维普资讯 http://www.cqvip.com

94 (5)
1-8

超协调逻辑　分域逻辑　悖论逻辑

计算机科学 1994 Vol. 21 №. 5

超协调逻辑*）（Ⅰ）——传统超协调逻辑研究

林作铨
（汕头大学计算机科学系）
（北京航空航天大学计算机系）

李 未
（北京航空航天大学计算机系）
（汕头大学计算机科学研究所）

O141

摘 要 Paraconsistent logics are those theories in which an inconsistent theory can be non-trivial, that is, the logics do not allow to infer every conclusion from a contradictory premise. In this report, we describe a couple of results of the study on paraconsistent logics. Firstly, we outline a paradigm of paraconsistent logics based on the analysis of the paraconsistency. After having studied traditional paraconsistent logics, we introduce a definition of new paraconsistent logic, and present some representive works of definitely new paraconsistent logics. Morever, we provide the definition and results of paracomplete logic which is closely related to paraconsistent logic. Then, we study the logical foundations of paraconsistency from the viewpoint of unification. We propose a unified preferential semantics framework for various paraconsistent logics, and a uniform tableau systems for proof theories of various paraconsistent logics. Furthermore, we compare the relation existing between paraconsistent logic and nonmonotonic logic first invented in artificial intelligence. We emphasize the importance of combining these two logics in an unified logics framework which is paraconsistent and nonmonotonic. Finally, we briefly discuss the applications of paraconsistent logic in computer science and artificial intelligence, with especially study the application of paraconsistent and nonmonotonic logic in the formalization of commonsense reasoning.

这是一个关于超协调逻辑研究系列的首篇，本文中，我们首先说明超协调逻辑的基本概念及其发展背景，根据对超协调性的分析我们把超协调逻辑分成三类。然后，我们介绍并剖析这三类传统的超协调逻辑的基本结果，指出它们各自的优缺点、存在的问题以及相互关系，并特别地研究了几种传统超协调逻辑与非单调逻辑的关系。

1 什么是超协调逻辑

对某个命题 A，$\{A,\neg A\}$是一个（逻辑）矛盾，一个理论 Σ 是非协调的，指它至少包含一个矛盾，即存在 A，$\{A,\neg A\}\subseteq\Sigma$；一个理论 Σ 是平凡的（trivial），指它包含任何命题，即对任一 B，$B\in\Sigma$。超协调逻辑（Paraconsistent Logic）是一类非协调但不平凡的理论。换言之，令$\models p$是一个逻辑后承关系，称$\models p$是爆炸的（explosive），当且仅当对所有 A，B，$\{A,\neg A\}\models p\ B$；$\models p$称为超协调的，当且仅当$\models p$不是爆炸的；一个逻辑是超协调的，当且仅当其逻辑后承关系是超协调的，因此，超协调逻辑是在非协调（含矛盾）情形下推理的形式化。

经典逻辑不是超协调的，因为经典逻辑具有平凡性，它们包括命题逻辑及其各种扩充或变化，如一阶（高阶）逻辑、模态逻辑、多值逻辑、直觉主义逻辑、各种联结逻辑、一些（广义）相干逻辑等等。令$\models$表示经典逻辑的逻辑后承关系，在所有经典逻辑中，对所有 A，B，都有$\{A,\neg A\}\models B$，即由一个矛盾可推出任何命题，究其原因，是由于经典逻辑中有如此的扩散规则：$A,\neg A\models B$。这条规则在经典逻辑中可表现为公理或规则形式，例如，$A\wedge\neg A\rightarrow B$，$A\rightarrow.\ \neg A\rightarrow B$，$A\rightarrow.\ B\rightarrow A$ 等，其根源是经典逻辑中的无矛盾律：$\neg(A\wedge\neg A)$。形式化超协调性的目标就是要破坏经典逻辑中的平凡性问题。

超协调（Paraconsistent）[1]一词是 1976 年 Quesada 提出来的[1]，作为对一类非协调但不平凡的逻辑的概

*）本文是在国家自然科学基金、国家基础研究攀登计划、国家高技术八六三计划与李嘉诚学术基金的支持下完成的。

维普资讯 http://www.cqvip.com

括。如果以建立第一个完整的逻辑演算作为超协调逻辑的起点，那么 1963 年 da Costa 提出的 C_n 系统是针对超协调性的形式化的开始[2]，而最早研究超协调性则是从 1910 年由 Lukasiewicz 的三值逻辑，Vasilev 的意象逻辑(Imaginary Logic)，Jaskowski 的分域逻辑(Discursive Logic)，以及一些相干逻辑(Relevant Logic)就已经开始了。2) 现在，超协调逻辑研究与相干逻辑和辩证逻辑(Dialethic Logic)是密切相关的。相干逻辑是一种基于前后件之间共同命题变元的相干原理的推理关系的逻辑演算，但一些超协调逻辑不一定具有相干原理，一些相干逻辑也不一定是超协调的；辩证逻辑也是一种非协调但不平凡的理论，它强调辩证的演绎过程，假设真矛盾的存在并刻画矛盾的转化，但超协调逻辑不一定承认真矛盾的存在并刻画矛盾的转化，辩证逻辑却一定是超协调的。一般地，不具超协调性的相干逻辑是不稳妥的，没有相干性的超协调逻辑不能合适地形式化，超协调逻辑是辩证逻辑的基础，辩证逻辑是超协调逻辑的发展。由于三者之间的关系相当密切，且在一定意义下三者之间的区别是不重要的，所以我们将在不区别三者的意义下研究超协调逻辑(或曰广义超协调逻辑)。

