

α 稳定分布及其在斑点抑制中的应用研究

管 涛 牛晓太

(郑州航空工业管理学院计算机科学与技术系 郑州 450015)

摘 要 α 稳定分布是高斯分布、Rayleigh 分布等的广义形式,可以准确描述脉冲型数据,在 SAR 图像、超声图像、遥感图像的噪声抑制方面具有显著效果和广泛的应用,是成像领域的研究热点。但目前关于 α 稳定分布性质、参数估计及降噪研究尚未有综合的阐述,缺少系统性的分析。从传统的滤波方法,特别是基于 MAP 方法的滤波算法开始,结合当今的热点研究,即相干斑抑制,综合介绍了 α 稳定分布的定义、特征函数、极限性质及特殊分布形式(对称 α 分布(SaS)、拖尾 Rayleigh 分布、高斯分布、混合分布等),阐述和分析了一些现有的参数估计原理和方法。最后,开展了滤波对比试验,验证了 MAP 滤波方法的有效性。同时,对当前最新的相干斑抑制应用做了较为系统的总结。同时,在第 1 节介绍了 SAR 图像相干斑的产生和统计特性、经典的相干斑滤除算法、流行的非局部平均方法的原理。

关键词 相干斑抑制, α 稳定分布, 拖尾分布, 乘性噪声, MAP 滤波器

中图法分类号 TP391.41 文献标识码 A

Study on α Stable Distributions and Speckle Suppression

GUAN Tao NIU Xiao-tai

(Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract α stable distributions are the generalization forms of Gaussian distribution and Rayleigh distribution, capacity of accurately describing impulsive data and have widely applications in imaging and noise suppression. However, there are still lack of comprehensive introduction and comparative analysis in this aspect. Associating with current hot research points in speckle suppression and departing from MAP based filtering approaches, this paper introduces the definition, characteristic functions and properties of α stable distributions and their special forms including symmetrical α distribution, generalized Rayleigh distribution, Gauss distribution and some kinds of mixture distributions, and then analyzes some useful parameter estimation principles and methods. Subsequently, an experimental comparison was carried out and it verifies the superiority of MAP based filter. Besides, this paper introduces the newest applications in speckle suppression of these distributions. At the same time, this paper summaries the statistical characteristics of speckle and discusses some commonly used noise filtering algorithms, such as non-local mean approach.

Keywords Speckle suppression, Alpha stable distribution, Heavy tailed distribution, Multiplicative noise, MAP based filter

1 相干斑的产生和特性

卫星或者飞机上的合成孔径雷达(SAR)等设备通过发射微波,然后接收物体表面反射,形成 SAR 等图像。探测器由于分辨率有限,只能识别地面既定尺寸大小的物体,小于该尺寸的对象,探测器无法分辨。因此,在一个分辨单元内分布着许多物件的雷达波反射点,这些反射点之间存在相位差,相互干扰,造成接受信号的波动,形成明暗相间的斑点,即相干斑^[1,2]。

在接收器上收到的信息构成了复图像,Oliver 和 Quegan 给出复图像的定义:如果记反射点 k 的反射率为 $A_k e^{i\phi_k}$, A_k 为幅度, ϕ_k 为相位,则由全部反射点的反射率构成的图像为 $A e^{i\phi} = \sum_k A_k e^{i\phi_k}$,称为复图像^[2]。复图像中所包含的参数及其

变换形式满足一些统计分布,可以为斑点的滤除提供重要的参考依据。根据表 1^[2]归纳了一些典型参数的统计特性。与幅度相关的参数的均值和方差由单一参数 σ 决定,相位只有在变化的过程中才蕴含信息,在单帧图像中不提供分辨信息。

表 1 参数的统计分布

参数	名称	分布规律
$A e^{i\phi}$	复图像	联合高斯密度函数
A	振幅	瑞利分布或拖尾瑞利分布
A^2	强度	负指数分布
$\ln(A^2)$	对数强度	Fischer-Tippett 分布
ϕ_k, ϕ	相位	均匀分布

相干斑在合成孔径雷达(SAR)成像、超声成像、核磁共振成像(NMR)等领域广泛存在。Oliver 和 Quegan 指出 SAR

本文受国家自然科学基金项目(41171341),河南省科技创新杰出青年计划(114100510006),河南省科技厅项目(092300410140,122102210227,102102210447)资助。

管 涛(1974—),男,博士,CCF 会员,主要研究方向为不确定性信息处理方法、统计机器学习、数据挖掘、图像分割、图像降噪,E-mail: easyguan@126.com。

图像中的相干斑并不是真正的噪声,而是一种电磁测量。相干斑影响图像的可视质量和后期处理,如图像分割、目标识别和跟踪、边缘提取等。因此,滤除相干斑是当前图像处理的主要任务之一,滤除的目标是在保持图像基本信息(如边缘、纹理)的前提下有效地抑制噪声。通常情况下,假定相干斑是乘性噪声,满足方程 $Y=uX$, Y, u, X 分别为观察图像、噪声和真实图像,那么线性方法就很难处理非线性噪声,因此当前有效的方法多是根据相干斑的统计特性设计。

本文第2节介绍了经典的滤波算法;第3节阐述了基于 α 稳定分布的相干斑抑制方法、分布的参数估计方法及应用等;第4节在 Lena 图像上比较了一些相干斑抑制算法的性能;最后总结了全文。

2 典型相干斑滤除方法

目前,除了传统的噪声滤除方法之外^[3],已有一些典型的滤除方法^[4],主要分为基于局部统计性质的相干斑滤波方法,如均值和中值滤波、Sigma 滤波、Lee 滤波^[5,6]、Kuan 滤波^[7]、Frost 滤波、Gamma Map 滤波^[8,9];非局部均值滤波方法^[3]。下面逐一介绍。

