarrow \Pi(\rho) = \mu_Q\left[\int_U \rho(u)\mu_F(u)\,du\right] \tag{4.40}$$

其中$\rho(u)du$是那些值落入区间$[u, u+du]$的X的比例，$\Pi(\rho)$是ρ的可能性，μ_Q和μ_F分别是Q和F的隶属函数。

举一个简单的例子，如果*most*和*tall*分别是用(4.28)和$\mu_{tall}=S(160, 170, 180)$定义的，则

$$\text{Most men are tall} \longrightarrow \Pi(\rho) = S\left[\int_0^{200} \rho(u)S(u, 160, 170, 180)\,du, 0.5, 0.7, 0.9\right] \tag{4.41}$$

其中$\rho(u)du$是那些高度（以cm为单位）属于区间$[u, u+du]$的男人的比例。因此，命题"Mos men are tall"引入了一个高度的密度函数ρ的可能性分布，它用(4.41)的右部来表示。

第四类法则 在可对命题p进行修饰的许多方式中，有三种是与近似推理特别相关的，它们是：

(a) 使用一个语言的真值，像"p is very true"；

(b) 使用一个语言的概率值，如"p is highly probable"；

(c) 使用一个语言的可能性值，如"p is quite possible"。

这里我们将只讨论其中的(a)，关于(b)和(c)的讨论参阅Zadeh(1977)的文章。

作为关于真值限定的翻译法则的预备知识，首先必须理解真值在修饰命题的意义中所起的作用。这样，在FL中，一个命题p的真值定义为，一个参考命题r与命题p的相容性。更明确说，令

$$p \triangleq X \text{ is } F$$

其中F是U的一个子集，且令r是一个具有

这种特殊形式$r \triangleq X$ is u (4.42)

的参考命题，其中u是U的一个元素。则r与p的相容性定义为：

$$Comp(X \text{ is } u/X \text{ is } F) \triangleq \mu_F(u) \tag{4.43}$$

或等价地（用(2.3)的观点），

$$Comp(X \text{ is } u/X \text{ is } F) \triangleq Poss\{X=u|X \text{ is } F\}. \tag{4.44}$$

把(4.43)扩展到r是一个具有下述形式的模糊命题的情况，

$$r \triangleq X \text{ is } G,\ G \subset U \tag{4.45}$$

我们对表达式$\mu_F(G)$的求值应用扩张原理*)，得到

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$Cmop\{X \text{ is } G/X \text{ is } F\} \leq \mu_F(G) \tag{4.46}$$

$$\triangle \int_{[0,1]} \mu_G(u) / \mu_F(u)$$

其中右部是分布在单位区间的模糊个体$\mu_G(u)/\mu_F(u)$的并。因此，“X is G”与“X is F”的相容性是$[0, 1]$区间的一个模糊子集，是用(4.46)定义的。

在模糊逻辑中，命题$p\triangle X$ is F相对于参考命题$r\triangle X$ is G的真值τ定义为r与p的相容性。因此，根据定义

$$\tau \triangleq Tr\{X \text{ is } F/X \text{ is } G\} \triangle Comp\{X \text{ is } G/X \text{ is } F\} \tag{4.47}$$
$$= \mu_F(G)$$
$$= \int_{[0,1]} \mu_G(u)/\mu_F(u)$$

它隐含着命题“X is F”相对于“X is G”的真值τ是单位区间的一个模糊子集，是用(4.47)定义的。那么在这个意义下，一个语言的真值可以看成是对用(4.47)表示的模糊子集τ的语言的近似。(见图2)