追根溯源，超协调概念可以见诸于东西方哲学的各个历史时期，它是伴随着对矛盾现象的研究开始的，而矛盾是普遍存在的。然而，协调性是数学的基础，反超协调(anti-paraconsistent)也一直是古代哲学的主流，那么，为什么需要在逻辑中引进超协调性呢？可以找到各种理由，但以下来自数学基础的理由最能说明问题。3)

存在许多有用的非协调但不平凡的理论，从证明论看，例如，在朴素集论中，根据概括公理：$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow A)$，朴素集论是非协调的，因为它产生集论悖论：令 R 是一个 Russell-集 $\{x \mid \neg x \in x\}$，得到悖论论证：$R \in R$ 与 $\neg R \in R$，但朴素集论是不平凡的，因为许多不合直觉的结论不会从朴素集论中推出，例如，$\psi \in \psi$ 不是朴素集论定理。从语义论看，类似的例子是朴素语义论，令 T-模式：T"A"$\leftrightarrow$A，即"A"的真值是 A，朴素语义论是非协调的，因为它产生语义悖论，例如说谎者悖论，令(*)表示："这是一个假的中文句子"，那么，根据 T-模式，有悖论论证：(*)为既真又假，但朴素语义论是不平凡的，因为许多不合直觉的结论不会从朴素语义论中推出，例如，T"A∨B"$\leftrightarrow$T"A"∨T"B"不是朴素语义论的定理。如所周知，基于协调性的公理化方法不能排除逻辑-语义悖论，这自然地引入了基于超协调性的逻辑方法论，例如，接受存在真矛盾的事实，即使 A 与 $\neg$A 都是真的，这时如取 B 为非真，则 $\{A, \neg A\} \models B$ 不成立。实际上，数学基础中关于悖论问题的研究是导致超协调性研究的直接根源。4)

关于超协调逻辑的研究是在近 30 年来发展起来的，但已有近千篇文献5)，已成为哲学逻辑中的一个重要研究分支，并已在许多领域中得到应用。我们认为各种各样的超协调逻辑有一个共性，就是为了破坏经典逻辑的平凡性，它们应该存在一定的统一的内在因素，进一步，从哲学逻辑角度进行的超协调推理研究对具体的应用有一定的随意性，例如，在人工智能(AI)中对人的常识推理的研究自然引出非协调(含矛盾)推理的形式化问题，它对矛盾的处理有一定的要求，这时可能需要新的超协调性的形式化。特别地，超协调逻辑与 AI 研究中产生的非单调逻辑具有相当密切的关系6)，两者从各自角度研究非协调性(矛盾)问题，虽然背景不同，但可以取长补短。

下面，我们将根据超协调性的分析对超协调逻辑进行分类，进而分析传统的超协调逻辑的基本能力，以及它们与非单调逻辑的内在联系。

2 超协调性的分析

超协调的形式系统必须破坏经典逻辑的平凡性，这是超协调逻辑与经典逻辑的唯一区别所在，为此，我们将不必区分各种不同的经典逻辑，而只需考虑逻辑演算，而且由于这种区别已经体现在命题演算(零阶逻辑)，我们将主要在命题级研究超协调系统，因为直接地加入量词与其他一阶逻辑元素只是技术上的问题。

本文中我们令 L 是一个(命题)语言，定义(命题)公式如常，记标准命题演算为 PC，我们称公式中只包含真值函词 ∧，∨，$\neg$ 的片段为零度公式，而还包含蕴涵词 $\rightarrow$ 的公式为一度公式。对蕴涵词 $\rightarrow$，一个良好的逻辑演算应该具有分离规则：$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$，但是，一般地，在超协调逻辑中，如果定义具有分离性质的蕴

1) 亦写 Transconsistent，意为"在非协调外"(beyond the inconsistent)，也译为弗协调逻辑，次协调逻辑和拟协调逻辑，我们根据 Wittgenstein 解释为超协调，表示可以逃脱协调性的束缚。2) 关于超协调逻辑的一些历史与哲学背景以及基本研究成果参见文献[3][4]，[3]是超协调逻辑的代表著作。3) 其它来自实践与常识的理由参见续文。4) 悖论是一种真矛盾，即指 A 与 $\neg$A 同时为真。5) 如果包括关于悖论问题的研究，则其文献难以计数之多[5]。6) 本文将直接使用非单调逻辑的概念与有关结果，有关非单调逻辑参见文献[6]。

涵词，这种联词是内涵的，不具有标准逻辑联词之间的相互定义关系，如 $A\to B\neq_{df}\neg A\vee B$，如果保留各个联词之间的定义如标准逻辑（外延的），那么蕴涵词可能不具有分离性质。我们将在研究零度公式的基础上进一步讨论一度公式问题。以下我们记 $\vdash$ 表示经典逻辑的后承关系。

建立超协调逻辑的途径可以从分析平凡性为出发点，在经典逻辑中，平凡性（即 $A,\neg A\vdash B$）的证明如下所示：

1. $B\wedge\neg B\vdash B$；简化律（$A\wedge B\vdash A$）
2. $A\wedge\neg A\vdash B\wedge\neg B$ 且 $B\wedge\neg B\vdash A\wedge\neg A$；等价律
3. $A\wedge\neg A\vdash B$；1，2，传递律（$A\vdash B$，$B\vdash C$，则 $A\vdash C$）
4. $C,D\vdash C\wedge D$；合取律
5. $A,\neg A\vdash B$；3，4，传递律