均值和中值滤波属于局部平滑化方法,利用局部窗口中的均值或中值替代中心像素,这类方法的优点是实现简单,效率高,缺点包括难以选择合适的窗口大小,容易光滑掉区域边界,造成图像的模糊,影响细节效果。局部光滑滤波器的典型模型包括高斯平滑滤波器、各向异性滤波器(Anisotropic Filter, AF)^[10,11]、全变分滤波器。高斯平滑滤波器是经典的均值滤波方法,它用高斯核函数与图像进行卷积运算,光滑掉局部的噪声,但也造成了图像模糊。各向异性滤波器在指定方向上对图像进行卷积,避免图像的模糊。全变分方法将图像解噪问题建模为全变分的约束优化问题,通过 Euler-Lagrange 方程计算得到解噪图像。与以上的空间近邻方法不同,邻域滤波器以像素的灰度值相似性构造邻域,这些灰度的均值作为中心像素的平均,因而是一种非局部滤波方法。

除了空域滤波方法之外,在频域亦可构造噪声滤波器。典型的频域滤波器有变换域局部自适应滤波器、小波阈值滤波器、平移不变小波阈值滤波器等。频域滤波将图像在某个函数正交基上展开,然后对变换系数进行过滤,还原得到清晰图像。

通常,以上滤波方法能有效处理加性噪声,但在斑点噪声上的效果仍需探讨。相干斑的物理特性对于噪声滤除有很大的指导意义,由此产生了一系列的基于统计特征的滤波方法^[12]。Sigma 滤波是一种早期的图像光滑化方法。在指定高和宽的窗口中,假设像素灰度值满足高斯分布,则在以中心像素灰度值为高斯均值的 2σ 范围内的像素灰度值的权重平均即为滤波值,该权重在 $\{0,1\}$ 内取值。Lee 滤波假设中心像元的局部区域为匀质区域,对 Sigma 滤波进行了改进,用 $\hat{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}w + g(1-w)$ 替代均值 $\bar{g}_{ij}$,式中 g 为中心像素的强度, w 为适当的权重。Lee 滤波对均质区域具有较好的效果,在变化较大的区域或者细节保持方面效果不佳。随后,一些作者提出了各种增强的 Lee 滤波算法。Kuan 滤波假设相干斑与信号相关,采用了新的方差计算公式。它同样不能很好地保持边缘信息。针对这些缺陷,Lopes 将图像划分为不同的区域:均匀区域、非均匀区域和包含分离点目标的区域^[7]。在不

同的区域执行不同的操作,在一定程度上克服了非均匀区域的光滑问题。1993年,Lopes 等人指出把图像的局部区域建模为高斯分布并不合理,于是提出了 Gamma Map 滤波技术,给出了滤波方程^[8]。一些学者指出^[13],Gamma 滤波方法存在着一些不足,如计算复杂引起效率低,没有对滤波方程进行深入的统计分析,没有讨论滤波方程的解的分布情况等。Kuruoglu、孙增国等学者假设真实图像满足 Gamma 分布,相干斑图像满足拖尾 Rayleigh 分布。通过先验和似然计算得到具有最大后验概率的光滑图像。利用这些概率函数和贝叶斯推断可以计算真实图像的最大后验概率^[14,15]。

斑点抑制的局部方法建立在空间近邻关系上,存在自身无法克服的矛盾,一方面为增强斑点去噪效果需选较大的滤波窗口,模糊了边界和小目标;另一方面为保持图像的实际分辨率要求所选的窗口较小,忽视了大块区域的轮廓。目前,非局部方法考虑整个图像的像素的灰度值,已经成为斑点滤除的研究热点之一。图1展示了一张 5×5 个像素的图像,其中每个小格代表一个像素,数值表示灰度值。该图解释了空域近邻和灰度值近邻之间的区别,中心像素的灰度值为6。

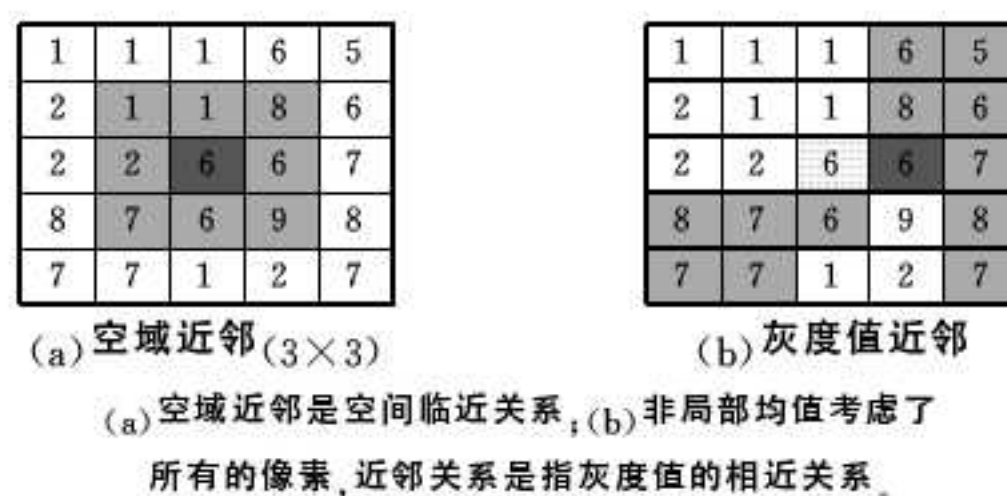


图1 非局部均值滤波

将图1的思想从像素点扩展到邻域结构,即得到 Buades 等人的非局部均值算法^[3]。该算法认为一般的图像具有稀疏性,局部窗口之间具有相似的结构。像素的相似性不是通过直接的灰度值,而是它们的局部邻域的结构相似性度量。某个像素的滤波值即为图像中所有相似窗口的中心值的均值。从形式化上看,像素 x_i 的强度恢复值 $u(x_i)$ 可以表示为如下的权重和:

$$NL(u)(x_i) = \sum_{x_j \in \Omega^d} w(x_i, x_j) u(x_j) \quad (1)$$

其中, d 表示空间维数, $w(x_i, x_j)$ 为根据局部窗口的相似性计算得到的权重。

基于像素点对的方法计算量大,计算耗时。因此,Coupe 等人提出了分块实现的非局部均值算法^[16],改善了算法的效率。算法将区域划分为均匀的重叠的块,即 $\Omega^d = \bigcup_k B_{i_k}$, B_{i_k} 是以 x_{i_k} 为中心的块,降低了计算量。文中假设噪声模型为: $u(x) = v(x) + v'(x)\eta(x)$, 其中 $v(x)$ 为原始图像, $\eta(x) \sim N(0, \sigma^2)$ 为零均值高斯噪声。该模型的优点在于能解决乘性噪声不能处理的超声图像还原问题。目前,非局部均值滤波器已经在超声图像^[17]、3D MRI 图像^[18]、纹理模式^[18]、脉冲噪声污染的图像^[19,20]等领域得到应用,具有不错的图像恢复效果。

3 α 稳定分布模型、参数求解及降噪方法

3.1 α 稳定分布

α 稳定分布是高斯分布、Rayleigh 分布、柯西分布的一般

形式^[21],与常见的分布如高斯分布相比,具有一些良好的性质,如概括性、拖尾、偏斜等。对称 α 稳定分布($S_{\alpha}S$)是 α 非局部均值稳定分布的重要的特殊形式,在 SAR 图像、超声图像的降噪处理中可以很好地近似灰度的分布^[22]。 α 稳定分布具有如下的特征函数^[14]。

$$\varphi(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} \exp\{-\gamma|t|^{\alpha}[1+j\beta\text{sign}(t)\tan(\frac{\alpha\pi}{2})]+j\delta t\}, & \text{if } \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\gamma|t|^{\alpha}[1+j\beta\text{sign}(t)\frac{\pi}{2}\log|t|]+j\delta t\}, & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中, δ 表示位置(Location), α 表示指标(Index)或者尾部的厚度, γ 表示分散程度(Dispersion)或方差, β 表示偏斜度(Skewness)。该特征函数经过傅里叶变换后即可得到一般的 α 稳定分布的密度函数,但是,一般情况下考虑该函数的特殊情况。表 2 描述不同参数取值情况下分布的变化。

表 2 不同参数形成的分布

α	δ	γ	β	说明
2	中心位置	有限	0	高斯分布
1	非中心位置	无限	0	柯西分布
(1,2)	中心位置	无限		α 稳定分布
(0,1)	非中心位置	无限		α 稳定分布
	0		0	拖尾瑞利分布
0.5			-1	Pearson 分布

$S_{\alpha}S$ 分布和拖尾 Rayleigh 分布均具有特征函数 $\varphi(t) = \exp(-\gamma|t|^{\alpha})$ 。在不同假设的情况下,经过傅里叶-斯蒂尔杰斯变换得到的密度函数有一定的差异。实 $S_{\alpha}S$ 变量的密度函数表达为^[22]。

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) \exp(-\gamma \omega^{\alpha}) d\omega \quad (3)$$

当虚部和实部均满足 $S_{\alpha}S$ 时,Kuruoglu 等人指出相应的复变量满足拖尾 Rayleigh 分布,其密度函数表示为:

$$f(x) = x \int_0^{\infty} \rho \exp(-\gamma \rho^{\alpha}) J_0(\rho x) d\rho \quad (4)$$

其中, $0 \leq \alpha \leq 2, \gamma > 0, J_0$ 为第一类零阶 Bessel 函数^[23], $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

与高斯分布不同,拖尾 Rayleigh 分布⁽⁴⁾具有拖尾性质,能够描述冲击型数据,如斑点噪声或者网站访问量的分布。在图像处理中,这种分布可以描述 SAR 观测图像的分布形态(模型参数通过下节的估计方法计算)。那么如果噪声满足 Gamma 分布,则可以根据乘性模型,并结合贝叶斯推断得到最优的复原图像。

在应用中,一般的参数设定会带来复杂的模型,因此,通常考虑特殊的情况,如 $\alpha = 2, 1$,从式(4)可以得到解析解,其他情况只能通过函数级数的形式表达。如果令 $Y = \frac{X}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$,则得到标准化的密度函数为^[12]。

$$f(y) = y \int_0^{\infty} \rho \exp(-\rho^{\alpha}) J_0(sy) ds \quad (5)$$

3.2 参数求解方法

参数求解是问题建模(如降噪算法、密度估计)的关键步骤之一,由于 α 稳定分布包含了积分公式,这使得直接应用传统方法存在着一定的困难。目前,一些学者提出了某些 α 稳定分布参数估计的方法和技术,包括分数低阶矩法、对数矩法、似然估计^[20,22]、抽样、贝叶斯推断等。

3.2.1 分数低阶矩法(Fractional Lower Order Moments, FLOM)

