类比推理　类比空间　数学模型　(9)

计算机科学1994Vol. 21№. 5

35-37

一种基于类比空间的类比推理的定义及数学模型*)

李凡长　徐金辉　蔡庆生

（中国科技大学计算机科学技术系　合肥230026）

TP18

摘　要　Based on the general definition of analogic inference, this paper makes an effort to satisfy the need of some practical problems. In this paper, we introduced the concept of analogic space and new definition of analogic inference.

关键词　Analogic inference, Analogic space.

一、前　言

许多代表人类智能最高成就的重大科技发现源于类比学习。如果智能计算机具有模拟人类学习的功能，则可能让机器帮助人去发现新的科学规律和提出新的科学假说。因此机器类比学习的研究，在理论上和实践上都有重大意义[1,2,3]。

但是，目前人们对机器类比学习的研究基本上局限于简单的模型及方法。出现这种局面的原因可能如下：(1)人对思维的认识问题，心理学派认为类比是一种思维活动过程，对它的研究应以思维为出发点而进行。(2)人-机问题。由前面(1)知道，类比推理是一种思维活动，但是，我们现在不是利用人脑来进行思维，而是应用机器来进行推理，由于人脑与机器间存在着很大的差别，如果在用机器帮助人进行类比推理时也只把它当做一种推理方式且是在单一因素下的一种推理方式，显然是不恰当的。为此，我们给出类比推理空间的定义，然后在类比推理空间中重新对类比推理进行定义并给出一些相关的结论。

二、类比推理空间的定义及一些结论

定义1　在论域U中的机器类比学习推理空间是一个完全的布尔代数MSA，MSA＝MSA($\wedge$，$\vee$，c，$\lambda\in[0,1]$)为指标的集合族且满足$(X_u(o,s,g)\mid o\in O, s\in S, g\in G)$。(1)$X_u(0,0,0)=\{\varphi\}$；(2)$X_u(\vee f_t)=\prod_{t\in T}X_u(f_t)$。其中“O”为源系统集，“S”为目标系统集，“G”为猜想规则集。

定义2　源系统(O)是指类比推理过程中的基元。

定义3　目标系统(S)是指在类比推理过程中在猜想规则的作用下所能到达的系统。

定义4　猜想(G)是一些规则的总称。

若MSA为非空经典集合，则ρ(MSA)为MSA上全体F集合族。

定义5　若$\delta\subset\rho$(MSA)且满足条件：a)φ，MSA$\in\delta$；b)$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\delta\Rightarrow\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\in\delta$；c)$\underset{\sim}{A}t\in\delta$，$(t\in T)\Rightarrow\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}t\in\delta$；则称$\delta$为MSA上的一个F拓扑，称(MSA，$\rho$)为F拓扑空间。

定义6　设MSA为数域K上的线性空间，(MSA，ρ)为满层空间，若下列映射是F连续的：a) f：MSA$\times$MSA$\to$MSA　$(x,y)\to x+y$；b) g：K$\times$MSA$\to$MSA　$(\alpha,x)\to\alpha x$；(其中K具有通常拓扑，MSA$\times$MSA，K$\times$K具有乘积F拓扑)，则称(MSA，$\tilde{\rho}$)为F拓扑线性空间。

引理　设$(MSA_1,\tilde{\rho}_1)$，$(MSA_2,\tilde{\rho}_2)$为F拓扑空间，$\underset{\sim}{W}$是乘积F拓扑空间，$(MSA_1\times MSA_2\ \tilde{\rho}_1\times\tilde{\rho}_2)$中F点$(x_\alpha,y_\beta)$的开重域，则有$(MSA_1,\tilde{\rho}_1)$中$x_\alpha$的开重域$\underset{\sim}{U}$及$(MSA_2,\tilde{\rho}_2)$中$y_\beta$的开重域$\underset{\sim}{V}$使得$\underset{\sim}{U}\times\underset{\sim}{V}\subset\underset{\sim}{W}$。

证明：因$\underset{\sim}{W}$是$(x_\alpha,y_\beta)=(x,y)\min(\alpha,\beta)$的开重域，它的$\underset{\sim}{W}(x,y)>1-\min(\alpha,\beta)$且$\underset{\sim}{W}$可表为乘积拓扑基中若干之并，于是有$\underset{\sim}{U}\in\tilde{\rho}_1$及$\underset{\sim}{V}\in\tilde{\rho}_2$使$\underset{\sim}{U}\times\underset{\sim}{V}\in\underset{\sim}{U}$且$(\underset{\sim}{U}\times\underset{\sim}{V})(x,y)>1-\min(\alpha,\beta)$，从而$\underset{\sim}{U}(x)>1-\alpha$，$\underset{\sim}{V}(y)>1-\beta$，即$\underset{\sim}{U}$，$\underset{\sim}{V}$分别是$x_\alpha$，$y_\beta$的开重域。　□