从以上证明可以看出，我们只要令等价律、传递律或合取律之一不成立，就可以破坏平凡性获得超协调性，但抛弃简化律则不允许非协调推理，不符合超协调逻辑的要求。事实上，各种超协调逻辑基本上可以分成三种途径，它们分别抛弃合取律、传递律与等价律之一[3]。形式化超协调性途径中，当抛弃合取律，称为非合系统的途径，必须使用类似模态逻辑的技术，使得不同命题在不同的可能世界中取值，矛盾被分开在不同本体中，这样，从矛盾中不会推出任何命题，非合途径首先是由 Jaskowski 提出的分域逻辑达到的[7]，分域逻辑也是最早的超协调逻辑之一；当抛弃传递律，相当于抛弃替换律或蕴涵词传递律或析取三段论（或分离规则），称为正强系统的途径，必须使用类似 Hilbert 正演泽系统的技术，通过减弱演绎能力达到不平凡性，正强途径首先是由 da Costa 提出的 C_n 系统达到的[2]，C_n 系统也是第一个完整的超协调逻辑；当抛弃等价律，称为相干系统的途径，必须使用类似命题变元相干原则的技术[6]，一些（狭义或深度）相干逻辑与辩证逻辑都是这种途径的代表[3-8]，这也是目前广泛研究的超协调逻辑。7)

当然，达到超协调性的策略可以有各种变化，例如，在平凡性证明中可以采用不同的表达方法，通过消除正蕴涵悖论与负蕴涵悖论也能破坏平凡性，在不排除有其它超协调途径下，大多数传统超协调逻辑都能从逻辑特征上归入以上三种途径之一。

非合系统、正强系统与相干系统是三类传统的超协调逻辑途径，Jaskowski 提出的分域逻辑 DL、da Costa 提出的超协调系统 C_n 与 Priest 提出的悖论逻辑 LP（*Logic of Paradox*）是三个主要的传统超协调逻辑，它们分别基于非合途径、正强途径与相干途径，由于基于不同的技术途径，三种超协调逻辑表达形式相当不同，它们之间缺乏关系的研究。下文，我们将逐一分析这三种主要的传统超协调逻辑，以及它们之间可能存在的关系。

3 非合系统

Jaskowski 在 1948 年提出的分域逻辑是基于非合途径的超协调逻辑的主要代表[7]，Rescher 与 Brandom 后来提出的弗协调逻辑也是一种类似的非合系统的超协调逻辑[9]，实际上，Rescher 较早提出的极大协调子理论亦属于这种途径[10]，这种超协调逻辑与非单调逻辑有密切的联系8)，da Costa 最近提出的实用逻辑也是通过分域逻辑体现出来[11]，并能够与非单调逻辑联系起来。[12]下面我们将通过一个分域逻辑 DL 分析基于非合系统的超协调逻辑的基本结果。

分域逻辑的基本思想是：一个环境（论域）是多个主体（参与者）共同产生的，每个主体提供给环境的信息是自协调的，但各个主体之间的信息可能相互矛盾，这样，对单个主体为真的事实等同于在一个经典赋值下为真的事实，在一个环境中为真的事实是由某些主体提供的事实的总和。显然，分域逻辑的形式化技术可以基于模态逻辑，由模态逻辑的可能世界刻画每个主体的信息。

在 L 中引入算子 $\Diamond$，公式 $\Diamond A$ 表示"某个主体拥有 A"，令 S 是一个模态系统，如 S5 9)，记 $\vdash_S$ 表示模态逻辑 S 的逻辑后承，$\vdash_{DL}$ 表示分域逻辑 DL 的逻辑后承。基于 S 可定义分域逻辑 DL 如下：

1. $\vdash_{DL}A$ 当且仅当 $\vdash_S\Diamond A$；

2. 在 S 中可定义 DL 的（分域）蕴涵词 $\to_d$ 使之满足分离规则，如

$$A\to_d B=_{df}\Diamond A\to B。$$

DL 理论由 L 中的零度公式与 $\to_d$ 构成，如果使用 L 的 $\to$ 而不是 $\to_d$，则 $\to$ 不满足分离规则。虽然 DL 中有 $\neg(A\wedge\neg A)$ 和 $A\wedge\neg A\to_d A\wedge B$，但 $A\to_d(B\to_d A\wedge B)$ 不成立，由此易见合取律有 DL 中不成立，即 $\{A,B\}\nvdash_{DL}A\wedge B$，因此对原子公式 DL 不会导致平凡性。

令 M 是 S 的可能世界模型，ω 为 M 中一个可能

7）注意到，超协调逻辑是从研究悖论产生的（参见第一节），但技术上则更多地从解决蕴涵词悖论来的，因此它与相干逻辑密切相关，（广义的）相干逻辑不都具有超协调性，因为具有吸收律（$\frac{A\to(A\to B)}{A\to B}$）的（相干）逻辑是（弱）平凡的（参见上文），而能破坏吸收律的相干逻辑称为深度相干逻辑。8）参见续文，限于篇幅，对本文各个具体的超协调逻辑我们将不一一给出它们的非单调逻辑形式，有些只是指出可能的做法。9）DL 也能基于其它模态系统定义。

维普资讯 http://www.cqvip.com

维普资讯 http://www.cqvip.com

世界，语义上，我们定义 DL 的语义后承，记为$\models_{DL}$，如下：

$\Sigma\models_{DL}A$ 当且仅当对所有 M 与 M 中的某个 ω，存在 $B\in\Sigma$，$M,\omega\not\models_S B$ 或 $M,\omega\models_S A$。

易见，虽然$\{A,\neg A\}\models_{DL}A$，但$\{A,\neg A\}\not\models_{DL}B$，即当环境中包含矛盾主体的信息时不会导致平凡性。

因为在 DL 中有效的公式就是在 S 中有效的公式，若令 A_d 是 L 中公式以$\rightarrow_d$替代$\rightarrow$的结果的公式，则$\vdash_{DL}A_d$ 当且仅当 A 是经典二值重言式，因此，DL 的演绎能力类似于模态系统。可以证明 DL 逻辑的完全性定理如下：$\Sigma\vdash_{DL}A$ 当且仅当 $\Sigma\models_{DL}A$。

