维普资讯 http://www.cqvip.com

13－18 相关逻辑 推理 ③

计算机科学1993Vol.20No.4

相关逻辑及其推理

TP301.5

孙吉贵 刘叙华
（吉林大学计算机科学系，长春130023）

摘 要

为了排除“实质蕴涵怪论”，Ackermann于五十年代提出了相关逻辑。尔后，由Anderson和Belnap等人进行了研究。近期，其进一步研究主要集中在美国和澳大利亚。本文简要介绍了命题相关逻辑R的一个子系统LR及其自动推理方法。

1. 相关逻辑LR (Relevant Logic)

Russell把p→q定义为¬p∨q，即只要p假或q真，p→q就为真，这就是实质蕴涵。按照实质蕴涵的定义就出现了一些“蕴涵怪论”。如：1）p→(q→p)，2）¬p→(p→q)，3）(p→q)∨(q→p)，4）p&～p→q，5）p→q∨～q。这些“怪论”的出现引起了逻辑学界的一些争论。为了排除这些“怪论”，Lewis在本世纪初提出了“严格蕴涵”，但仍然存在“严格蕴涵怪论”。

为了进一步阐明蕴涵的前件与后件的必然联系，Ackermann于五十年代提出了相关逻辑。在相关逻辑中，p蕴涵q的必要条件是：p与q有共同的命题变元。

1.1 LR的Hilbert型公理系统

下面我们介绍命题相关逻辑R的一个子系统LR的Hilbert型公理系统。

LR的语言部分：

1）可数的命题变元集{p, q, r, p_1, …}。

2）命题常元t；t解释为所有定理的合取。

3）命题常元T；T解释为所有命题的析取。

4）联结词：～（否定），&（合取），∨（析取），→蕴涵，其约束力按上述顺序递减。

5）公式：用A, B, C, D, A_1, …表示任一公式变元，即公式模式，公式集$\mathscr{PL}_f$归纳定义如下：

（1）若A∈{p, q, r, p_1, …}∪{t, T}，则A∈$\mathscr{PL}_f$。

（2）若A, B∈$\mathscr{PL}_f$，则～A, A&B, A∨B, A→B∈$\mathscr{PL}_f$。

LR的推理部分：

1）Hilbert型公理模式

蕴涵公理：

A_1 A→A

A_2 (A→B)→((C→A)→(C→B))

A_3 (A→B)→((B→C)→(A→C))

A_4 (A→(A→B))→(A→B)

A_5 (A→(B→C))→(B→(A→C))

蕴涵/否定公理：

A_6 ～～A→A

A_7 (A→～A)→～A

A_8 (A→～B)→(B→～A)

合取/析取公理：

A_9 A&B→A

A_{10} A&B→B

A_{11} (A→B)&(A→C)→(A→B&C)

A_{12} A→A∨B

A_{13} B→A∨B

A_{14} (A→C)&(B→C)→(A∨B→C)

常元公理：

A_{15} (t→A→A)&(A→(t→A))

A_{16} A→T

维普资讯 http://www.cqvip.com

2）推理规则

R_1　若$\vdash A$且$\vdash A \rightarrow B$，则$\vdash B$.

R_2　若$\vdash A$且$\vdash B$，则$\vdash A \& B$.

定义命题常元F，f：

Deff：$f = \sim t$.

DefF：$F = \sim T$

定义二元联结词∘，+和⟺：

Def∘：$A \circ B = \sim(A \rightarrow \sim B)$　聚合(fusion)

Def+：$A + B = \sim A \rightarrow B$　分裂 (fission)

Def⟺：$A \Longleftrightarrow B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ 等值 (equivalence)．