定理1　设MSA为K上的线性空间，(MSA，ρ)为

*)本文的研究得到国家自然科学基金和八六三资助。李凡长　硕士研究生，研究领域为机器学习。徐金辉　硕士研究生、研究领域为机器学习。蔡庆生　教授，主要研究方向为人工智能和离散数学。

F 拓扑空间：

(1)映射(a)F 连续当且仅当对 MSA×MSA 中任一 F 点(x_α, y_β)及$x_\alpha+y_\beta$的任一重域$\underset{\sim}{W}$，存在x_α的重域$\underset{\sim}{U}$及y_β的重域$\underset{\sim}{V}$使得$\underset{\sim}{U}\times\underset{\sim}{V}\subset\underset{\sim}{W}$。

(2)映射(b)F 连续当且仅当对 K×MSA 中任一 F 点(α_0, x_λ)及α_0, x_λ的任一重域$\underset{\sim}{W}$，存在x_λ的重域$\underset{\sim}{U}$及$\delta>0$，使得当$|\alpha-\alpha_0|<\delta$时有$\alpha, \underset{\sim}{V}\subset\underset{\sim}{W}$。

定理2 设(MSA, ρ)为经典拓扑线性空间，$\rho(\rho)$为由(MSA, ρ)诱导出的 F 拓扑，则(MSA, $\rho(\rho)$)为 F 拓扑线性空间。

证明：因为(MSA, $\rho(\rho)$)是 F 拓扑空间，且是满层的，下面只需证明映射(a)，(b)是连续的。

设$\underset{\sim}{W}$是$x_\alpha+y_\beta$的任一开重域，不妨设$\alpha\leqslant\beta$，则$\underset{\sim}{W}\in\rho(\rho)$且$\underset{\sim}{W}(x+y)>1-\alpha$。取正数$\gamma$使$\underset{\sim}{W}(x+y)>\gamma>1-\alpha$，从而$W_\gamma$是(MSA, ρ)中$x+y$的开邻域，因(MSA, ρ)是经典拓扑线性空间，所以有 MSA 的开邻域，U 及 y 的开邻域 V 使$U+V\subset W_\gamma$，令$\underset{\sim}{U}=U\cap\gamma^*$，$\underset{\sim}{V}=V\cap\gamma^*$，注意$\rho\in\rho(\rho)$，所以$\underset{\sim}{U}$和$\underset{\sim}{\gamma}$分别是$x_\alpha$和$2y_\beta$的开重域，容易证明$(\underset{\sim}{U}+\underset{\sim}{V})_\lambda=\underset{\sim}{U}_\lambda+\underset{\sim}{V}_\lambda$，进而可得：$(\underset{\sim}{U}+\underset{\sim}{V})_\lambda\subset W_\lambda, \underset{\sim}{U}_\lambda\in[0,1]$，故有：$\underset{\sim}{U}+\underset{\sim}{V}\subset\underset{\sim}{W}$，由定理1知映射(a)F 连续。

同理可证映射(b)的 F 连续性，因此(MSA, $\rho(\rho)$)是 F 拓扑线性空间。 □

定理3 设(MSA, $\bar{\rho}$)为 F 拓扑线性空间，x_0为 MSA 的普通拓扑，$t\in K$且$t_0\neq0$，则下列映射均为 F 同胚：(a) f_0：MSA→MSA，$f_0(x)=x_0+x$；(b) g_0：MSA→MSA，$g_0(x)=tx$。

证明：显然f_0是 MSA 到 MSA 上的一一映射，因(MSA, ρ)是满层空间，所以映射ψ：MSA→MSA，$\psi(x)=x_0$是 F 连续的，又因 MSA 上的恒同映射 I 是 F 连续的，从而证明映射 h：MSA→MSA×MSA，$h(x)=(x_0, x)$ F 连续，又由 F 拓扑线性空间的定义知：映射 f—F 连续，故$f_0=f_hF$连续，另一方面，f_0^{-1}：MSA→MSA，$f_0^{-1}(x)=x_0+x$，注意 x 亦是 MSA 中的普通点，由上所证即知f_0^{-1}亦 F 连续，因此f_0是 F 同胚。□