可是 DL 为了达到超协调性，必须付出一定的代价，因为$\rightarrow_d$满足吸收律$\frac{(A\rightarrow_d(A\rightarrow_d B))}{A\rightarrow_d B}$，则由 Curry 悖论，令 $\beta=$"T"β"$\rightarrow_d\alpha$"，即"若这个句子为真，则 α"，根据 T-模式：T"β"$=$(T"β"$\rightarrow_d\alpha$)，由吸收律与分离规则，可推出任意 A，因此基于 DL 的$\rightarrow_d$的朴素语义论是平凡的，这说明$\rightarrow_d$的定义并不适合超协调性。为此可有许多改进的办法达到 DL 的较好的超协调性，但都难于完全成功。当然，由于 DL 抛弃了合取律，并不处理如悖论这种真矛盾情形，因此对原子公式 DL 是超协调的。容易看出，DL 中的 ∧ 是非标准的，不能递归地定义其真值条件，这也是 DL 为了达到超协调性所付出的代价。

以下我们称只对原子公式具有不平凡性是弱超协调性，对复合公式具有平凡性是弱平凡性，对任何公式都不具有平凡性（强平凡性）的超协调逻辑是超协调的。

注意到，分域逻辑在一定意义下是非单调的，因为若 $A\models_{DL}B$ 但$\{\neg A\}\not\models_{DL}B$，则$\{A,\neg A\}$可能推不出 B，一般地，分域逻辑是多模型的理论。[10]

总而言之，分域逻辑 DL 具有如下特点：

1. 分域逻辑通过抛弃合取律，达到形式化超协调性，可采用分域的模态逻辑，语义直观而且语法简单；

2. 分域逻辑为了达到超协调性，必须付出一定的代价：(a)由于保持无矛盾律，不能处理含如悖论这种真矛盾的辩证推理。(b)其合取词与蕴涵词是内涵非标准的，可以导致复合公式的平凡性，因此 DL 只是弱超协调的。(c)对单前提情形，DL 等价于经典逻辑，显得太强了，如 $A\models_{DL}B$ 当且仅当 $A\models_S B$，就有弱平凡性$\{A\wedge\neg A\}\models_{DL}B$；对多前提情形，DL 不能合取演绎，显得太弱了，如，若 $\Sigma\models_{DL}A$ 则存在 $B\in\Sigma$，$B\models_{DL}A$。

4 正强系统

da Costa 在 1963 年提出的超协调演算 C 系统是主要的超协调逻辑之一[4]，C 系统是第一个完整的超协调逻辑演算，它是基于正强系统的超协调逻辑，Arruda 和 da Costa 后来提出的 P 系统[13]，一些相干逻辑系统（如系统 R）[6]，以及通过减弱外延逻辑演绎能力达到超协调性的一类超协调逻辑都属于这一途径[14]。

C 系统的技术途径是通过直接地减弱经典逻辑的演绎能力来达到超协调性，为此，只要消除引起经典逻辑平凡性的相应公理或规则。da Costa 首先明确规定超协调逻辑 C 应该满足以下要求：

1. 无矛盾律$\neg(A\wedge\neg A)$无效；

2. 不平凡性；

3. 极大地保留经典逻辑中不与以上两点要求冲突的演算能力。

由此，da Costa 构造了一个分层超协调演算系统 C_n，$1\leq n\leq\omega$，具有如下特征：

1. $C_0,C_1,\cdots,C_n,\cdots,C_\omega$ 依次严格地减弱演算能力；

2. 经典逻辑 C_0 的所有定理对良构公式在 C_n 中有效，一个公式 A 是 C_n 的良构公式，若 $A^{(m)}$是 C_n 的定理，这里 $A^{(m)}=A^1\wedge\cdots\wedge A^m$，定义 $A^1=A^0=\neg(A\wedge\neg A)$，$A^m=(A^{m-1})^0$。

这样，C_n 系统承认真矛盾。C_n 形式系统可构造如下：在经典逻辑 C_0 中，由于无矛盾律来自归谬律$(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$，因此形式系统中限制归谬律的使用，使得仅在经典条件下它可成立，即$\neg(A\wedge\neg A)\wedge((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A))$，并相应地规定无矛盾的传播公理。

C_n，$1\leq n\leq\omega$，的公理系统具有如下的公理与规则模式：

1. $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
2. $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$
3. $A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$
4. $A\wedge B\rightarrow A$
5. $A\wedge B\rightarrow B$
6. $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C))$
7. $A\rightarrow A\vee B$
8. $B\rightarrow A\vee B$
9. $\frac{A,A\rightarrow B}{B}$
10. $A\vee\neg A$
11. $\neg\neg A\rightarrow A$
12. $B^{(n)}\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A))$
13. $A^{(n)}\wedge B^{(n)}\rightarrow(A\rightarrow B)^{(n)}\wedge(A\wedge B)^{(n)}\wedge(A\vee$

10）正是在这个意义下，Rescher 的极大协调子理论与弗协调逻辑也是非单调的。

$B)^{(n)}$

只有模式(1)—(11)的系统是C_ω，在C_ω系统中加进$\neg(A\wedge\neg A)$变成经典系统C_0。容易证明，C_ω系统满足da Costa提出的超协调逻辑的要求与特征，特别地，若令$\neg^* =_{df} \neg A\wedge A^{(n)}$，记$\vdash_C$表示系统$C_n$的逻辑后承，则$\vdash_C A_c$当且仅当$\vdash A$，这里$A_c$是由A中以$\neg^*$替换$\neg$的结果，进一步，若B是由$A_1,\cdots,A_n$构成的复合公式，$\Gamma\vdash_C A_1\wedge\cdots\wedge A_n$，则$\Gamma\vdash_C B$当且仅当$\Gamma\vdash B$。