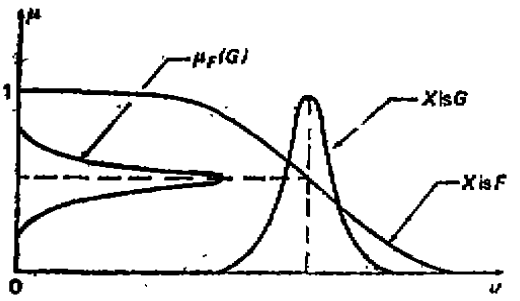

图2 相对真值的概念图形解释

下面是紧接着(4.47)的τ的更明确的表达式。令μ_τ表示τ的隶属函数，且令$v \in [0, 1]$。则

$$\mu_\tau(v) = Max\ u\ \mu_G(u) \tag{4.48}$$

满足$\mu_F(u) = v$。 (4.49)

特别地，如果μ_F是一对一的，则由(4.48)和(4.49)得到

$$\mu_\tau(v) = \mu_G(\mu_F^{-1}(v)),\ v \in [0, 1]. \tag{4.50}$$

举一个简单例子，考虑命题(见图3)

$$p\triangle X \text{ is } F \tag{4.51}$$

$$r\triangle X \text{ is } G \text{ where } G = [a, b]$$

在这种情况下，由(4.50)可知τ是区间，用下式定义$\tau = [\mu_F(b), \mu_F(a)]$。

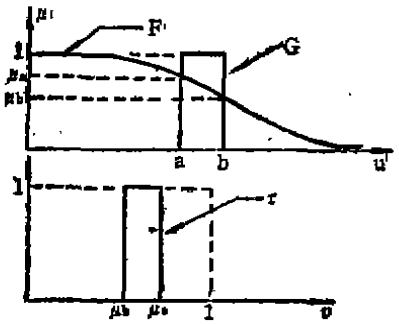

图3 一个区间估计的参考命题的区间估计真值

把p的真值定义成一个参考命题r与p的相容性，为我们翻译“p is τ”(其中τ是$[0, 1]$的一个模糊子集)这种形式的真值限定的命题，提供了一个基础。更明确说，根据关系

$$\tau = \mu_F(G) \tag{4.52}$$

把τ定义成在映射$\mu_F: U \to [0, 1]$之下G的像，这就得出，G的隶属函数可以用τ的隶属函数和μ_F表示如下(见图4)

$$\mu_G(u) = \mu_\tau(\mu_F(u)). \tag{4.53}$$

如果$r\triangle X$ is G是$p\triangle X$ is F的参考命题，我们把真值限定的命题

$$q\triangle X \text{ is } F \text{ is } \tau \tag{4.54}$$

注*)扩张原理(zadeh 1975C)用于将映射$f: u \to v$的定义扩张到u的模糊子集的集合。这样，$f(F) \triangle \int_U \mu_F(u)/f(u)$，其中$f(F)$和$f(u)$分别是$F$和$u$在$V$中的[illegible]

维普资讯 http://www.cqvip.com

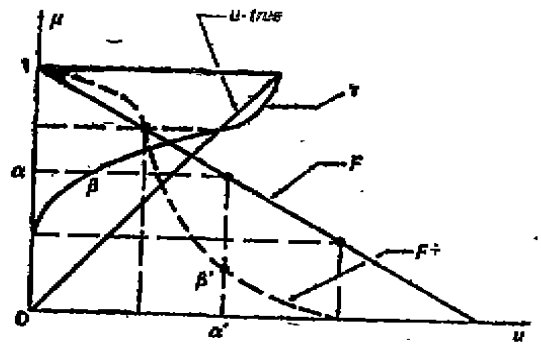

图4 对F进行真值限定的结果.(β被映射成β'.)

