Petri网的可达树分析法及其应用研究

胡家宝（武汉水运工程学院　430063武汉）

摘要

This paper disscussed the reachability tree analysis method of a Petri net in detail,and it has been proved that the reachability tree of a Petri net is finite. Finally, by using the reachability tree analysis method, studies about safeness, boundedness, conservation and some properties have been carried out.

一、引言

Petri网的理论是使用数学和图形进行研究系统的工具。它不仅能适用于计算机科学和技术这样的研究领域，而且也能适用于社会、物理等研究领域，具有较广的适应性。

应用Petri网首先要对系统建模(Modeling)，建模的重要作用是能使用Petri网的分析方法对系统进行分析，这些分析能揭示系统在结构和动态行为方面的信息，有助于对系统行为方面的透彻了解，这样可以全面地对系统进行性能评价，得到是否进一步改进的建议。

本文旨在详细论述Petri网可达树分析方法，证明可达树是有限的，并结合可达树分析法，对若干Petri网的分析性质进行了研究。

二、可达树分析方法

可达树 (Reachability Tree) 分析法是分析Petri网性质的主要方法之一，对某些分析性质能得到比较满意的结果。

可达树分析法描述了Petri网可达到的集合，称可达集。全部的可达集一般是从变迁点火引起的全部可达的标记来描述可达树中的结点。在可达树中，用弧来标注变迁点火，从源结点开始，产生可达树中的每一个新的结点。

图1是用于产生可达树的Petri网。

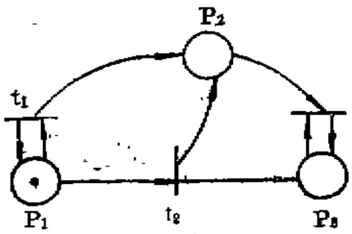

图1　产生可达树的Petri网

如果t_1和t_2首先点火，产生的可达树如图2所示。

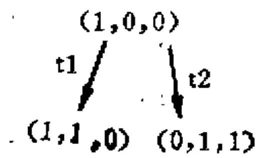

图2　t_1和t_2变迁点火后的可达树

图2中标记(1, 0, 0,)称为源结点(Initial nodes) 或称源始标记。在源始标记中t_1和t_2是启动的。从源始标记点火t_1，产生新的标记 (1, 1, 0)；点火t_2，产生新的标记 (0, 1, 1)。在标记 (1, 1, 0) 再次点火t_1，产生又一个新的标记 (1, 2, 0)；点火t_2，产生又一个新的标记 (0, 2, 1)。在标

记（0，1，1），再次点火t_3，产生新的标记（0，0，1）。

重复上述方法，又可产生出新的标记，加到可达树的结点上，如图3所示。

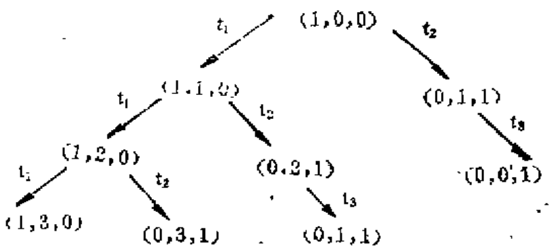

图3　图1Petri网的可达树

这个过程反复重复，每个可达到的标记最终将产生出来。然而，可达树很可能是无穷的。要使得可达树是一种可用的工具，必须找出一种限制可达树为有限规模的方法。如果一无穷集的表示法为有穷，那么无穷数量的标记必须映射到同一表示法上，这将产生信息损失，意味着Petri网的一些特征不能确定，同时也取决于该表示法如何实施。

对于表示法为有穷的方法之一是限制在每一步产生新标记（也称边界结点）。一种边界结点是没有变迁是启动的，称为终止结点，这类结点不会产生新的结点。另一种边界结点是在树中出现过的结点，称为重复结点，这类结点可以不考虑它的后继。

方法之二是降低可达树为有限的表示。考虑某一Petri网的变迁点火序列σ，开始在标记μ，结束在μ'，且$\mu'>\mu$。除了μ'在一些位置上有若干"附加"的标志以外，标记μ'与μ是相同的，即$\mu'=\mu+(\mu'-\mu)$，且$(\mu'-\mu)>0$。由于附加标志不影响变迁点火，序列σ能够再次点火，在μ'开始，在μ''结束。有$\mu''=\mu'+(\mu'-\mu)$，即$\mu''=\mu+2(\mu'-\mu)$。如果点火序列σ有n次，则标记为：$\mu+n(\mu'-\mu)$。这样，可以重复点火序列σ，建立任意数量的标志。重复点火产生的无穷标志数用专用符号ω表示，ω被认为是"无穷"、任意大的标志数。

