58-59，54 神经网络 稳定性 ~~平衡~~ 非对称网络 (12)

计算机科学Vol.20№.1 1993

非对称互联神经网络平衡点的稳定性分析*)

但 琦（后勤工程学院训练部 630043重庆）

童 頫（上海科技大学计算机系 201800上海）

TP18

摘 要

平衡点的稳定性对于大规模动态系统的神经网络是十分重要的。本文研究了非对称互联网络的向量微分方程的平衡点之稳定性。

从数学观点看，神经网络可以视为一个具有高度非线性的超大规模连续时间动力系统，其最终行为由它的吸引子所决定。在人工神经网络的应用方面，无论是联想存储记忆，还是神经优化计算，都毫无例外地利用了网络系统的稳定吸引子的性质。因此，就支持神经网络应用的基础理论而言，研究其动力学行为，尤其是稳定性的判定问题，是十分有意义的。

在互联的神经网络中，连接权矩阵是对称的Hopfield网络，可用"能量函数"的极小值，找到网络的稳定的平衡点。在连接权矩阵非对称的互联网络中，当输入输出特性函数连续可微时，Michel[1]用大规模系统定性分析理论，对非对称网络平衡点的稳定性进行了分析。但其条件很强，验证平衡点是否稳定很麻烦。本文提出一次近似判别法，来得到平衡点是否稳定的结论。（对于输入输出特性函数分段连续可微的情况将另文论述）

一、向量化Hopfield模型

Hopfield神经网络模型的基本组成单元，如图1所示，其动态特性可用微分方程加以描述：

$$C_i\dot{u}_i=\sum_{j=1}^{N} T_{ij}v_j-\frac{1}{\tau_i}u_i+I_i(t)\quad i=1\cdots N \tag{1}$$

其中，$C_i>0$；$T_{ij}=1/R_{ij}$；$R_{ij}\in R(-\infty,+\infty)$；$1/\tau_i=1/R_i+\sum_{j=1}^{N}|T_{ij}|$，$R>0$；$I_i:R^+=(0,+\infty)\to R$，$I_i$是连续函数；$\dot{u}=du_i/dt$；$v_i=g_i(u_i)$；$g_i:R\to(-1,1)$，$g_i$是连续可微且严格单增的，且$g_i(0)=0$。各参数的物理意义见[1]。