解释成参考命题r≜X is G。这样便把我们引到下面的真值限定法则:

如果$\overline{X}$ is $F\longrightarrow\prod_X=F$ (4.55)

则X is F is $\tau\longrightarrow\prod_X=F^+$ (4.56)

其中$\mu_{F^+}(u)=\mu_\tau(\mu_F(u))$。 (4.57)

特别地，如果τ是一元的真值，即

τ≜u-$trme$ (4.58)

其中$\mu_{u-true}(v)$≜v, $v\in[0,1]$ (4.59)

则 X is F is u-$true\longrightarrow X$ is F. (4.60)

举(4.56)的例子，看下面这个命题

p≜Lucia is young is very true (4.61)

其中$\mu_{young}=1-S(25;\ 35;\ 45)$ (4.62)

$\mu_{true}=S(0.6,\ 0.8,\ 1.0)$

且有$\mu_{very\ true}=S^2(0.6,0.8,1.0)$

由于对p应用(4.56)，我们得到

$$p\longrightarrow\pi_{Age(Lucia)}(u)=S^2[1-S(u;\ 25,\ 35,\ 45);\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0] \quad (4.63)$$

它可以用下面的命题粗略地近似。

p^+≜Lucia is very young. (4.64)

同样，对命题

q≜Lucia is not young is very false (4.65)

其中$false$≜$ant\ true$即假定义为真的反义词，

$$\mu_{false}(v)\triangleq\mu_{true}(1-v),\ v\in[0,1] \quad (4.66)$$

$$=1-S(v;\ 0,\ 0.2,\ 0.4)$$

我们得到

$$q\longrightarrow\pi_{Age(Lucia)}=[1-S[S(u;\ 25,35,\ 45);\ 0,\ 0.2,\ 0.4]]^2 \quad (4.67)$$

很容易证实它定义的可能性分布与(4.63)定义的可能性分布是一样的。

上面介绍的这些翻译法则，为我们系统化地表示模糊逻辑中的推理法则以及有关的语义等价和语义必含的概念，提供了必要的基础。下一节我们就着手讨论这些问题。

5.语义等价与语义必含

本节考虑模糊逻辑中两个有关的概念——语义等价和语义必含，它们在近似推理中起着重要的作用。

非形式地，两个命题p和q是语义等价的当且仅当由p和q引入的可能性分布是相等的。更明确说，如果

$p\longrightarrow\prod^p(X_1,\cdots,X_n)=F$

且 $q\longrightarrow\prod^q(X_1,\cdots,X_n)=G$

则 $p\longleftrightarrow q$ iff $\prod^p(X_1,\cdots,X_n)=\prod^q(X_1,\cdots,X_n)$ (5.1)

其中$\prod^p$和$\prod^q$分别是由p和q引入的可能性分布，$X_1,\cdots,X_n$是在p和q中隐含的或显式的变量，$\longleftrightarrow$表示语义等价。

当(5.1)对在p和q中具有上下文相关意义的所有模糊集合都成立时，这个语义等价就被称为是强等价的**)。例如，语义等价

Adrienne is intelligent is true $\longleftrightarrow$ Adrienne is not intelligent is false (5.2)

对$intelligent$和$true$的所有定义都成立，因

注**) 这里定义的强语义等价的概念当p与q是非模糊命题时就简化为谓词逻辑意义下的语义等价概念(Lyndon, 1966)。

维普资讯 http://www.cqvip.com

此它是强等价的，（*false*定义为*true*的反义词）。另一方面，下面的这个语义等价

Lucia is young is very true $\longleftrightarrow$ Lucia is very young (5.3)

不是强等价的，因为它仅对*young*和*true*的某些特殊的定义成立。（见(4.64)和(4.65)及下列等等）通常，像(5.3)成立的情况，其语义等价不是强的而是近似性质的。

一般地，一个语义等价是否是是强的，从上下文就可以看出来。当必须明显标明一个语义等价是强的时，将用$s\longleftrightarrow$表示，而用$a\longleftrightarrow$表示近似的语义等价。

语义必含的概念比语义等价的概念弱，因为p语义必含q（或q被p语义地必含）当且仅当$\prod^p(X_1,\cdots,X_n)\subset\prod^q(X_1,\cdots,X_n)$。

因此，用下面的符号表示。

$$p\longmapsto q \text{ iff } \prod^p(X_1,\cdots,X_n)\subset\prod^q(X_1,\cdots,X_n) \tag{5.4}$$