在信号处理中,FLOM 是 α 稳定分布常用的参数估计方法^[14,24-27],估计过程类似于常见的矩估计,但是阶数不一定取整数。除了一些特殊分布之外,一般的 α 稳定分布的高阶整数阶矩可能不存在,无法用来参数估计。一些学者通过分析得出结论:只有在 $\alpha < 2$ 的情况下,当 $p < \alpha$ 时, p 阶矩才是有限的^[23]。在 $S_{\alpha}S$ 模型中,Ma, Chrysostomos 等人导出了一维情况下的 p 为负数时的矩。 n 维随机变量 X 的 p 阶矩表示为^[28]。

$$E(|X|^p) = 2^p \frac{\Gamma(\frac{p+n}{2}) \Gamma(1-\frac{p}{\alpha})}{\Gamma(1-\frac{p}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \gamma^{\frac{p}{\alpha}}, -n < p < \alpha \quad (6)$$

p 的取值下界随着维度发生变化。

与 $S_{\alpha}S$ 模型不同,Kuruoglu 假设雷达反射波的实部和虚部分别满足高斯分布,则它们的联合满足 $S_{\alpha}S$ 分布。对特征函数进行傅里叶反变换和极坐标变换得到拖尾 Rayleigh 分布⁽⁴⁾^[14]。根据已有的积分变换公式^[27],变量 X 的 p 阶矩表示为:

$$E(x^p) = 2^{p+1} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \Gamma(-\frac{p}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{p}{2}) \alpha} \gamma^{\frac{p}{\alpha}}, -2 < p < -\frac{1}{2} \quad (7)$$

在不同的假设下,式(6)和式(7)有所不同。从式(6)或式(7)可见,参数 γ 可以通过不同阶矩的比值方法消除,得到仅含有 α 的方程。由于矩本身可以通过样本估计,因此参数可通过求解优化问题得到。对于不同的分布,积分式的结果可以通过查阅 Gradshteyn 和 Ryzhik 著作中有关积分方程的公式表得到^[23]。FLOM 方法形式简单,但是其缺点是较难计算,估计值依赖于 p 的选择。

3.2.2 对数矩估计^[23]

在取值范围内当 p 值较大时,FLOM 估计结果较好。相比之下,对数矩估计更为简易,而且不依赖于 p 值的选择^[28]。对数矩估计的原理是将原始变量经过对数变换,然后利用变换后的样本估计参数的值。为了理解这种思想,这里简述其过程。随机变量 X 经对数变换得 $E(X^p) = E(e^{p \ln|X|})$,令随机变量 $Y = \ln|X|$,则可将 $E(e^{p \ln|X|})$ 泰勒展开得到 $\sum_{k=0}^{\infty} E(Y^k) p^k / k!$ 。根据文献^[23]中积分迭代公式可得^[28]。

$$E(Y^k) = \frac{d^k}{dp^k} [C_1(p, \alpha) \gamma^{\frac{p}{\alpha}}]_{p=0} \quad (8)$$

在各项同性二元变量情况下,经过较复杂的推导得到^[20]。

$$E(Y) = C_e (\frac{1}{\alpha} - 1) + \frac{1}{\alpha} \log \gamma \quad (9)$$

$$Var(Y) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2}) \quad (10)$$

其中, C_e 为欧拉常数。通过样本估计式(9)和式(10)左边的值,即可求得参数 α, γ 的估计。对拖尾 Rayleigh 分布变量或者偏斜 α 稳定分布而言,这种思想仍然适用。孙增国和 Kuruoglu 等人分别进行了推导,得到了类似的解析式^[14,15]。

3.2.3 极大似然估计

极大似然估计在指数分布族中得到了广泛的应用,如(混合)高斯分布^[29]、指数分布等,可以方便地得到解析解,但是

在 α 稳定分布中无法得到解析解, 只能通过近似的方法计算。

早期, 不少学者研究了基于 α 稳定分布的参数估计方法, 有的直接使用了经典的极大似然(ML)估计方法, 但是效果不一定好。Brorsen 和 Yang 仅考虑了对称 α 稳定分布情况, 使用传统的 ML 估计, 利用优化软件 MINOS 计算最优的参数^[24]。Bodenschatz 和 Nikias 提出了基于 Fisher 得分和牛顿迭代的参数估计方法, 尝试提高算法的计算速度^[30]。由于直接使用 ML 估计无法写出解析形式, 计算耗时, 因此需要考虑其他的解决方法。对于超声图像中完全发展的相干斑, Aysal 和 Barner 使用了 Rayleigh 分布来描述。这一点与描述复信号的拖尾 Rayleigh 分布有所不同。模型的参数即 Rayleigh 分布的形状参数, 通过极大似然估计求解^[35]。但是, 这种方法假设了局部区域的幅度值为常数, 使得指定的滤波窗口较小, 在效率上或者背景复杂的图像中有一定的局限性。

近些年来出现了不少新颖的 ML 估计方法。考虑到 α 稳定分布的密度函数可由式(2)经过傅里叶反变换得到, Mittnik 等人将密度函数 f 表示为:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) e^{-itx} dt \quad (11)$$

将式(11)右边在 N 个点 $x_k = (k-1-(N/2))h$ ($k=1, \dots, N$) 上离散化即得到 f 的近似^[34]:

$$f((k-1-\frac{N}{2})h) \approx s(-1)^{k-1-(\frac{N}{2})} \times \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \varphi(2\pi s(n-1-\frac{N}{2})) e^{-i2\pi(n-1)(k-1)/N} \quad (12)$$

式中, $s = (hN)^{-1}$ 。Mittnik 等人通过上式计算每个样本的密度估计值。他们的实验比较说明在相似精度条件下, 该算法在计算效率上比文献^[24]中的方法有 10 倍的提升。