实际上，模式(1)—(6)是正直觉主义逻辑，C_ω是正直觉主义的保守扩充，C_1是在正经典逻辑加进特殊的否定词$\neg$。

语义上，一个C-赋值$v:\mathscr{L}\to\{0,1\}$，使之：

1. $v(\neg A)=1$若$v(A)=0$；
2. $v(A)=1$若$v(\neg\neg A)=1$；
3. $v(A\wedge B)=1$当且仅当$v(A)=1$且$v(B)=1$；
4. $v(A\vee B)=1$当且仅当$v(A)=1$或$v(B)=1$；
5. $v(A\to B)=0$当且仅当$v(A)=0$或$v(B)=1$；
6. 若$v(B^0)=v(A\to B)=v(A\to\neg B)=1$则$v(A)=0$；
7. 若$v(A'')=v(B^0)=1$则$v((A\wedge B)^0)=v((A\to B)^0)=v((A\vee B)^0)=1$。

对C_ω系统去掉赋值条件(6)—(7)，C_ω系统与经典逻辑不同的地方在于对$\neg$的赋值，(1)断言在A，$\neg A$中至少之一为真，但可能两者都为真，(2)断言若不是非A，由(1)则A为真。

我们称一个公式A在C-赋值v下为真，当且仅当$v(A)=1$，那么，系统C_ω的语义后承，记为$\vDash_C$，可如下定义：

$\Sigma\vDash_C A$当且仅当对所有赋值v，存在$B\in\Sigma$，$v(B)\neq 1$或$v(A)=1$。

若$\vDash_C A$，则A是经典二值重言式，但反之不然。可以证明系统C_ω的完全性定理如下：$\Sigma\vdash_C A$当且仅当$\Sigma\vDash_C A$。

显然，$\{A,\neg A\}\nvDash_C B$，经典逻辑中关于否定词的定律在C_n中都不成立，例如$\neg A\wedge\neg B\nvDash_C\neg(A\vee B)$等等。

注意到，我们可以找到比C_ω更弱的超协调演算系统，例如在C-赋值中去掉赋值条件(2)，相应的公理系统由模式(1)—(8)和$(A\to\neg B)\to\neg B$构成系统C_{min}，可以看出，C_{min}是最小超协调系统，即比它更弱的系统将不是超协调的；我们也能找到比C_1更强的超协调逻辑，例如在C-赋值中去掉赋值条件(2)，替换以如下赋值条件：

1. $v(\neg\neg A)=v(A)$，
2. $v((A\to B))=v(\neg A\vee B)$，
3. $v(\neg(A\wedge B))=v(\neg A\vee\neg B)$，
4. $v(\neg(A\vee B)=v(\neg A\wedge\neg B)$。

相应的公理系统由C_{min}加上如下模式构成C_{max}系统：

1. $\neg\neg A\leftrightarrow A$，
2. $(A\to B)\leftrightarrow\neg A\vee B$，
3. $\neg(A\wedge B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$，
4. $\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$。

系统C_{max}是一个最大超协调逻辑，即比它更强的系统将不是超协调的。通过经典算子我们同样可以获得在C_{min}与C_{max}之间的各别分层的超协调系统。

系统C_n存在一些问题，由于减弱了演绎系统的能力，必须付出一定的代价。其实，C_n系统的$\neg$不是否定关系而是一种反对关系，因为若$A\vee B$为真，$A\wedge B$为假，则A与B是否定关系，在C_n中，因为只有$A\vee B$为真，但$A\wedge B$非假，故A与B是为反对关系，这样，C_n中的$\neg$是非标准的内涵联词。由于对所有的B，$v(B\wedge\neg B\wedge B^0)=0$，$C_n$有$B\wedge\neg B\wedge B^0\vDash_{C_1}A$，所以$C_\omega$系统是弱平凡的，但这是从语义上的定义直接得到的，从C_ω的语法上没有对应的定义，在这个意义上，C_n的语法与语义是不可比的，进一步，C_n的蕴涵词具有吸收律对如Curry悖论也导致弱平凡性。

注意到，在C_n系统中，$\neg$具有类似直觉主义逻辑否定词的直观意义，可以做成一种非单调能力，A^0的经典算子表示A具有经典取值，$A\wedge\neg A$表示A是悖论的，通过经典算子，我们能做到在协调情形下，某种C系统等价于经典逻辑，在极小化非协调性情形下，C系统是非单调的。[11]

总而言之，超协调演算C系统具有如下特点：

1. 系统C通过增强正逻辑但减弱演绎能力，达到形式化超协调性，可极大地保留经典逻辑，语法简单，由于抛弃无矛盾律，能处理含如悖论这种真矛盾的辩证推理，而且语义简单；

2. C系统为了达到超协调性，必须付出一定的代价。(a)$\neg$不是标准外延的否定词，会导致弱平凡性，因此C_ω系统只是弱超协调的；(b)C_n系统的语法与语义在一定意义下是不可比的。

5 相干系统

Priest在1979年提出的悖论逻辑LP是一种重要的超协调逻辑[15]，LP是一个简单的基于相干途径的辩证逻辑系统，代表了一类基于三值(或多值)语义的超协调逻辑，深度相干逻辑也都是这种途径的超协调逻辑。

悖论逻辑的基本想法是：承认真矛盾(辩证意义)

11)Batens给出一种动态C系统可以具有这种能力[3]。

维普资讯 http://www.cqvip.com

维普资讯 http://www.cqvip.com

的存在，即一些命题是既真又假(悖论)的，对 A 取悖论值，$A\wedge\neg A\models B$ 将不成立，这样就可以破坏经典逻辑的平凡性。因此，悖论逻辑代表了一类基于三值语义的超协调逻辑[16,17]，与传统三值逻辑不同之处在于定义了悖论值为逻辑真。