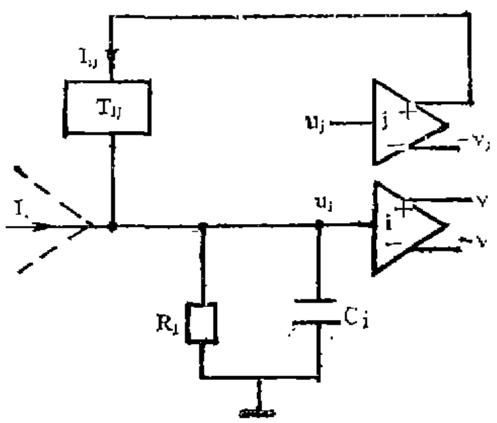

图1 Hopfield神经元

令：$x_i=u_i$，$b_i=1/\tau_iC_i(C_i\neq 0)$，

$a_{ij}=T_{ij}/C_i$，

$(i,j=1,2,\cdots\cdots,N)$。

$U(t)=(I_1(t),\cdots I_N(t))^T$

$x=(x_1,\cdots,x_N)^T$

$B=diag(b_1,\cdots,b_N)$

$A=(a_{ij})_{N\times N}$

$G(x)=[G_1(x_1),\cdots,G_N(x_N)]^T$

可得到方程(1)的一般向量方程为：

*)国家自然科学基金支持课题

$$\dot{X}=-Bx+AG(x)+U(x)=f(x) \qquad (2)$$

式中$U(t)$是外加输入项，在大多数实际应用中，$U(t)$在一定的时间区间上保持常量，故讨论(2)式的平衡点稳定性时，仅需讨论平凡平衡点的稳定性。

二、输入输出特性函数连续可微时非对称网络平衡点的稳定性

1. 一次近似决定网络平衡点稳定性

假设 对于神经网络系统(2)外加输入为零，即：$I_i(t)=0$，$i=1, \cdots, N$。

Michel等人对神经网络模型(2)的稳定性分析，提出了一种方法，见文[1]。但是，这种方法比较麻烦，本文提出一种简便有效的方法如下。

当分析给定平衡点的稳定性质时，不失一般性，假设平衡点在R^N的原点处。若平衡点不是原点，可作变换。

考察(2)式：$\dot{X}=-Bx+AG(x)$。由于$G(0)=0$，且$G(x)$在$\|x\|<r$内连续可微，用向量泰勒展式：

$$G(x)=G(0)+G'(0)x+R_N(x) \qquad (3)$$

式中，$G'(0)$是雅可比矩阵，$\|x\|$表示向量范数$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$，$R_N(x)$在$\|x\|<r$内按$x_1, x_2, \cdots, x_n$展成级数，开始项不低于二次。

将(3)式代入(2)式中，得

$$\dot{X}=[-B+AG'(0)]x+AR_N(x) \qquad (4)$$

令：

$$P=-B+AG'(0) \qquad AR_N(x)=E(x)$$

$$=\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12}, & \cdots, & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22}, & \cdots, & P_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N1} & P_{N2}, & \cdots, & P_{NN} \end{vmatrix} \qquad =\begin{vmatrix} E_1(x) \\ E_2(x) \\ \vdots \\ E_N(x) \end{vmatrix}$$

$AR_N(x)$在$\|x\|<r$内按$x_1, x_2, \cdots, x_N$展成级数，开始项不低于二次，(4)式的分解式为：

$$dx_i/dt=P_{i1}x_1+P_{i2}x_2+\cdots+P_{iN}x_N$$
$$+E_i(x_1, \cdots, x_N) \quad i=1, \cdots, N \qquad (5)$$

$E_i(x_1, \cdots, x_N)$在$\|x\|<r$内按$x_1, x_2, \cdots, x_N$展成级数，开始项不低于二次。

于是，讨论(2)式等价于讨论(5)式零解稳定性问题。舍去(5)式中的高次项，得到一次近似方程

$$dx_i/dt=P_{i1}x_1+P_{i2}x_2+\cdots+P_{iN}x_N$$
$$i=1, \cdots, N \qquad (6)$$

下面引用文[2]中三个定理

定理1 如果一次近似方程(6)的特征方程$|\lambda E-P|=0$(λ是特征根，E是单位矩阵)的所有根有负实部，则对(5)式中的任何高次项而言，(5)式的零解是渐近稳定的。

定理2 如果一次近似方程(6)的特征方程$|\lambda E-P|=0$(λ是特征根，E是单位矩阵)的根中至少有一实部为正，则对(5)式中的任何选取的高次项，(5)式的零解是不稳定的。

定理3 如果一次近似方程(6)的特征方程$|\lambda E-P|=0$的根中没有具有正实部的根，但有实部为零的根，则可以选取(5)式中的高次项，使得(5)式的零解是稳定的，也可以选取(5)式中的高次项，使得(5)式的零解是不稳定的。

众所周知，当特征方程的阶数很大时，用一般的数学方法是很难很快求出特征值的。因此，下面我们对实对称矩阵的最大特征值，提出一种估算式，然后再提出一种判别一般实矩阵的特征方程的所有根是否为负的判别法。

2. 求对称实矩阵的最大特征值

n阶对称实矩阵A的特征值是n个实数，设为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$。

定义 设A为方阵，则A的谱半径[3]：

$$\rho(A) \triangleq \max_i |\lambda_i(A)| \leq \|A\| \qquad (7)$$

这里$\|\cdot\|$为任一种相容的矩阵范数。

引理[4] 设A, B均为n阶实对称矩阵，则

$$\max_{t+s=n+1} [\lambda_t(A)+\lambda_s(B)] \leq \lambda_i(A+B) \qquad (8)$$

(下转54页)