对任意常数a，定义：

$\omega+a=\omega$；$\omega-a=\omega$；$a<\omega$；$\omega\leqslant\omega$

构成可达树的算法可以准确地进行描述。树中的每个结点i与一个扩充标记$\mu[i]$相连系；标记$\mu[i]$中任一位置中的标志数是一非负整数，或是符号ω。每个结点分为边界结点、终止结点或重复结点。仅边界结点是由算法处理的结点，使之转换成终止、重复结点。

算法由可达树的根或边界结点开始，设x是要被处理的边界结点，其算法如下：

1． 如果在可达树中存在一结点y，它不是边界结点，而且同x结点有相同的标记，即：$\mu(x)=\mu(y)$，则x是重复结点。

2． 如果标记$\mu(x)$没有变迁点火，即对所有$t_j\in T$，$\delta(\mu(x),t_j)$是不启动的，则x结点是终止结点。

3． 在标记$\mu(x)$中，所有的变迁$t_j\in T$是启动的，即$\delta(\mu(x)、t_j)$是启动的，在可达树中建立新的结点z，对每个位置P_i：

①如果$\mu(x)_i=\omega$，则$\mu(z)_i=\omega$；

②如果从根到x的路径上有结点y，同时$\mu(y)<\delta(\mu(x),t_j)$，而且$\mu(y)_i<\delta(\mu(x),t_j)_i$，那么$\mu(z)_i=\omega$；

③否则$\mu(z)_i=\delta(\mu(x),t_j)_i$。

这时便可以从结点x向结点z用弧表示，结点x被定义为可达树中的一个内部结点，z结点就成为了一个边界结点。

三、Petri网的可达树是有限的

构造可达树算法的一个很重要特征，是它的终止性。证明这一点，必须说明该算法永远不能继续建立新的边界结点。

引理1　在每个结点只有有限数量的直接后继的任何无穷的有向可达树中，存在一条从根引导的无穷路径。

证明：从结点x_0的根开始，由于x_0是有有限数量的直接后继，但是可达树中节点总数是无穷的，至少x_0的直接后继之一一定是一棵无穷子树的根。如果x_0的直接后继的所有子树是有穷的话，那么x_0将是有穷的。设x_1

是x_0的一个直接后继，具有无穷子树的结点，它的直接后继也是一棵无穷子树的根，设为x_2。用这种方法继续下去，从而在可达树中产生了无穷路径x_0，x_1，x_2，…。

引理2 每一个非负整数的无穷序列包括一无穷非减子序列。

证明：如果此序列的任何元素经常无限地出现，那么x_0元素的无穷子序列x_0, x_1, x_2，…是一个无穷非减子序列。

如果没有元素无限地出现，那么每个元素只出现有限次。设x_0为此序列的一个任意元素，至多有x_0个整数为非负，且小于x_0(0，…，x_0，-1)，而且这些整数中的每一个在序列中仅出现有限次。因此，通过在序列中继续足够远，必定有元素x_1，有$x_1 \geq x_0$。同样必定存在元素x_2，有$x_2 \geq x_1$。因此可以定义一个无穷非减子序列，x_0，x_1，x_2，…。

如上所述，不论发生哪种情况，都存在一个无穷的非减序列。

引理3 超过扩充非负整数（非负整数加符号ω)的n维向量的每个无穷序列，包含一个无穷非减子序列。

证明，采用对向量空间n维进行归纳。

1）假设$n=1$，如果在此序列中有无穷数量的(ω)向量，那么则是一无穷非减序列。否则，通过删除有限数量的(ω)向量形成的无穷序列，由引理2可得有一无穷非减子序列。

2）归纳假设，设此引理对n成立，对$n+1$进行证明。如果有无穷多个向量用ω作为它的第一个座标，那么选择这种在首座标中是非减的无穷子序列。如果只有有限数量的向量以ω为首座标，那么可以认为是座标的整数的无穷序列。由引理2可知，此序列有一无穷非减子序列，这样就能定义在首座标是非减向量的无穷子序列。

正如以上证明，不论在哪种情况，都能得到在首座标为非减的一个向量序列。对于$n+1$维向量得到的n维向量序列，用这种方法可以选择无穷的子序列，它们在每个座标中都是非减的。