语义上，令 $V=\{\{1\},\{0\},\{1,0\}\}$，这里 $\{1\}$ 表示仅真(经典真)，$\{0\}$ 表示仅假(经典假)，$\{1,0\}$ 表示既真又假(悖论)，一个赋值 $\pi: L\to V$，使之：[12]

1. $1\in\pi(\neg A)$ 当且仅当 $0\in\pi(A)$；$0\in\pi(\neg A)$ 当且仅当 $1\in\pi(A)$。

2. $1\in\pi(A\wedge B)$ 当且仅当 $1\in\pi(A)$ 且 $1\in\pi(B)$；$0\in\pi(A\wedge B)$ 当且仅当 $0\in\pi(A)$ 或 $0\in\pi(B)$。

3. $1\in\pi(A\vee B)$ 当且仅当 $1\in\pi(A)$ 或 $1\in\pi(B)$；$0\in\pi(A\vee B)$ 当且仅当 $0\in\pi(A)$ 且 $0\in\pi(B)$。

称一个公式 A 为真，若 $1\in\pi(A)$，悖论逻辑 LP 语义后承，记为 $\models_{LP}$，定义如下：

$\Sigma\models_{LP} A$ 当且仅当对所有赋值 π，存在 $B\in\Sigma$，$1\notin\pi(B)$，或 $1\in\pi(A)$。

容易证明，$\models_{LP} A$ 当且仅当 A 是经典二值重言式。易见，$\{A,\neg A\}\not\models_{LP} B$，即 LP 的语义是超协调的，当然，$\{A,\neg A\}\models_{LP} A$ 且 $\{A,\neg A\}\models_{LP}\neg A$，即在 LP 中，矛盾被局部化在自身，等价律在 LP 中不成立，因此，LP 具有一定的相干性。注意，如果在以上赋值定义中去掉后一部分条件，就等价于经典逻辑，事实上，LP 具有大多数经典逻辑的定理，例如，无矛盾律和排中律在 LP 中成立，而且联词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 可定义为外延的，具有递归定义性质与标准的相互定义关系。

LP 为了达到超协调性，必须付出一定的代价：有些在经典逻辑中有效的推理在 LP 中无效，例如，析取三段论 $A,\neg A\vee B\models B$ 在 LP 中是无效的，[13]这由取 A 为既真又假与 B 为仅假可见，实际上，这也是唯一在 LP 中无效的规则，即在 LP 中加入这条规则，LP 就变成经典逻辑，可见，LP 的后承关系是经典逻辑的子关系。但是，LP 没有非合途径与正强途径所存在的弱超协调性问题。[14]

进一步分析可知，析取三段论在 LP 中失效仅在悖论值情形，如果公式取经典值，则析取三段论可用，换句话说，在协调情形下，LP 等价于经典逻辑，在这个意义下，LP 也极大地保留经典逻辑。基于矛盾通常是稀少而不规范的情形，Priest 在 1989 年使用非单调逻辑的技术，把协调性作为缺省假设，提出一种极小化的悖论逻辑 LP_m[18]，LP_m 是一个极小非协调的逻辑，它能解决 LP 存在的问题。

我们定义一个公式集 Σ 的赋值 π 是极小的，当且仅当不存在 Σ 的其他赋值 π' 使得 $\pi'<\pi$，定义偏序关系 $<$ 如下：令 π_1，π_2 为两个赋值，$\pi_1<\pi_2$ 若：1)对所有原子命题 p，若 $\pi_1(p)=\{1,0\}$ 则 $\pi_2(p)=\{1,0\}$；2)存在一个原子命题 p 使得 $\pi_2(p)=\{1,0\}$ 但 $\pi_1(p)\neq\{1,0\}$。

因此，极小赋值包含的矛盾是极小的，LP_m 的语义后承，记为 $\models_{LPm}$，定义如下：

$\Sigma\models_{LPm} A$ 当且仅当 A 在所有 Σ 的极小赋值中都为真。

易见，$A,\neg A\vee B\models_{LPm} B$，但 $\{A,\neg A\vee B,A\wedge\neg A\}\not\models_{LPm} B$，在这个意义下，$LP_m$ 是非单调的，LP_m 具有许多良好的性质[19]，特别是，LP_m 具有与 LP 一样的超协调能力，而且在矛盾不直接影响下 LP_m 等价于经典逻辑。

极小化非协调性的过程可以看作一种对矛盾刻画的深化，其非单调性表现了一种矛盾的动态特性和辩证过程，因此更适合描述一种辩证推理过程。注意到，因为 C 系统也使析取三段论无效(虽然对分离规则有效)，同样的非单调技术也能使之具有 LP_m 的良好性质，例如，由于 C 系统的经典算子是用来刻画非协调性的，可以定义极小化赋值使得含经典算子的公式是极小的，这样，在证明论中，可以对证明过程分步进行，对前题 $A,\neg A\vee B$ 而言，A 与 $\neg A$ 不是经典算子公式，能有效使用，而当 $A\wedge\neg A$ 加入前提，则基于经典算子公式所推出的公式就被抛弃，Batens 首先给出一个这种基于 C 系统(例如，C_{min} 是强超协调的，基于 C_{min} 系统最为适合)把超协调性转化为非单调性的动态超协调逻辑思想[3]。

对一度公式，有三种办法引入 LP 的蕴涵词：

1. Priest 引入一种内函的深度相干蕴涵词具有分离性质[20]，但其代数语义与零度公式的真值语义在一起，缺乏证明论，蕴涵词与其它联词缺乏关系；

2. 定义蕴涵词如同标准逻辑，它将不满足分离规则(类似析取三段论在 LP 中失效)，但在 LP_m 中可克服这个问题，但难于公理化；[15]