其中$\longmapsto$表示语义必含，$\prod^p(X_1,\cdots,X_n)$和$\prod^q(X_1,\cdots,X_n)$分别是由p和q引入的可能性分布。

与语义等价的情况一样，如果(5.4)对在p和q中具有上下文相关意义的所有模糊集合都成立，语义必含就是强的。用下面的例子对语义必含的概念加以说明。

$$X \text{ is very small}\longmapsto X \text{ is small} \tag{5.5}$$

用(5.5)表示的语义必含是强的，因为它对所有的"小"的定义都成立。另一方面，表示为

$$X \text{ is large}\longmapsto X \text{ is not small} \tag{5.6}$$

的语义必含的合法性依赖于*large*和*small*的定义方法，因此(5.6)不是强语义必含例子。

在命题具有$p\triangleq X$ is F和$q\triangleq X$ is G这种形式的情况下，很明显

$$X \text{ is } F\longmapsto X \text{ is } G \text{ iff } F\subset G. \tag{5.7}$$

根据这一点以及条件合成的定义(4.20)，马上可得 X is $F\longmapsto X$ is G *iff* If X is F then X is $G\longmapsto\prod_X=U$ (5.8)

或等价地

$$X \text{ is } F\longmapsto X \text{ is } G \textit{ iff } \text{If } X \text{ is } F \text{ then } X \text{ is } G\longleftrightarrow X \text{ is } U \tag{5.9}$$

其中$\prod_X$是X的可能性分布，U是与X相关的论域。同样，根据合取合成的定义，有

$$X \text{ is } F\longmapsto X \text{ is } G \textit{ iff } X \text{ is } F \text{ and } X \text{ is } G\longrightarrow\prod_X=F \tag{5.10}$$

或等价地

$$X \text{ is } F\longmapsto X \text{ is } G \textit{ iff } X \text{ is } F \text{ and } X \text{ is } G\longleftrightarrow X \text{ is } F. \tag{5.11}$$

直观上，(5.11)式的有吸引力的解释是，p语义必含q，如果由"p and q"传达的信息与由p单独传达的信息是一样的。

把语义等价和语义必含的概念应用到近似推理中的工作，将在第6节中进行，这里为进行该项工作做一些准备。把给定命题p翻译成与之有相同意义的其它命题，即强语义等价p的命题的几个法则，加以形式表述是有意义的。

一个决定这种变换的一般的法则，可以非形式地陈述如下。

如果m是一个修饰词，p是一个命题，那么mp语义等价于，将m加到由p导出的可能性分布之上所得到的命题。

这样，由于对$m\triangleq$not应用这个法则，并且利用翻译法则(4.5)，(4.56)和(4.40)，我们得到下列决定一个命题的否定的具体的法则：

$$\text{(a) } not(X \text{ is } F)\longleftrightarrow X \text{ is not } F \tag{5.12}$$

例如，$not(X \text{ is } small)\longleftrightarrow X$ is not small; (5.13)

$$\text{(b) } not(X \text{ is } F \text{ is } \tau)\longleftrightarrow X \text{ is } F \text{ is } not\ \tau \tag{5.14}$$

如，$not(X$ is small is very true$)\longleftrightarrow X$ is small is not very true; (5.15)

$$\text{(c) } not(QX \text{ are } F)\longleftrightarrow (not\ Q)X \text{ are } F \tag{5.16}$$

如，not(many men are tall)$\longleftrightarrow$(not many) men are tall, (5.17)

维普资讯 http://www.cqvip.com

同样，对 $m \triangleq$ very，我们得到

(a) $very(X \text{ is } F) \longleftrightarrow X \text{ is } very\ F$ (5.18)

(b) $very(X \text{ is } F \text{ is } \tau) \longleftrightarrow X \text{ is } F \text{ is } very\ \tau$ (5.19)

(c) $very(QX \text{ are } F) \longleftrightarrow (very\ Q)\ X \text{ are } F$ (5.20)