在似然估计的理论研究方面, DuMouchel 较早地研究了稳定分布极大似然估计的性质、估计的渐进正态性、收敛性等方面^[31,32]。其中渐进正态性值得关注, 它描述了 ML 参数估计的合理性。简短地讲^[32], 给定参数向量 $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 。当 $2 \geq \alpha > 0, -\infty < \gamma < \infty$ 时, 极大似然估计趋于无穷大。但是在限制 $\hat{\alpha} \geq \epsilon > 0$ 的条件下, $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta, \hat{\gamma} - \gamma, \hat{\delta} - \delta)$ 以分布收敛于 $N(0, I^{-1})$, 式中 I 为 Fisher 信息矩阵。2009 年, Andrews 等人使用 Bootstrap 方法证明了在一定数量的抽样条件下, 在自回归模型中 α 稳定分布的 ML 估计是 $n^{\frac{1}{2}}$ 协调的^[33]。

3.2.4 MCMC 抽样估计

一般情况下, 由于无法得到 α 稳定分布参数估计解析解的形式, Markov chain Monte Carlo (MCMC) 抽样和贝叶斯推断是解决参数估计的有效手段之一^[36,37]。MCMC 的功能是用来产生近似地服从指定分布的样本, 利用这些样本计算最大后验概率。当今流行的 MCMC 算法包括 Metropolis-Hastings 算法、Gibbs 抽样、辅助变量法等。关于这些算法的细节在 Givens 和 Hoeting 的著作中有详细的阐述^[38]。

在 α 稳定分布参数估计方面, 有一些典型的工作。Buckle 从理论的角度研究了基于贝叶斯推断和 MCMC 的参数估计方法^[39], 在 α 稳定分布参数估计方面是较早的工作。Salas-Gonzalez 等人在 $S_{\alpha S}$ 模型中使用了 Gibbs 抽样方法。该方法在参数的联合分布表达式比较复杂的时候, 通过分解将联合概率变成简单的条件概率的乘积形式(文献^[40], 式(10))。

每个参数具有独特的条件概率分布, 在每个条件概率上对单独的参数进行抽样估计, 经过先验假定、贝叶斯推断, 迭代更新之后得到近似最优的解。2007 年, Lombardi 提出了随机游走 MCMC 算法来估计 α 稳定分布的离散傅里叶变换(DFT)近似的参数, 在性能上较以往的 MCMC 方法有较大的提升^[41]。

3.2.5 其他方法

除了以上介绍的方法之外, 参数还可以通过样本的分位数^[42]、样本的特征函数^[43]、极值方法^[44]、随机期望最大化^[45]求解。

3.2.6 参数估计方法的分析和比较

这几种参数估计方法都依赖较为复杂的数学推导, 一些学者在理论和实验方面都给出了较为清晰的验证结果^[28,34]。在此, 根据这些作者的推导和结果简单比较和分析它们的优缺点。

从计算效率上看, 不少作者认为基于 FFT 近似的极大似然估计具有很大的优势, 并给出了实验比较结果。由于表达式中存在积分式, 一些研究者指出 FLOM 方法的缺点在于估计的精度依赖于 p 值的选择和优化求解算法。对数矩估计能够表达出参数的解析式, 是值得推荐的算法, 但是, 变换后分布的参数求解过程是一个较为复杂的数学问题。MCMC 和贝叶斯相结合的方法是解决复杂分布参数估计的有效方法, 具有较高的效率和稳定性。然而, 由于需要确定先验分布、模型参数和抽样, 因而这种方法的计算过程相对繁琐。

在噪声处理方面, 也有一些比较分析的工作^[3-5]。Bates 和 McLaughlin 总结了先前的一些参数估计方法, 指出这些算法的适用范围(见文献^[46]的表 1)。从信号中的脉冲噪声角度考虑, Tsihrintzis 和 Nikias 比较了一些基于 α 稳定分布的噪声滤波器的性能^[47]。对偏斜 α 稳定分布的密度估计问题, Kuruoglu 对参数重新推导了一些参数估计方法。

3.3 乘性模型的对数变换

斑点抑制模型通常表达为乘性模型。对数变换是将乘性模型转化为加性模型的有效方法。但是与数值不同, 对随机变量(函数)的变换会改变分布的形态。在连续分布的情况下, 变换后变量的分布形式可以通过分布函数的定义导出^[48]。对乘性模型 $Y = uX$ 做对数变换得到 $\ln Y = \ln u + \ln X$ 。假设变量 X 的分布为 $f_X(x)$, 则通过密度函数的定义可知 $\tilde{x} = \ln x$ 的分布为 $f_X(e^{\tilde{x}})e^{\tilde{x}}$ 。

由于直接变换后的分布难以描述, Xie 等人采用了 Edgeworth 级数展开的方式近似它^[49]。Edgeworth 展开是一种基于高斯分布的正交级数表示方式, 利用累积量或者各阶矩计算分布的参数, 如均值、方差等。实际上, 它描述了一个分布和高斯分布的近似程度。

在超声斑点去除模型中, Chenpu 等人证明了在每个样本服从 Rayleigh 分布的条件下, L 个强度的平均的开方服从 Nakagami 分布^[52]。他们采用对数变换将乘性模型转化为加性模型, 从而 Rayleigh 分布噪声的对数就满足了 Nakagami 分布。进而结合真实图像的 Markov 随机场模型, 得到了真实图像的目标模型。

3.4 混合模型

在 MAP 滤波方法中, 混合模型亦用来描述观察数据的

分布等。混合模型具有如下的一般形式:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} g(x|v) dP_V(v) \quad (13)$$

式中, $g(x, v)$ 为某种分布形式, 如高斯分布^[50,51] 或者瑞利分布等; $P_V(v)$ 为参数 v 的分布。在离散情况下式(13)表达为:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^N g(x|v_i) P_V(v_i) \quad (14)$$