注：这个公理系统不具有独立性。关于联结词∘，+，⟺，完全可以在公理系统中加进适当的公理，把它们做为初始联结词，而不把它们定义成表达式的缩写。

1.2　LR中的一些事实

1）LR中加进下面的分配公理就得到了一般的相关逻辑R。

A_{17}　$A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$

因此，LR中分配律不成立。

2）下述De Morgan等值式是LR中的定理：

T_1　$\sim(A \vee B) \Longleftrightarrow \sim A \& \sim B$

T_2　$\sim(A \& B) \Longleftrightarrow \sim A \vee \sim B$

T_3　$\sim(A \circ B) \Longleftrightarrow \sim A + \sim B$

T_4　$\sim(A + B) \Longleftrightarrow \sim A \circ \sim B$

3）LR中的联结词&，∨，∘，+都具有结合性和交换性。

4）&，∨具有幂等性，而∘，+没有。即：$A \& A \Longleftrightarrow A$，$A \vee A \Longleftrightarrow A$　是LR中的定理。而$(A \circ A) \Longleftrightarrow A$，$(A + A) \Longleftrightarrow A$不是LR中的定理。

5）在LR中，下述析取三段论公理DS和析取三段论推理规则γ不成立。

DS　$A \& (\sim A \vee B) \rightarrow B$

γ　若$\vdash A$且$\vdash \sim A \vee B$，则$\vdash B$

6）命题相关逻辑R是不可判定的，而它的子系统LR是可判定的。

7）LR具有有限模型性质，但没有有限特征模型。

2．LR的可判定性

2.1　LR的Gentzen型形式系统L_1

设α，β是公式的多重集，称α和β是同类的，记为$\alpha \simeq \beta$，当且仅当α的生成集与β的生成集相同。多重集α弱包含于多重集β，记为α / β，当且仅当对任意公式A，$c(A; \alpha) \leqslant c(A; \beta)$，其中c为计数函数，$c(A; \alpha)$表示A在α中的出现次数。称α强包含于β，记为$\alpha \wr \beta$，当且仅当：(1) $\alpha \simeq \beta$，(2) α / β。

这里使用右端型Gentzen形式化系统。

形式系统L_1：

公理：1）p，～p　记为Axp

2）t　记为Axt

3）T，α　记为AxT

其中p为任意命题变元。

联结规则第一组：

1) $\dfrac{\alpha,\ A}{\alpha,\ \sim\sim A} P_{\tilde{\sim}}$　2) $\dfrac{\alpha,\ \sim A}{\alpha,\ \sim(A \& B)} P_{\tilde{\&}}$

3) $\dfrac{\alpha,\ \sim B}{\alpha,\ \sim(A \& B)} P_{\tilde{\&}}$

4) $\dfrac{\alpha,\ \sim A,\ B}{\alpha,\ A \rightarrow B} P_{\rightarrow}$

5) $\dfrac{\alpha,\ A \quad \beta,\ \sim B}{\alpha,\ \beta,\ \sim(A \rightarrow B)} P_{\tilde{\rightarrow}}$

6) $\dfrac{\alpha,\ \sim A,\ \sim B}{\alpha,\ \sim(A \circ B)} P_{\tilde{\circ}}$

7) $\dfrac{\alpha,\ \sim A \quad \beta,\ \sim B}{\alpha,\ \beta,\ \sim(A + B)} P_{\tilde{+}}$

8) $\dfrac{\alpha,\ \sim A \quad \alpha \sim B}{\alpha,\ \sim(A \vee B)} P_{\tilde{\vee}}$

联结规则第二组：

1) $\dfrac{\alpha,\ A}{\alpha,\ A \vee B} P_{\vee}$　2) $\dfrac{\alpha,\ B}{\alpha,\ A \vee B} P_{\vee}$

3) $\dfrac{\alpha,\ A \quad \alpha,\ B}{\alpha,\ A \& B} P_{\&}$　4) $\dfrac{\alpha,\ A,\ B}{\alpha,\ A + B} P_{+}$

5) $\dfrac{\alpha,\ A \quad \beta,\ B}{\alpha,\ \beta,\ A \circ B} P_{\circ}$

结构规则：

1) $\dfrac{\alpha,\ A, A}{\alpha,\ A}W$　　2) $\dfrac{\alpha}{\alpha,\ f}K_f$

说明：联结规则分成两组是为了下文的方便，K_f规则的一般情况K规则$\dfrac{\alpha}{\alpha, A}K$不是$L_1$中的规则，即K规则与$L_1$是不相容的。