根据上面的引理，可以证明如下定理。

定理 Petri网的可达树是有限的。

证明：用反证法证明。如果存在着一个无穷的可达树，根据引理1，则有一条从根x_0的无穷路径x_0，x_1，x_2，…。则$\mu[x_0]$，$\mu[x_1]$，$\mu[x_2]$，…是在$N \cup \{\omega\}$上n维向量的无穷序列，由引理3，有一无限非减子序列，$\mu[x_{i0}] \leq \mu[x_{i1}] \leq \mu[x_{i2}]$，…。不可能有$\mu[x_i]=\mu[x_j]$，如果等式成立，则$\mu[x_j]$是一个重复结点，因而没有后继。因此，肯定有一无穷严格递增序列$\mu[x_{i0}] < \mu[x_{i1}] < \cdots\cdots$。又如前所述，因为$\mu[x_i] < \mu[x_j]$存在，所以用$\mu[x_j]$中的一个ω来替换至少不是ω的$\mu[x_i]$的一个分量。因此，$\mu[x_{i1}]$至少有一个分量是ω，$\mu[x_{i2}]$至少有两个ω分量，而且$\mu[x_{in}]$至少有$n$个ω分量。由于标记是$n$维的，因此$\mu[x_{in}]$有所有分量ω。这样$\mu[x_{i\,n+1}]$就不可能大于$\mu[x_{in}]$，这是矛盾的。由此可见，一个无穷的可达树的假设是不正确的。

四、若干分析性质的讨论

Petri网的可达树分析法是一种极其有用的工具，它能对Petri网以下几个方面的性质进行研究。

1. 安全性和有界性

使用可达树分析法可以检验Petri网的安全性(Safeness)和有界(Boundedness)，在可达树中每个位置上的标志数不超过1，则该Petri网是安全的。如果在树中任何一个位置上的标志数量不超过k，则该Petri网是有界的。Petri网是有界的当且仅当符号ω不出现在可达树中。ω在可达树中出现，意味着标志数有潜在无界的可能性，即存在一个变迁点火序列，该变迁点火可以重复任意次，使增加的标志数成为一任意的无界值。同时，符号ω的位置也指示了哪一个位置是无界的。

如果Petri网是有界的，则Petri网表示了一个有限状态系统，可达树本质上是一张状态图，它包含了对应每个可达标记的结

点，这意味着可以通过对所有可达标记的有限集进行穷举检查，以解决任何所有其它的分析问题。例如：为某一Petri网产生可达树，确定某一特定位置上的界限，也可以扫描可达树而取得该位置的标志数。

2. 守恒

若Petri网不丢失或者不获得标志，则Petri网是守恒的（Conservation）。

使用可达树能有效地测试守恒。由于可达树是有限的，每个标记可以计算它的加权和。在评价Petri网守恒时，必须仔细考虑ω符号，如果某一标记把ω作为位置P_i的标记，要使该网守恒，则该位置的权必定为0。

3. 覆盖性

对于一个给定的标记μ'，另一标记$\mu''\geqslant\mu'$是否可达？这个问题可以遍历可达树来解决。给定初始标记μ，从而构造可达树，寻找具有$\mu[x]\geqslant\mu'$的结点x。如果找不到该结点，则标记μ'不被任何可达标记覆盖。从可达树的根到覆盖标记的路径，定义了从初始标记通向覆盖标记的变迁序列。如果覆盖标记的一个分量是ω，那么在从根到覆盖标记的路径上将存在一个"循环"。如果覆盖标记中有几个分量是ω，那么由循环造成的标记变化间，可能存在一种交互作用。

根据以上的讨论可知，可达树分析法可以用来解决安全性、有界性、守恒和覆盖性问题。但是它一般不能用来解决可达性或活性问题，以确定哪个点火序列是可能的。这是由于符号ω的存在，它记住了可达树中的大部分信息，少量的数据被丢失、舍弃的缘故。

图4是二个相似的Petri网（(a)，(b)是不相同的）。

图4(a)中的t_1在点火之前，P_2位置上的标志数一直为偶数。在(b)中，P_2位置上的标志数可以是任意整数。图5是图4(a)和(b)的可达树，这二个Petri网有相同的可达树，这是由于ω符号不允许这类信息被检测，妨碍了用可达树来解决可达性问题。

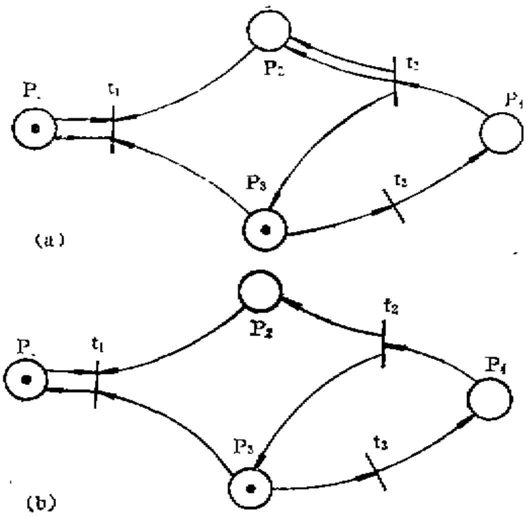

图4　二个相似的Petri网

(1,0,1,0)