式(14)表示 N 个子分布的权重和。通过样本计算分支分布的参数和权重, 可以得到有效的数据近似分布模型。

在降噪处理中, 高斯尺度混合模型(GSM)一直是热点模型^[29], 表示式为(14), 因为它能够近似任意的函数, 包括 α 稳定分布^[52]。Salas-Gonzalez 等人扩展了 GSM, 提出了具有对称或偏斜性质的 α 稳定分布混合模型^[52], 对脉冲性信号具有很好的近似能力。在非高斯分布情况下, Rayleigh 混合分布被用于近似海杂波的幅度分布^[53]。它比 Weibull 分布更具一般性, 与 K 分布具有等价性^[54]。这些分布都在雷达海杂波辨识中具有较多的应用。使用混合模型的一个缺点是参数难以计算。特别地, 当分支分布比较复杂的时候, 如对称 α 稳定分布, 模型参数只能通过 MCMC 和抽样的方法近似。

3.5 α 稳定分布在斑点滤除中的应用

在 Gamma-Map 滤波中, 真实图像的分布无法得到。如果通过平均若干个独立的样本近似真正的原始图像, 则该平均信号的幅度满足 Gamma 分布。一般假定观察图像的振幅满足对称 α 稳定分布或者拖尾 Rayleigh 分布^[14]。在 α 稳定分布降噪方面, 目前有一些典型的研究工作。Achim 等人使用贝叶斯推断和拖尾 Rayleigh 分布建立了 SAR 图像的 MAP 滤波模型^[57], 基本原理分为几步: 1) 利用对数变换将乘性模型转化为加性模型, 得到加性模型中对数变量的分布规律; 2) 利用贝叶斯公式建立真实图像的最大后验近似模型, 假设真实图像满足拖尾 Rayleigh 分布、噪声满足 Gamma 分布或者 Nakagami 分布; 3) 利用样本、第二类(second-kind)累积量和 Mellin 变换计算拖尾 Rayleigh 分布的参数 α 和 γ 。作者开展的对比试验表明算法具有较好的滤波效果。在多视情况下, 真实图像可以近似服从 Gamma 分布, Kuruoglu、孙增国等学者采用拖尾 Rayleigh 分布近似相干斑图像, 根据样本计算参数, 得到具有最大后验概率的滤波图像。李旭涛等人用不同的 α 稳定分布参数作为特征来分类和辨识雷达的杂波类型^[60]。

SAR 图像滤波不仅可以使使用拖尾 Rayleigh 分布^[14], 还可以通过混合 Rayleigh 分布实现^[55]。早期, 一些学者已经证明, $S_{\alpha S}$ 稳定分布随机变量 (r, v) 可以分解为零均值高斯分布 r, v 和正的稳定分布 r, v 的乘积形式^[22], 即 $Z = Y^{\frac{1}{\alpha}} X = VX$, 密度函数表示为:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z|V}(z|v) f_V(v) J(z, v) dv \quad (15)$$

$f_{Z|V}(z|v)$ 可以为高斯分布、瑞利分布等。当取高斯分布时, 并离散化 V 即得到常用高斯混合模型(GMM)。作为 α 分布的特殊形式, GMM 在斑点噪声滤除中多有应用。Kozick 等人利用了 GMM 的非线性逼近能力对非高斯噪声建模, 取得了良好的效果^[58]。白静等人对 SAR 图像进行 Directionlet 变换, 然后在变换域中建立了高斯混合尺度模型, 滤除相干斑^[59]。当每个分支分布取瑞利分布时, 可以得到 Sangston 等

人提出的 SAR 图像混合锐利模型, 在目标识别中得到良好的应用^[56]。2009 年, Salas-Gonzalez 等人建立了对称 α 稳定分布的混合模型, 用来对冲击型数据建模^[55]。模型扩展了 GMM, 对于例外数据点具有更好的适应性。但是这种模型无法求得解析解, 作者使用了 Gibbs 采样估计模型参数。

根据这些研究, 可以发现:

- (1) 在斑点抑制建模中通常选择较为容易求解的分布;
- (2) 依据参数的不同设置, 分布可以用来近似观察图像或者真实图像;
- (3) 混合分布可以近似任意的模型, 但是不同子分布的选择可能影响着模型的计算复杂度。

4 实验比较与分析

为了分析基于 Gamma 先验和 α 稳定分布的 MAP 滤波算法的性能, 这里给出了一些算法的比较验证。首先采用了标准的 Lena 256×256 灰度图像, 使用 Matlab(7.0 版)函数添加斑点噪声。原始图像和加斑点图像如图 2(a) 和 (b) 所示。加噪公式为 $I = I + n * I$, 式中 I 为图像, n 为均值为 0、方差为 0.1 的随机噪声。图 3(a)~(d) 为分别采用 Lee 滤波、Frost 滤波、Kuan 滤波、MAP 滤波得到的图像。表 3 给出了这几种滤波算法的参数比较。可见, MAP 滤波具有最高的峰值信噪比(PSNR)和信噪比(SNR), 同时具有最低的均方误差。各个滤波器优选的参数如下:

Lee 滤波: 窗口大小 5×5 , 等效视数 20;

Kuan 滤波: 等效视数依标准差确定;

MAP 滤波: 窗口大小 5×5 , 等效视数 3。

虽然非局部均值方法是当今的一个热点, 但是它有一定的局限性, 如运行速度慢、不适合较复杂场景图像等, 在此不使用这种方法。



图 2



图 3 4 种典型的滤波算法得到的结果

表3 滤波后图像和原图像的参数比较

	Lee 滤波	Frost 滤波	Kuan 滤波	MAP 滤波
MSE	622.6	380.3	287.9	205.1
SNR	6.4	8.6	9.8	11.2
PSNR	20.2	22.3	23.5	25