同理可证g_0的 F 同胚性。

定义7 设(MSA, $\bar{\rho}$)为拓扑线性空间，若存在一族 F 集$\mathscr{U}$，使对任何$\lambda\in[0,1]$，取$\epsilon_\lambda^{(U_n)}\in[0,1]$，$\epsilon_\lambda^{(U_n)}\downarrow0$，$\mathscr{U}=\{\underset{\sim}{U}_n\cap(1-\lambda+\epsilon_\lambda^{(U_n)}), \underset{\sim}{U}_n\in\mathscr{U}, n=1,2,\cdots\}$为$O_\lambda$的重域基，则称(MSA, ρ)为(QL)型 F 拓扑线性空间，设$\mathscr{U}$为(MSA, $\bar{\rho}$)的基胚。

定理4 设 MSA 为 K 上的线性空间，$\underset{\sim}{u}$是 MSA 上的 F 集族，满足：

(a)若$\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$，则有$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$使$\underset{\sim}{u}\in\underset{\sim}{U}\cap\underset{\sim}{V}$；

(b)若$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$，则有$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$使$\underset{\sim}{V}+\underset{\sim}{U}\subset\underset{\sim}{U}$；

(c)若$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$，则有$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$，使当$|\alpha|\leqslant1$时，$\alpha\underset{\sim}{V}\subset V$；

(d)若$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$，则对 MSA 上任一 F 点$x_\lambda$，有$\alpha>0$时使$x_\lambda$重于$\alpha\underset{\sim}{U}$；

则 MSA 上存在唯一的 F 拓扑$\bar{\rho}$，使(MSA, $\bar{\rho}$)是(QL)型 F 拓扑线性空间，且$\mathscr{U}$是基址。

定理5 设 MSA 为数域上线性空间，若有一族 MSA 上的 Lasalle 意义下的伪范$\{\|\cdot\|_d|d\in D\}$(D 为按≻方向开)满足：

(1)$\|x_\lambda\|d\geqslant0$，若$\upsilon\leqslant\lambda$，则$\|x_\gamma\|_d\geqslant\|x_\lambda\|_d$；

(2)对$\|x_\lambda\|_d$和$\delta>0$存在$\delta(x_\lambda, d, \epsilon)>0$使得$\|x_{\lambda-\epsilon}\|_d\leqslant\|x_\lambda\|_d+\epsilon$；

(3)对任何$\lambda\in[0,1]$，$d\in D$，$\|\psi_\lambda\|_d=0$；

(4)$\|\alpha x_\lambda\|_d=|\alpha|\cdot\|x_\lambda\|_d$；

(5)对任意$d\in D$，必有$e\in D$，使得$\|x_\lambda+y_\lambda\|_d\leqslant\|x_\lambda\|_e+\|y_\lambda\|_e$；

(6)若$d\succ e$，则$\|x_\lambda\|_d\geqslant\|x_\lambda\|_e$；

则λ关于该族 Lasalle 意义下的伪范所定义的 F 拓扑$\bar{\rho}$为(QL)型拓扑线性空间。

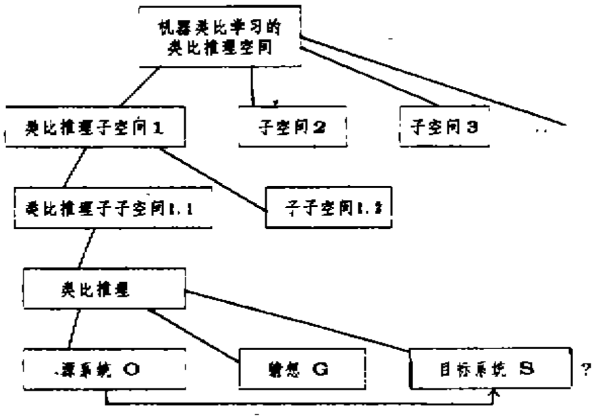
证明：定义 F 集$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$如下：

$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}(x)=\sup\{1-\lambda;\|x_\lambda\|_d<\epsilon\}$约定$\sup\varphi=0$；再令$\mathscr{U}=\{\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon};d\in D, \epsilon>0\}$，下面只须证明满足定理((a)若$\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$，则有$\underset{\sim}{W}\in\mathscr{U}$，使$\underset{\sim}{W}\subset\underset{\sim}{U}\cap\underset{\sim}{V}$；(b)若有$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$则有$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$，使得$\underset{\sim}{V}+\underset{\sim}{V}\in\underset{\sim}{U}$；(c)若有$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$则有$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{U}$，使当$|\alpha|\leqslant1$时，$\alpha\underset{\sim}{V}\subset\underset{\sim}{U}$；(d)若$\underset{\sim}{U}\in\mathscr{U}$，则对 MSA 上任一 F 点$x_\lambda$，有$\alpha>0$使$x_\lambda$重于$\alpha\underset{\sim}{U}$)。