在规则的结论中新引进的公式称为规则的主成份；组成主成份的前提中的公式称为规则的合成分量；从前提到结论被删除的公式称为规则的半参成份。

设L是LR的任一Gentzen型的形式系统，多重集α的一个L-证明是一个多重集的二叉树τ，使得τ的叶节点多重集都是公理，其它节点多重集都是通过对它前面的一个多重集（或两个多重集）节点使用一条L的规则所得到的直接后继，并且α是τ的根节点多重集。

关于L_1与LR的关系，有

定理1 (Belnap and Wallace)　对任意公式A，A是LR中的定理当且仅当A是L_1-可证的。

2.2 LR的判定性，Kripke-Meyer判定过程

从定理1可以看出，LR的判定性问题转化为L_1的判定性问题。为了判定多重集α是否L_1-可证，我们采用证明搜索树策略。α的一个证明搜索树，记为pst(α)，是一个n叉树，使得每个节点标记一个多重集，α是树的根，如果α是L_1-可证的，则pst(α)有一个作为α证明的子树。

pst(α)的构造过程是通过逆向使用L_1的规则进行的。以α为结论，去发现所有可能的前提（对）作为α在pst(α)中的直接后继，以此类推逐步生成后继节点。对任意有限多重集α，因为α中公式个数有限，L_1的规则个数有限，所以生成树在每一节点只能有有限个分叉（直接后继），因此有这样的构造过程。这个过程能否成为算法，关键在于pst(α)的每个枝长能否有限，从而L_1的判定性归结为pst(α)枝长的有限性。那么pst(α)枝长能否有限呢？如果无法保证其有限，问题的焦点又在哪里呢？一般情况下，我们无法保证pst(α)枝长有限，问题的结症在于收缩规则，即W规则。例如，pst(α)的一个分枝总使用W规则，则它将是无限的，也就是说W规则是难以控制的。想办法删除W规则，使得W规则的功能嵌入到联结规则中去，这就是下面的另一种Gentzen型形式系统L_k。

形式系统L_k：

公理和K_f规则同L_1。

联结规则第一组：

1) $\dfrac{\beta,\ A}{\alpha, \sim\sim A}P_{k\tilde{\sim}}$　　2) $\dfrac{\beta,\ \sim A}{\alpha, \sim(A\&B)}P_{k\tilde{\&}}$

3) $\dfrac{\beta,\ \sim B}{\alpha,\ \sim(A\&B)}P_{k\tilde{\&}}$

4) $\dfrac{\beta,\ \sim A,\ B}{\alpha,\ A\to B}P_{k\to}$

5) $\dfrac{\beta,\ A \quad \gamma, \sim B}{\alpha, \sim(A\to B)}P_{k\tilde{\to}}$　6) $\dfrac{\beta, \sim A, \sim B}{\alpha,\ \sim(A\circ B)}P_{k\tilde{\&}}$

7) $\dfrac{\beta, \sim A \quad \gamma, \sim B}{\alpha,\ \sim(A+B)}P_{k\tilde{+}}$　8) $\dfrac{\beta, \sim A \quad \beta, \sim B}{\alpha, \sim(A\vee B)}P_{k\tilde{\vee}}$

联结规则第二组：

1) $\dfrac{\beta,\ A}{\alpha,\ A\vee B}P_{k\vee}$　　2) $\dfrac{\beta,\ B}{\alpha,\ A\vee B}P_{k\vee}$

3) $\dfrac{\beta, A \quad \beta,\ B}{\alpha,\ A\&B}P_{k\&}$　4) $\dfrac{\beta, A,\ B}{\alpha,\ A+B}P_{k+}$