结束语 本文首先介绍了一些常用的噪声滤除方法,然后有针对性地介绍了基于 MAP 方法的噪声滤除算法。这其中主要的模型是 α 稳定分布。它是很多乘性噪声分布模型的一般形式,形式相对复杂,但是能解决许多非高斯噪声的滤波问题。文中描述了 α 稳定分布的一些性质、参数求解方法以及一些典型的滤噪应用。实验部分比较了经典的滤噪算法和 MAP 算法的性能。

在国内,关于 α 稳定分布的研究内容较少^[60]。相比之下,国外在建模、滤噪、密度估计、参数估计、混合模型、渐进性质等方面有不少突出的成果。在实验数据部分,除了典型的斑点图像(如 SAR 图像、超声图像、遥感图像、纹理图像^[61]等)可用于分析之外, Monte-Carlo 方法也用于产生模拟的实验数据。

α 稳定分布应用领域广泛,除了 SAR 和超声等类型图像滤噪之外,还可以用来描述 Web 大数据、经济数据^[62],对主题建模、时间序列分析、回归分析等。相关工作仍有待于进一步的研究和拓展。

参考文献

- [1] Marshall J S, Hirschfeld W. Interpretation of the fluctuating echo from random distributed scatters, part I[J]. Canadian Journal of Physics, 1953, 31(6): 962-994
- [2] Oliver C, Quegan S. 合成孔径雷达图像理解[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009
- [3] Buades A, Coll B, Morel A M. Image denoising methods. A new nonlocal principle[J]. SIAM Review, 2010, 52(1): 113-147
- [4] 韩春明, 郭华东, 王长林. SAR 图像斑点噪声抑制的本质[J]. 遥感学报, 2002, 6(6): 470-474
- [5] Touzi R. A review of speckle filtering in the context of estimation theory[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(11): 2392-2405
- [6] Lee J S, Wen J H, et al. Improved sigma filter for speckle filtering of SAR imagery[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 47(1): 202-213
- [7] Lee J S. Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1980, PAMI-2(2): 165-169
- [8] Kuan D T, Sawchuk A A, Strand T C. Adaptive noise smoothing filter for images with signal-dependent noise[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1985, 7(2): 165-178
- [9] Lopes A, Tonzi R, Nezry E. Adaptive speckle filter and sense heterogeneity[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1990, 28(6): 992-1000
- [10] Yu Y, Acton S T. Speckle reducing anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(11): 12602-1270
- [11] 李灿飞, 王耀南, 肖昌炎, 等. 用于超声斑点噪声滤波的各向异性扩散新模型[J]. 自动化学报, 2012, 38(3): 412-419
- [12] Lopes A, Nezry E, Touzi R, et al. Structure detection and statistical adaptive speckle filtering in SAR images [J]. International Journal of Remote Sensing, 1993, 14(9): 1735-1758
- [13] Baraldi A, Parmiggiani F. A refined gamma MAP SAR speckle filter with improved geometrical adaptivity[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1995, 33(5): 1245-1257
- [14] Kuruoglu E E, Zerubia J. Modeling SAR images with a generalization of the Rayleigh distribution[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 527-534
- [15] 孙增国, 韩崇昭. 拖尾 Rayleigh 分布: 基本性质及其应用[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1067-1075
- [16] Coupe P, Yger P, Prima S, et al. An optimized blockwise non local means denoising filter for 3D magnetic resonance images[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2008, 27(4): 425-441
- [17] Coupe P, Hellier P, Kervrann C, et al. NonLocal Means-based Speckle Filtering for Ultrasound Images[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(10): 2221-2229
- [18] Brox T, Kleinschmidt O, Cremers D. Efficient nonlocal means for denoising of textural patterns[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(7): 1083-1092
- [19] Zhang Xu-ming, Zhan Yi, Ding Ming-yue, et al. Decision-based non-local means filter for removing impulse noise from digital images[J]. Signal Processing, 2013, 93: 517-524
- [20] 杨学志, 沈晶, 范良欢. 基于非局部均值滤波的结构保持相干斑噪声抑制方法[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(12): 2443-2450
- [21] Nikias C L, Shao M. Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications[M]. New York: Wiley, 1995
- [22] Samoradnitsky G, Taqqu M S. Stable Non-Gaussian Random Processes[M]. New York: Chapman and Hall, CRC, 1994
- [23] Gradshteyn S I, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products[M]. New York: Academic, 1965
- [24] Brorsen B W, Yang S R. Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters[J]. Statistics -Simulation and Computation, 1990, 19(4): 1459-1464
- [25] Zolotarev V M. Integral transformations of distributions and estimates of parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws [M] // Gani J, Rohatgi V K, eds. Contribution to Probability: A Collection of Papers Dedicated to Eugene Lukacs. New York Academic, 1981: 283-305
- [26] Georgiou P G, Tsakalides P, Kyriakakis C. Alpha-stable modeling of noise and robust time-delay estimation in the presence of impulsive noise[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 1999, 1(3): 291-302
- [27] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions[M]. Dover, New York, 1972
- [28] Ma X, Nikias C L. Parameter estimation and blind channel identification in impulsive signal environments[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(12): 2884-2897
- [29] 管涛, 李玲玲. 高斯混合模型、求解算法及视觉应用综述[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(12): 1461-1471
- [30] Bodenschatz J S, Nikias C L. Maximum-likelihood symmetric α -stable parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(5): 1382-1285
- [31] DuMouchel W H. Stable Distributions in Statistical Inference [D]. Yale University, Department of Statistics, 1971
- [32] DuMouchel W H. On the asymptotic normality of the maximum-