↓

(1,0,0,1)

↓

(1,w,1,0)

↙　　↘

(1,w,0,0)　(1,w,0,1)

↘

(1,w,1,0)

图5　图4(a)和(b)的可达树

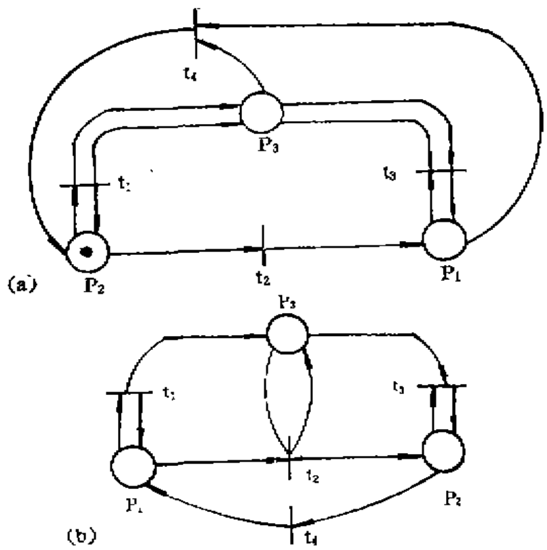

图6　二个用于讨论活性的Petri网

（下转24页）

杂和困难。在Ada中，两个主要可被考虑作为虚结点的是：任务和包。其中任务作为虚结点的能力是有限的，因为它不能像包那样处理数据和库单元。包受分离编译、库单元和异常处理功能的支持，其受限形式可被作为一个虚结点，即这个包不允许外部存取它的变量，而且仅有任务规范和类型说明是外部可视的。此外，存取变量不可说明为入口参数。这样，我们能限制包规范仅仅含有过程描述，去实现一个在调用接口与虚结点之间的远程调用过程。在这种情况下，就可在各虚结点间获得任务的同步和并发执行，并且利用远程进程调用机制实现结点间的通信。

综上所述，Ada的嵌入式编程能力强，而Occam的分布式编程直接明了，使用方便。

参考文献

〔1〕 N.H.Cohen, Ada as A Second Language, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986

〔2〕 G.Booch, Software Engineering with Ada, The Benjamin Gummings Publishing Company, 1983

〔3〕 C.A.R. Hoare, Communicating Sequential Processes, Prentice Hall International, 1985

〔4〕 INMOS Limited, A Tutorial Introduction to OCCAM Programming, Prentice Hall, Bristol, 1987

〔5〕 管惠维，孙永强，Transputer应用研究的现状，计算机工程，已录用将发表

〔6〕 管惠维，孙永强，基于Transputer的外围控制实现方式，小型微型计算机系统，13；(4)(1992)

〔7〕 管惠维，孙永强，基于Transputer的并行程序设计技术，小型微型计算机系统，已录用将发表

〔8〕 INMOS Limited, The Transputer Development and iq System Databook, Redwood Press Ltd, Melksham, 1991

（上接32页）

对于活性问题的分析也存在类似的问题。如图6中(a)和(b)二个Petri网，前一个可能存在死锁，另一个则不会。但是它们的可达树是完全相同的，如图7所示。

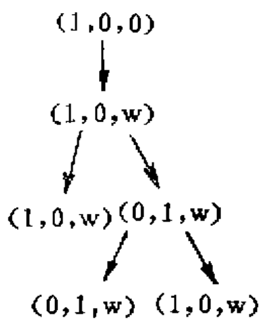

图7 图6(a)和(b)的可达树

虽然可达树分析法不包含足够的信息来解决可达性、活性问题，但是它也有足够的信息来解决很多这样的问题。如标记μ′在可达树中可能出现，则μ′是可达的，否则是不可达的。同样，可达树中有终止结点，则该Petri网不是活的。

五、结束语

从以上本文的讨论表明，Petri网表达对象具有抽象性，准确、精练而无二义性，并且能运用可达树分析法来获得对象多方面的分析性质。目前，Petri网的理论仍处在发展阶段，随着人们对它的研究逐步深入，必将进一步推动它的理论和应用不断向前发展。

参考文献

〔1〕 J.L.Peterson, "Petri Nets", ACM Computing Surveys, Vol.9, No.3 pp223-252, Sept. 1977.

〔2〕 Tadao Murata, "Petri Nets: Properties, Analysis and Application", Vol.77 No.4, pp541-580, Apr. 1989

〔3〕 胡家宝 形式描述技术及其应用 武汉造船 1991,5