5) $\dfrac{\beta,\ A \quad \gamma,\ B}{\alpha,\ A\circ B}P_{k\circ}$

其中，对每一个联结规则，有δ使得：1) β/δ，2) γ/δ，3) α/β，γ

所有只有一个前提的L_k规则，β比α至多多若干个规则的主成份拷贝；$P_{k\&}$和$P_{k\tilde{\vee}}$同样允许主成份拷贝在前提中出现，但当主成份拷贝在其中一个前提中是半参成份时，在另一个中也是半参成份；其余三条规则$P_{k\tilde{\sim}}$、$P_{k\tilde{+}}$，$P_{k\circ}$收缩满足：设pc为规则的主成份，则：

1) pc的半参拷贝可以出现在β中，或γ中，或者两者中都不出现，或者两者中都出

维普资讯 http://www.cqvip.com

维普资讯 http://www.cqvip.com

现。

2）若$c(D;\alpha)=n$，则$c(D;\beta)\leqslant n$，$c(D,\gamma)\leqslant n$，并且$c(D;\beta)+c(D;\gamma)\geqslant n$。即对任意α中成员有三种情况作为来源：或者来源于β，或者来源于γ，或者同时来源于β和γ。后一种情况恰是参成份的收缩。

Kripke和Meyer等已经证明：

定理2 L_k等价于L_1。

从形式上看L_k系统的规则要比L_1的规则复杂得多。L_k中虽然删除了W规则，但它的联结规则的前提增加了可选性。注意到L_k的联结规则的收缩功能主要用于主成份的收缩，而对于参成份的收缩限制极强。如果再要求后继节点与前驱节点满足Curry性质，则可降低规则前提的可选性，解决枝长有限问题。

称α的潜在证明τ具有Curry性质当且仅当对τ中所有多重集β和γ，如果γ是β的后继，即γ位于β到一个叶节点的分枝中，则β|γ不成立。称pst(α)具有Curry性质当且仅当在pst(α)中任意α的潜在证明具有Curry性质。

定理3（Curry） 对任一多重集α，若α是L_k-可证的，则存在α的L_k-证明具有Curry性质。

定理3说明我们只需寻找具有Curry性质的L_k-证明即可。

Curry性质不仅保证了节点生成的无循环性，而且也排除了后继多重集强包含于其前驱多重集节点的生成。

注意到：任一L_k-证明都具有子公式性质，因此下面的同类引理成立。

同类引理 设Φ是pst(α)的任意一个分枝，K是Φ上多重集的集合，则$K/\simeq$有限，即同类关系把K分成有限个等价类。

现在已经得到：在pst(α)的一个分枝中，多重集的集合关于同类关系≃的等价类个数有限，而由Curry性质知一个分枝上的多重集是互不相同的。所以为证明pst(α)具有有限枝长性质，剩下的问题就是去证明每一个等价类中多重集个数有限。

称一个多重集序列是不可约化的同类序列当且仅当序列中任意两个多重集β和γ满足：

（1）$\beta\simeq\gamma$；

（2）若β在γ的前面，则β/γ不成立。

考虑任一等价类$\mathscr{L}\in K/\simeq$，则$\mathscr{L}$的元素按照分枝Φ从根到叶出现的次序构成一个多重集序列。由Curry性质知，$\mathscr{L}$恰是一个不可约化的同类序列。因此，为证明$\mathscr{L}$是有限的，只需证明下述结论。

定理4（Kripke） 任一不可约化的同类序列有限。

这个定理的结构与吴文俊方法中的基本定理——Ritt-Wu引理的结构很相似，有优美的几何直观，严格证明可以用多重归纳法给出。

由同类引理和定理4，我们得到pst(α)具有有限枝长性质。因此，L_k是可判定的。于是有：

定理5（Kripke，Meyer） LR是可判定的。

我们称上述判定过程为Kripke-Meyer判定过程。

3. LR的自动定理证明，形式系统L_5

Kripke-Meyer判定过程已经为LR的自动定理证明提供了一条途径。为了提高LR的自动定理证明的效率，Thistlewaite给出了LR的其它Gentzen型形式系统，最后得到了形式系统L_5，证明了L_5是可判定的，并在否定范式的意义下，L_5等价于L_1。