另外，由翻译公式(4.5)，(4.40)和(4.56)马上可得 $X \text{ is } F \text{ is } \tau \longleftrightarrow X \text{ is not } F \text{ is ant } \tau$ (5.21)

和 $QX \text{ are } F \longleftrightarrow (\text{ant } Q)X \text{ are not } F$. (5.22)

其中ant τ和ant Q分别表示τ和Q的反义词。(见 (4.66)) 同样，对m=very，我们有

$X \text{ is } F \text{ is } \tau \longleftrightarrow X \text{ is very } F \text{ is } {}^2\tau$ (5.23)

其中在τ之上的左平方操作是由下式定义的。

$${}^2\tau = \int_0^1 \mu_\tau(v)/v^2, \quad v \in [0,1] \quad (5.24)$$

或等价地

$$\mu_{2_F}(v) = \mu_\tau(\sqrt{v}) \quad (5.25)$$

其中μ_τ是τ的隶属函数。然而，正如我们后面将要看到的那样，当在"QX are F"中的F被修饰成$very\ F$时，我们只能够断言语义必含而不是语义等价—表示成

$QX \text{ are } F \longleftrightarrow ({}^2Q)F \text{ are very } F$ (5.26)

其中 $${}^2Q = \int_0^1 \mu_Q(v)/v^2 \quad (5.27)$$

或等价地

$$\mu_{2_Q}(v) = \mu_Q(\sqrt{v}). \quad (5.28)$$

在结束否定规则的讨论时，应当注意用(5.16)表示的否定法则与谓词演算中熟悉的否定法则(Lynodon 1966)在形式上好像是不同的。用后者，当F被解释成一个非模糊的谓词时，可表示为：

$not\ (\text{all } X \text{ are } F) \longleftrightarrow \text{some } X \text{ are not } F.$ (5.29)

然而，通过使用(5.22)很容易看出，(5.29)的右部语义地等价(5.16)的右部。更明确说，由(5.22) 有 (not all) X are $F \longleftrightarrow$(ant (not all) X)are not F

如果$some$被定义为：

$some \triangleq \text{ant (not all)}$ (5.30)

则 (not all) X are $F \longleftrightarrow$some X are not F (5.31)

即与 (5.29) 是一致的。

评注 应当注意，在这一节及前几节给出的大部分定义，特别是关于模糊命题的语义等价和语义必含的定义是非模糊的，而且大都是相当精确的。然而我们应当了解的是，如果需要的话，所有这样的定义都可以通过使用下述的一般的程式，将其模糊化。

令U是一个论域，用u表示U的一个类属元素。在U中的一个概念C，它是U的一个子集A (或U^n，$n>1$)，是用一个谓词P来定义的，使得如果$u \in A$，则$P(u)$为真，即u是C的一个实例，否则$P(u)$为假。假定$P(u)$具有$P(f(u))$这种形式，其中如果$f(u)=0$则$P(f(u))$为真，而当$f(u)>0$时，$P(f(u))$为假。因此A和与之相关的概念C，通过把u在A中隶属度定义成一个$f(u)$的单调函数，(它假定当$f(u)=0$时，取值为1)这样被模糊化。(一般这样一个函数的定义，是依赖于应用的，而不是通用性的。) 在这个意义下，具有上述格式的任何定义，可以看成是为定义中用到的概念的模糊化提供了一种机制。

作为这个程式的例子，我们来看用 (5.1) 定义的语义等价的概念。在这种情况下，语义等价的概念可以通过把p和q语义等价的程度定义成Π^p和Π^q之间的"距离"的单调函数这种方法来模糊化，而以某种方式定义的距离函数反映了应用领域的特殊性质。当然，还应当了解，该概念也可以通过其它的方式模糊化，这些方式可以根据概念的非模糊定义直接地进入。(未完待续)

〔金雅芳 译自《Machine Intelligence》(J.E.Hayes, D. Michie, and L.I. Mikulich, eds) vol.9, Elsevier, New York, pp. 149-194, 1979，声 钟校〕