我们要证明扩展并对时态范式是封闭的，即要证明，对于任意的R上的两个关系r_1和r_2，$r=r_1\cup^e r_2$满足时态范式。(证明过程略)

5.结束语

文[3]指出了现有时态数据库中关系差操作是不充分的。这主要是因为现有的时态关系代数在将传统的关系代数扩展成能处理时间的时候，对"NOW"这个代表不定的（或变化的）时间值考虑不够，仅仅在扩展并操作中考虑了两个关系并操作后对"NOW"的处理，而象扩展差和扩展交中被忽略，因此，它导致关系操作的不充分性。

现在，在时态推理中已将"NOW"单独进行研究[4]，并且其处理是复杂的。当然，"NOW"在时态数据库也应被仔细地研究和探讨。作为一个尝试，笔者除了在关系并中考虑了"NOW"的作用，也在差中考虑了"NOW"的作用，并定义关系交为"$r=r_1-(r_1-r_2)$"，在关系交中间接地考虑到了"NOW"。这样，本文给出的时态关系代数克服了文[3]提及现有时态关系模型的缺点。

由于应用的需要，及光盘技术的进步使得存贮大量数据成为可能，所以，时态数据库方面的研究势在必然地成为一个具有广阔前景的课题。不过，时态数据库的研究在国内尚刚刚起步，笔者藉以本文抛砖引玉。

参考文献

[1] L. E. Mckenzie & R. T. Snodgrass, Evalution of Relational Algebras Incorporating the Time Dimension in Database, ACM Computing Surveys, Vol23, N0.4(1991)

[2] S. Gadia & C. Yeung, Inadequacy of Interval timestamps in Temporal Databases, Inform. Sciences Vol, 54,N0.1—2(1991)

[3] 张师超，时态数据库述评，计算机科学，Vol.19, No.3(1992)

[4] E.Hajniciz,Role of the present in temporal representation in artificial intelligence, Int.J. Man-Machine Studies, 32(1990)

（上接59页）

$$\leqslant \min_{r+s=j+1} [\lambda_r(A)+\lambda_s(B)]\ i=1,\cdots,\ n,\quad (9)$$

定理4 实对称矩阵A的最大特征值λ_1满足

$$\lambda_1(A)\leqslant \| A+\|A\|E\| - \|A\| \quad (10)$$

式中E是单位矩阵，若上式中$\|*\|$选取得当，(10)式的等号(接近)成立。用这个定理可以实现最小误差估算。

证明：略

以上只估算了对称矩阵的特征值，而对于一般的实矩阵的特征值的实部是否为负，可以通过定理5来判别。

定理5 A是任意的实矩阵。若对任意非零实向量x，有$x^TAx<0$，(当$x=0$时，$x^TAx=0$)，则矩阵A的特征值的实部为负。

证明：略。

因此，要使(6)式中的实矩阵P的特征值的实部是负数，只需证明对任意非零实向量x，有$x^TPx<0$（当$x=0$时，$x^TPx=0$），而$x^TPx=x^T[(P^T+P)/2]x$。

若实对称矩阵$(P^T+P)/2$的特征值小于0，则$x^TPx=x^T[(P^T+P)/2]x<0$。

求$(P^T+P)/2$的最大特征值，可以通过定理4来估算。这样对任意实矩阵的特征值的实部是否小于0的问题转化为对实对称矩阵的特征值的估算。这种方法用来检验系统的平衡点是否稳定简便而有效，而且很容易实现计算机模拟。

主要参考文献

[1] A.N.Michel et al., "Qualitative analysis of neural network, "IEEE Trans. CAS, Vol36, No.2, P229-243, 1989

[2] 王联、王慕秋，"非线性常微分定性分析"，哈尔滨工业大学出版社，1987

[3] R.A.Hone和C.R.John著，杨奇译"矩阵分析"，天津大学出版社，1988