3.1 形式系统L_2、L_3、L_4

象经典的命题逻辑一样，引入范式能够化简可判定性的证明，便于自动推理。

记公式A的否定范式为nrm(A)，则A是L_1-可证的当且仅当nrm(A)是L_1-可证的。由于否定范式中不含联结词→，pst(α)具有子公式性质，因此对于否定范式形式的公式A，pst(A)不会使用与联结词→有关的规则，因而L_1的联结规则第一组在搜索过程中

维普资讯 http://www.cqvip.com

不被使用。这就得到了形式系统L_2：L_2是在L_1中删除联结规则第一组所得到的形式系统。

L_2的优点在于减少了系统的推理规则数，因此降低了pst(α)每个节点的直接后继节点数。但L_2系统中有W规则，而我们知道W规则是搜索树无限的结症所在，因此，需要进一步的系统。

形式系统L_3：L_3与L_2具有相同的公理，联结规则和K_f规则，它的收缩规则只由下面三个特例组成：

$$\frac{\alpha, l, l}{\alpha,\ l} W_l \qquad \frac{\alpha, A \circ B, A \circ B}{\alpha,\ A \circ B} W_\circ$$

$$\frac{\alpha, A \vee B, A \vee B}{\alpha,\ A \vee B} W_\vee$$

其中l是任一文字。

可以证明，W规则的另外两个特例是L_3可接受的，于是L_3等价于L_2。

LR的自动定理证明的实现过程是证明搜索树pst(α)的生成过程，也就是说是一个产生式系统。产生式系统的搜索策略分为两类：不可撤回式和试探式。如果一个产生式系统是可交换系统，则可以使用不可撤回式控制策略，搜索过程是高效的。pst(α)的生成过程不是一个可交换的系统，但规则P_+和$P_\&$与其它规则是可交换的。因此当pst(α)中某一多重集可以使用P_+或$P_\&$进行约化时，就可以不选择地使用P_+或$P_\&$规则。这样可以部分地减少搜索树的分叉，提高搜索效率。把P_+、$P_\&$规则的可交换性表述在系统内部，就得到了形式系统L_4。

L_4与L_3具有相同的公理和除$P_\circ$，$P_\vee$之外的规则，$P_\circ$与$P_\vee$修改为$P'_\circ$，$P'_\vee$如下：

$$\frac{A, \alpha \quad B, \beta}{A \circ B,\ \alpha, \beta} P'_\circ \qquad \frac{A,\ \alpha}{A \vee B,\ \alpha} P'_\vee \qquad \frac{B,\ \alpha}{A \vee B,\ \alpha} P'_\vee$$

其中，α和β都不包含可交换公式。

显然，L_4与L_3等价。

3.2 形式系统L_5，Thistlewaite判定过程

如果能够在L_4中删除W规则的三个特例，并能证明Curry性质与P_+，$P_\&$的交换性是相容的，则使用类似于证明L_4可判定的方法就能得到另一个可判定系统——形式系统L_5。**形式系统L_5：**

公理同L_1。

结构规则： $\frac{\alpha}{\alpha,\ f} K_f$

联结规则：

1) $\frac{\alpha, A, B}{\alpha,\ A + B} P_+$ 2) $\frac{\alpha, A \quad \alpha, B}{\alpha,\ A \& B} P_\&$

3) $\frac{\beta, A}{\alpha, A \vee B} P'_\vee$ 4) $\frac{\beta, B}{\alpha, A \vee B} P'_\vee$

$P'_\vee$满足条件：

(A) α中每一成员都是不可交换公式。

(B) 若c(A∨B；α)=0，则β满足：

(a) β=α 或

(b) β=〔〔α, A∨B〕〕

(c) 若c(A∨B；α)>0，则β=α。

5) $\frac{B, A \quad \gamma, \beta}{\alpha, A \circ B} P''_\circ$

$P''_\circ$满足条件：

(A) α中每一成员都是不可交换公式。

(B) 对α中任一公式C：

(a) 若c(C；α)=1，则下述三条件之一成立：

(i) c(C；β)=1 且c(C，γ)=0

(ii) c(C；β)=0 且c(C，γ)=1

(iii) c(C；β)=1 且c(C，γ)=1

(b) 若c(C，α)>1，则c(C，α)=c(C；β)+c(C，γ)。

(C)