3. 定义蕴涵词的真值条件使之满足分离规则，如

12)据此不难给出三值真值表，它实际上是 Kleene 强三值系统的真值表。13)这在一定意义上说明超协调逻辑显得太弱了，即不允许作出一些有意义的推理，例如，消解规则 $\frac{A\vee B,\neg B\vee C}{A\vee C}$ 无效(它是析取三段论的推广形式，使得超协调逻辑难于实现)。14)注意到，分域逻辑与 C_n 系统也不满足析取三段论。15)一些证明论参见文献[19]。

维普资讯 http://www.cqvip.com

$1\in\pi(A\to B)$当且仅当$1\in\pi(A)$或$0\in\pi(B)$；$0\in\pi(A\to B)$当且仅当$1\in\pi(A)$且$0\in\pi(B)$，这样，容易给出LP的公理化系统[17]，但蕴涵词与其它联词缺乏标准的关系。

这里，我们给出一种基于上述(2)的LP的公理系统，即定义$A\to B=_{df}\neg A\vee B$，$A\leftrightarrow B=_{df}A\to B\wedge B\to A$，这种LP具有如下的公理与推理规则：

1. $A\wedge B\leftrightarrow B\wedge A$；$A\vee B\leftrightarrow B\vee A$
2. $A\wedge(B\wedge C)\leftrightarrow(A\wedge B)\wedge C$；$A\vee(B\vee C)\leftrightarrow(A\vee B)\vee C$
3. $A\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$；$A\vee(B\wedge C)\leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
4. $\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$；$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$
5. $\neg\neg A\leftrightarrow A$
6. $A\to A\wedge B$；$A\wedge B\to A$
7. $A\vee\neg A$
8. $\dfrac{A\to B,\ B\to C}{A\to C}$

定义LP的逻辑后承如常，记为$\vdash_{LP}$，可以证明逻辑LP的完全性定理如下：$\Sigma\vdash_{LP}A$当且仅当$\Sigma\models_{LP}A$，同样的完全性结果对基于上述其它两种蕴涵词的LP亦成立。注意到，以上公理系统(1)—(5)可简单表达为$A\to A^*$；$A^*\to A$，这里A^*是A的合取范式，如果去掉(7)就是Anderson和Belnap的一度相干系统[8,21]。

上述对LP的蕴涵词的三种做法各有优缺点，这是LP必须付出的代价。可以指出，LP的这些技术具有一般性，技术上，我们可以对各种传统的三值逻辑都把未定义值作为逻辑真定义成超协调逻辑，其证明论对蕴涵词将有以上三种处理途径，由此得到一大类基于三值的相干超协调逻辑。如果把既真又假值看作“饱满”值，那么对应的非真非假值可看作“缺陷”值，这样，同样的技术可以定义基于四值逻辑的超协调逻辑[22]，即如上述的一度相干后承，即如，令$V=\{\{1\},\{0\},\{1,0\},\emptyset\}$，其余定义与LP一样，就获得一度相干后承系统FDE。进一步可推广到其它一些多值逻辑(参见后文)。

LP_m的技术也能应用到非合途径的分域逻辑与正强途径的超协调演算，使之在协调情形下等价于经典逻辑。

总而言之，悖论逻辑LP具有如下特点：

1. 悖论逻辑承认真矛盾，通过前后件之间的相干处理，达到形式化超协调性，在协调情形下保留经典逻辑，能处理含如悖论这种真矛盾的辩证推理，而且语义简单；

2、C系统为了达到超协调性，必须付出一定的代价。(a)有些在经典逻辑中有效的推理在LP中无效；(b)→的处理比较复杂，而且证明论也比较复杂。

比较超协调逻辑的三种途径，我们发现三者各有优缺点，但相干途径对超协调性的刻画较好，因为非合途径与正强途径都具有弱平凡性。

6 传统超协调逻辑的关系

各种超协调逻辑的技术都为了一个共同的目的，即有效地破坏经典逻辑的平凡性，达到形式化超协调性的目的，但由于基于相当不同的技术途径，以及各自的基本出发点不同，各种超协调逻辑的能力相当不同，这使得它们之间缺乏足够的相互联系，研究者们也没有对各种传统超协调逻辑之间的关系给予足够的重视，缺乏这方面研究的结果。

为了研究三种主要超协调逻辑之间的关系，我们首先来分析它们之间的异同点，据此，我们发现各种超协调逻辑是可比的。

1. 各种超协调逻辑具有一个共同的基础，即基于经典逻辑，破坏平凡性，为了达到超协调性，必须付出一定的代价，即弱化经典逻辑能力。如果我们不区别强弱平凡性，通常对弱化经典逻辑的规则不是实质性的，那么各种超协调逻辑是可比的，

2. 各种超协调逻辑存在一些不同之处，但它们仍然是可比的：(a)对是否承认真矛盾，即无矛盾律成立与否，并不影响超协调性，因此可以通过相互变化，可使各种超协调逻辑可比；(b)有些联词是非标准的，但通过一定的处理可以使之与标准联词可比。

3. 注意到，各种超协调逻辑具有一定的非单调性，它们有一个共同的特征，就是在协调情形下使得超协调逻辑等价于经典逻辑，因此在它们的非单调系统中它们之间的关系更为可比。