(a)对$\underset{\sim}{U}_{d_1,\epsilon_1}, \underset{\sim}{U}_{d_2,\epsilon_2}\in\mu$，取$\epsilon=\min(\epsilon_1,\epsilon_2)$，此处存在$d\in D$使$d\succ d_1$，$d\succ d_2$，有$\|x_\lambda\|_{d_1}\leqslant\|x_\lambda\|_d$，$\|x_\lambda\|_{d_2}\leqslant\|x_\lambda\|_d$，于是当存在$x_\lambda$使$\|x_\lambda\|_d\leqslant\epsilon$时，$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}(x)=\sup\{1-x;\|x_\lambda\|_d<\epsilon\}\leqslant\sup\{1-\lambda;\|x_\lambda\|_{d_1}<\epsilon_1\}=\underset{\sim}{U}_{d_1,\epsilon_1}(x)$，即$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\subset\underset{\sim}{U}_{d_1,\epsilon_1}$，同理$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\subset\underset{\sim}{U}_{d_2,\epsilon}$，所以$\underset{\sim}{U}_{d_1,\epsilon_1}\cap\underset{\sim}{U}_{d_2,\epsilon_2}$。

(b)由(1)，(2)不难证明x_λ重于$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\Leftrightarrow\|x_\lambda\|<\epsilon$对$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\in\mathscr{U}$，根据(5)有$e\in D$使$\|x_\lambda+y_\lambda\|_d\leqslant\|x_\lambda\|_e+\|y_\lambda\|_e$，易证$\underset{\sim}{U}_{e,-\frac{\epsilon}{2}}+U_{e,\frac{\epsilon}{2}}\subset U_{d,\epsilon}$。

(c)对$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\in\mathscr{U}$，当$\alpha=0$时，$0\cdot\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\leqslant Q_\alpha$，其中$\alpha=\sup\limits_{x\in MSA}\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}(x)$，根据(3)，$\lambda\in[0,1]$，$\|Q_\lambda\|_d=0<\epsilon$，所以$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}(Q)=1\geqslant\alpha$；即$Q\cdot\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\subset\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，当$\propto(\alpha)\leqslant1$时，$x_\lambda\in\alpha\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，则对任何$0<\delta<1$，有$X_{1-\lambda+\delta}$重于$\alpha\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，即$\frac{1}{\alpha}X_{1-\lambda+\delta}$重于$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，所以由(4)得：$\|\frac{1}{\alpha}X_{1-\lambda+\delta}\|_d=\frac{1}{|\alpha|}\|X_{1-\lambda+\delta}\|_d<\epsilon$，故$\|X_{1-\lambda+\delta}\|_d<|\alpha|\cdot\epsilon\leqslant\epsilon$，从而$X_{1-\lambda+\delta}$重于$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，即$\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}(x)>\lambda-\delta$，由$\delta$的任意性得$x_\lambda\in\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$，因此$\alpha\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}\subset\underset{\sim}{U}_{d,\epsilon}$。



(d)对 $U_{d,\epsilon}\in\mathscr{U}$ 及 $X_\lambda\in MSA$，取 $\epsilon>\frac{1}{\epsilon}(\|x_\lambda\|_d+1)$，则 $\frac{1}{\alpha}<\epsilon/(\|x_\lambda\|_d+1)$，根据(4)即得 $\|\frac{1}{\alpha}x_\lambda\|_d=\frac{1}{\alpha}\|x_\lambda\|_d<\epsilon$，故 x_λ 重于 $U_{d,\epsilon}$，从而 x_λ 重于 $\alpha U_{d,\epsilon}$。□

现在得出机器类比学习的类比推理的新定义，对于类比推理空间中的任一 $MSA_i(i=1\cdots n)$ 均由三元组组成，即(O,S,G)且O,S,G有如下关系：$G:O\rightarrow S$

下表列出了原定义和新定义的区别。

	范围	O	S	G
原定义	单一要素	O	S	G
新定义	推理空间	O	S	G

三、结 论

通过上面的分析，我们得出了类比推理空间的定义及一些结论，同时对类比推理的定义进行探讨。我们深信在类比推理空间中研究类比推理将会使人们的研究视野更加开阔，从而使类比推理走上正轨，下面用树结构把类比推理在类比空间中的定义表示如左图。

参考文献

[1]蔡庆生，机器学习系统模型研究《江西大学学报》人工智能专辑1988

[2]杨祥金、蔡庆生，《人工智能》科技文献出版社1989

[3]李耀熙、蔡庆生，迅速发展的机器学习《计算机科学》1988，No.1

[4]张文修，《模糊数学引论》西安交大出版社1991

[5]Yanakawa, T., Fuzzy Memory Device, Preprints of 2nd IFSA Congress Tokyo, 1987

[6]S. Assiliss, Artificial Intelligence in the control of real dynamical system, Ph. D Dissertion in London, England, 1974