(a) 若c(A∘B，α)=0，则下述四条之一成立：

(i) c(A∘B；β)=c(A∘B；γ)=0

(ii) c(A∘B，β)=1，且c(A∘B，γ)=0

(iii) c(A∘B；β)=0且c(A∘B，γ)=1

(iv) c(A∘B，β)=c(A∘B，γ)=1

(b) 若c(A∘B；α)=1，则同(B)(a)。

(c) 若c(A∘B，α)=1，则同(B)(b)。

维普资讯 http://www.cqvip.com

从上面规则的条件中，我们可以看出：在证明搜索过程中，P_+，$P_\&$优先使用，仅当α中不含有可交换公式时，才能使用$P'_\circ$和$P'_\vee$。W规则的功能嵌入到$P'_\vee$和$P'_\circ$规则中，具体地说：对于$P'_\vee$规则，收缩仅发生在条件(B)(b)，且每次收缩1；对$P'_\circ$规则，收缩仅发生在条件(B)(a)(iii)、(C)(b)(iii)，每次收缩1；(C)(a)(ii)、(iii)、(iv)，每次收缩最多2；$P'_\vee$规则仅收缩主成份拷贝；$P'_\circ$规则的(B)(a)(iii)收缩参成份，其余是收缩主成份拷贝。因此，L_5对W规则影响的限制要比L_4对W规则影响的限制强得多，从而使得在生成pst(α)过程中，规则前提(对)的可选性显著减少。

〔1〕中仅证明了：W_I，$W_\circ$，$W_\vee$规则是L_5可接受的，因而使用了加限制的Curry性质证明L_5的可判定性，即：

定理6 L_5是可判定的；且在范式意义下，L_5等价于L_1。

我们在〔6〕中证明了W_+，$W_\&$仍是L_5可接受的，且不增加证明的长度，因此，L_5的证明具有Curry性质。从而化简了L_5的可判定性证明，也提高了具体实现中证明搜索剪枝的效率。

Thistlewaite依据LR的形式系统L_5，设计实现了LR的自动定理证明系统KRIPKE[1]，用实例验证了他的系统确比Kripke-Meyer判定过程的效率高。

参考文献

〔1〕P.B.Thistlewaite, et al., Automated Theorem-Proving in Non-Classical Logics, Pitman Publishing, London, 1988

〔2〕A. R. Anderson et al., Entailment, The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1, Princeton University Press, New Jersey, 1975

〔3〕C.G.Morgan, Methods for Automated Theorem Proving in Nonclassical Logics, IEEE Transactions on Computer C-25, 852-862, 1976

〔4〕A. Urquhart, The Undecidability of Entailment and Relevant Implication, J.Symbolic Logic 40, 1059-1073, 1984

〔5〕A.W.Bollen, Relevant Logic Programming, J. Automated Reasoning 7: 563-585, 1991

〔6〕Ji-gui Sun and Xu-hua Liu, The Curry Property for automated theorem proving in the relevant logic LR, (待发表)

(接第35页)

〔8〕K. P. Sycara et al., Index Transformation and Generation for Case Retrieval, Proc. of DARPA Workshop on CBR, 1989

〔9〕W. Dilger, Object-Oriented Knowledge Representation ——An Overview, J. New Gener. Comput. Syst., Vol.2, 1989

〔10〕J. G. Carbonell, Learning by Analogy: Formulating and Generalizing Plans from Past Experience, Machine Learning: An AI Approach, Tiogo Pub. Co., CA, 1985

〔11〕D. Genter, Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy, Cognitive Science, Vol.7, 1983

〔12〕奚建清，面向对象数据库模型及语言系统的研究，工学博士论文，国防科大，1992