基于以上观点，我们可通过转换语义研究各种超协调逻辑的关系，即通过一定的规则把一种超协调逻辑的语义转换为另一种超协调逻辑的语义，从而得到两种超协调逻辑的相互关系，但在这一转换中，我们可能需要改变原来超协调逻辑的一些形式，从而容易看出两种超协调逻辑的不同地方。具体地说，令L_1，L_2是两个超协调逻辑。定义从L_1到L_2的语义转换$T:L_1\to L_2$，使得$\Sigma\models_{L_1}A$当且仅当$T(\Sigma)\models_{L_2}T(A)$，这里若p是$L_1$的原子公式则$T(p)$是$L_2$的公式，对$L_1$的含联词的复合公式$\alpha$，记$\mp\alpha$表示$\alpha$包含联词$\mp$，则$T(\mp\alpha)=\mp T(\alpha)$是$L_2$的公式。

我们首先考虑C系统(如C_1)与LP的关系，注意到，C系统一般地不是有限多值逻辑，这是因为C系统是直觉主义逻辑的保守扩充，而直觉主义逻辑不是有限多值逻辑，因此从C系统不能直接得到如LP的三值系统。但是，观察C系统的语义，$v(A)\neq v(\neg A)$

维普资讯 http://www.cqvip.com

当且仅当 $v(A^0)=1$，若 $v(A^0)=0$ 则 $v(A)=v(\neg A)=1$，而 LP 的语义中因 $\pi(A^c)=\{0,1\}$ 具有类似的特征，但不能直接捕捉 C 赋值，为此我们需要在 LP 中引进另一个否定词 $\neg^0$ 使得 $\pi(\neg^0 A)=\{1\}$ 当且仅当 $\pi(A)=\{0\}$；$\pi(\neg^0 A)=\{0\}$ 当且仅当 $1\in\pi(A)$，这样，我们不难设计一种转换关系 T，使得 C 赋值能转换为类似的 LP 赋值，特别是，用 LP 的 $\neg$ 与 $\neg^0$ 能捕捉 C 系统的经典算子，例如，若 $T(\neg A)=\neg T(A)$ 则 $T(\neg(A\wedge\neg A))=\neg^0(T(A\wedge\neg A))$。[16] 进一步，由于 DL 是基于模态逻辑定义的，而模态逻辑与三值逻辑已有很好的关系研究，因此不难得到 DL 与 LP 的关系结果。

当然，DL、C 与 LP 没有明显的直接关系，通过转换语义我们也只能得到部分的关系结果，但我们想说明的是，各种传统超协调逻辑之间的关系是可以研究的。如果我们在各种传统超协调逻辑的非单调系统中研究，则它们之间的关系就变得非常明显，这正是现在的超协调逻辑研究所必须做的一件工作。

7 小 记

本文中，我们给出一个经典逻辑中平凡性证明的分析，据此把传统超协调逻辑分成三类，指出形式化超协调性的基本逻辑要求就是为了破坏平凡性，在介绍三种主要的传统超协调逻辑中，我们指出了它们各自的特色以及存在的问题，特别是，我们给出了它们的非单调逻辑扩充形式，并指出这种做法的优点之一是可以克服超协调逻辑存在的弱性问题，这在逻辑学上具有重要意义。

续文中，我们将进一步研究以下论题：1. 新超协调逻辑；2. 超协调性的逻辑基础；3. 非单调超协调逻辑。

参考文献

[1] Quesada. M, Some Premilinary Remarks about the Philosophy of Paraconsistent Logic, The Symposium on Latin-American Logic, 1976

[2] da Costa. N, On the Theory of Inconsistent Formal Systems, Notre Dame Journal of Formal Logic, XV, 1974

[3] Priest. P, Routley. R, Norman. J (Eds), Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent, Philosophia Verlag, 1989

[4] Priest. P, et al. (Eds.), Special Issues on Paraconsistent Logic, Studia Logica, 43, 1984

[5] 林作铨，悖论问题研究，未发表，1986

[6] 林作铨，石纯一，非单调推理十年进展，计算机科学，1990 年 6 期

[7] Jaskowski. S, Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems, Studia Logica, 24, 1969

[8] Anderson. A, et al., Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Princeton University Press, 1975

[9] Rescher. N, et al., The Logic of Inconsistency, Oxford, 1980

[10] Rescher. N, Hypothetical Reasoning, North-Holland, 1964

[11] da Costa. N, Logic and Pragmatic Truth, J. Fenstad et al. (eds.), Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII, (Elsevier, 1989), 247-261

[12] Lin. Z, Pragmatic Truth and Nonmonotonicity, STU-AI, Memo 1, 1993

[13] Arruda. A, da Costa. N, On the Relevant Systems P and P*, and Some Related Systems, Studia Logica, 43, 1984

[14] Batens. D, Paraconsistent Extensional Propositional Logic, Logique et Analyse, 1980

[15] Priest. G, Logic of Paradox, Journal of Philosophical Logic, 8, 1979

[16] Asenjo. F, A Calculus of Antinomies, Notre Dame Journal of Formal Logic 7, 1966

[17] Rozonoer. L, On Interpretation of Inconsistent Theories, Information Sciences 47, 1989

[18] Priest. G, Reasoning about Truth, Artificial Intelligence 39, 1989

[19] Lin. Z, Proof Theories of Logics of Paradox, STU-AI-TR-43, Computer Science Department, Shantou University, 1993a

[20] Priest. G, In Contradiction: A Study of the Transconsistent, Dordrecht, 1987

[21] Dunn. J, Intuitive Semantics for First-Degree Entailments and "Coupled Trees", Philosophical Studies 29, 1976

[22] Belnap. N, A Useful Four-Valued Logic, Modern Uses of Multiple-Valued Logic, Dunn. J, Epstein. G (eds.), Dordrecht, 1977

[23] Carnielli. W, et al., Contextual Negations and Reasoning with Contradictions, Proceedings of IJCAI-91, 1991, 532-537

[16] 参见文[23]给出的一个类似这种做法的对多值逻辑的结果。