- likelihood estimate when sampling from a stable distribution [J]. The Annals of Statistics, 1973, 1(5): 948-957
- [33] Andrews B, Calder M, Davis R A. Maximum likelihood estimation for α -stable autoregressive processes[J]. The Annals of Statistics, 2009, 37(4): 1946-1982
- [34] Mittnik S, Rachev S T, Doganoglu T, et al. Maximum likelihood estimation of stable Paretian models[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1999, 29(10-12): 275-293
- [35] Aysal T C, Barner K E. Rayleigh-Maximum-Likelihood filtering for speckle reduction of ultrasound images[J]. IEEE Transactions Medical Imaging, 2007, 26(5): 712-727
- [36] Godsill S. MCMC and EM-based methods for inference in heavy-tailed processes with alpha-stable innovations[C] // Proceeding of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics, 1999: 228-232
- [37] Szajnowski W J, Wynne J B. Simulation of dependent samples of symmetric alpha-stable clutter[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2001, 8(5): 151-152
- [38] Givens G H, Hoeting J A. Computational Statistics[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2008
- [39] Buckle D J. Bayesian inference for stable distributions[J]. Journal of American Statistical Association, 1995, 90(430): 605-613
- [40] Salas-Gonzalez D, Kuruoglu E E, Ruiz D P. Modelling with mixture of symmetric stable distributions using Gibbs sampling[J]. Signal Processing, 2010, 90(3): 774-783
- [41] Lombardi M J. Bayesian inference for α -stable distributions: A random walk MCMC approach[J]. Computational Statistics & Data Analysis-CS&DA, 2007, 51(5): 2688-2700
- [42] Fama E F, Roll R. Parameter estimates for symmetric stable distributions[J]. Journal of the American Statistical Association, 1971, 66(334): 331-338
- [43] Press S J. Estimation of univariate and multivariate stable distributions[J]. Journal of the American Statistical Association, 1972, 67(340): 842-846
- [44] Kuruoglu E E. Density parameter estimation of skewed α -stable distributions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(10): 2192-2201
- [45] Moser G, Zerubia J, Serpico S B. Dictionary-based stochastic expectation maximization for SAR amplitude probability density function estimation[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006, 44(1): 188-200
- [46] Bates S, McLaughlin S. The estimation of stable distribution parameters from teletraffic data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(3): 865-871
- [47] Tsihrintzis G A, Nikias C L. Performance of optimum and sub-optimum receivers in the presence of impulsive noise modeled as an alpha-stable process[J]. IEEE Transactions on Communications, 1995, 43(2): 904-914
- [48] 王梓坤. 概率论基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1976
- [49] Xie Hua, Pierce L E, Ulaby F T. Statistical Properties of Logarithmically Transformed Speckle[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(3): 721-727
- [50] Andrews D F, Mallows C L. Scale Mixtures of normal distributions. Journal of the Royal Statistical Society [J]. Series B (Methodological), 1974, 36(1): 99-102
- [51] West M. On scale mixtures of normal distributions[J]. Biometrika, 1987, 74(3): 646-648
- [52] Yu Cheng-pu, Zhangm Ci-shen, Xie Li-hua. A multiplicative Nakagami speckle reduction algorithm for ultrasound images[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2012, 23(4): 499-513
- [53] Kuruoglu E E, Molina C, Fitzgerald W J. Approximation of α -stable probability densities using finite Gaussian mixtures[C] // The 9th European Signal Processing Conference: Theories and Applications. Rhodes, Greece, 1998: 989-992
- [54] Jakeman E, Pusey P N. Significance of K distributions in scattering experiments[J]. Physical Review Letters, 1978, 40: 546-550
- [55] Salas-Gonzalez D, Kuruoglu E E, Ruiz D P. Finite mixture of α -stable distributions [J]. Digital Signal Processing, 2009, 19(2): 250-264
- [56] Sangston K J, Gerlach K R. Coherent detection of radar targets in a non-Gaussian background[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30(2): 330-340
- [57] Achim A M, Kuruoglu E E, Zerubia J. SAR image filtering based on the heavy-tailed Rayleigh model[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(9): 2686-2693
- [58] Kozick R J, Sadler B M. Maximum-likelihood array processing in non-Gaussian noise with Gaussian mixtures[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 48(12): 3520-3535
- [59] 白静, 侯彪, 王爽, 等. 基于提升 Direction-let 域高斯混合尺度模型的 SAR 图像噪声抑制 [J]. 计算机学报, 2008, 31(7): 1234 - 1241
- [60] 李旭涛, 王首勇, 金连文. 应用 Alpha 稳定分布对雷达杂波的辨识 [J]. 电子与信息学报, 2008, 30(9): 2042-2046
- [61] Kuruoglu E E, Zerubia J. Skewed alpha-stable distributions for modeling textures [J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(1): 339-348
- [62] Tsionas E G. Monte carlo inference in econometric models with symmetric stable disturbances [J]. Journal of Econometrics, 1998, 88(2): 365-401

(上接第 180 页)

- [5] Cunha A L, Zhou J, Do M N. The nonsubsampling Contourlet transform: theory, design and applications[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(10): 3089-3101
- [6] Li Hong-jun, Zhao Zhi-min, Yu Xiao-lei. Grey theory applied in non-subsampling Contourlet transform[J]. IET Image Processing, 2012, 6(3): 264-272
- [7] 杨萌, 张弓. 自适应超完备字典学习的 SAR 图像降噪 [J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(4): 596-602
- [8] 李洪均, 谢正光, 李蕴华, 等. 图像字典的盲构造算法 [J]. 光电子·激光, 2013, 24(9): 1825-1831
- [9] Wang Z, Bovik A C. A universal image quality index[J]. IEEE signal Processing Letters, 2002, 9(3): 81-84
- [10] Naseem I, Togneri R, Bennamoun M. Linear regression for face recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(11): 2106-2112