

40-41, 43

一类容错多总线结构

TP 336
TP 393

杨晓帆 何中市 陈廷槐 程代杰 曹泽翰

(重庆大学计算机研究所 系统工程及应用数学系 630044)

A 摘要 多总线网络是并行/分布式系统的主要通信结构之一。本文研究每个处理机挂在两条总线上的多总线结构的容错设计问题,提出了一类具有很好的容错性和可扩充性的多总线结构。
关键词 多总线结构,容错性,可扩充性,图论,连通性。

计算机通信

一、引言

并行/分布式系统的通信结构对系统的性能、可靠性及模块性都有很大的影响,多总线网络因具有成熟的通信协议及容易扩充等优点而成为系统的主要通信结构之一^[1,2]。

在采用多总线通信结构 M 的系统中,处理机之间的报文传输一般是通过其它处理机以存贮-转发的方式完成(除非源处理机和目的处理机挂在同一条总线上),因此某些处理机的失效势必会影响剩余处理机之间的通信能力。在保证剩余处理机能两两通信的条件下允许失效的处理机的最大个数在一定程度上反映了总线结构 M 的可靠性,将它称为 M 的容错度,记为 $T_p(M)$ 。通信结构具有较大的容错度是系统设计的要求之一。

随着 VLSI 工艺的不断进步,对通信结构的要求也越来越高。在进行系统设计时希望通信结构具有较好的可扩充性,这包括以下两方面的内容:①在选用较大规模的结构时对较小规模结构的改动尽可能地小;②对总线条数和处理机个数有较大的选择余地。

Pradhan^[1]提出了一类多总线结构 BM,它由 $2n$ 条总线和 n^2 个处理机组成,这些总线被分成每组各有 n 条总线的两组,从每组中各任取一条总线,都有一个处理机同时挂在它们上面。BM 结构具有很好的容错性,但对总线条数和处理机个数的选择余地较小。本文提出了比 BM 结构更广的一类多总线结构 B^2 ,它同时具有很好的容错性和可扩充性。

二、一类新的多总线结构 B^2

本文规定系统中每个处理机只能挂在两条总线上,并且挂在各条总线上的处理机数目尽可能均等。一个多总线结构 M 可以用一个图 $G=(V,E)$ 来表示, G 的顶点表示总线, G 的边表示处理机,一条边含有一个顶点的充要条件是对应处理机挂在对应总线上。图 G 被称为结构 M 的对偶图 (Dual Graph),记为 $G=D(M)$ ^[1],例如图 2 表示图 1 中结构的对偶图。

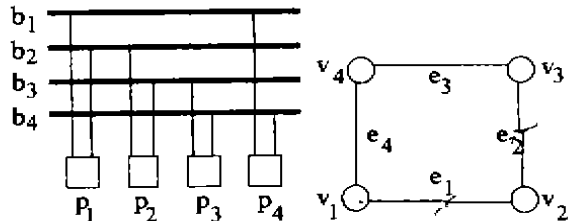


图1 一种多总线结构 M 图2 M 的对偶图 $D(M)$

在图 G 中为了使剩余边不连成一片而必须删除的边的最小数目被称为 G 的边边连通度,并被记为 $\lambda_c(G)$,它从一个侧面反应了图 G 的连通性^[1]。关于总线结构 M 和它的对偶图 $D(M)$ 有关系式: $T_p(M) = \lambda_c(D(M))$ 。用 $M(p,q)$ 表示全体由 p 条总线和 q 个处理机组成的结构的集合。用 $G(p,q)$ 表示全体由 p 个顶点和 q 条边组成的拟正则图(各个顶点的关联边的数目尽可能相等的图)的集合,令

$$T_p(p,q) = \max\{T_p(M); M \in M(p,q)\}$$

$$\lambda_c(p,q) = \max\{\lambda_c(G); G \in G(p,q)\}$$

对于 $M \in M(p,q)$, $T_p(M) = T_p(p,q)$ 的充要条件是 $\lambda_c(D(M)) = \lambda_c(p,q)$ 。

杨晓帆 副教授,博士,何中市 讲师,博士生,陈廷槐 教授,博士生导师,程代杰 教授,博士生导师,曹泽翰 教授。

10

易证 $T_p(BM(2n, n^2)) = T_p(2n, n^2)$, 因此 BM 结构的容错性是很好的, 其不足之处是对总线数和处理器数的选择余地较小。

受到 BM 结构的启发, 我们提出一种更广的结构 B^2 , 其构造分成如下两种情况:

情况一 B^2 含有 $2n$ 条总线, 这些总线被分成两组, 其中一组的总线被标记为 $0, 1, \dots, n-1$, 另一组为 $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}$; B^2 含有 $m = kn + r$ 个处理器, $0 \leq k < n, 0 \leq r < n$, 处理机的挂接情况如下:

●对满足 $0 \leq i < n$ 和 $0 \leq j < k$ 的每一种组合 (i, j) , 有一个处理器同时挂在总线 $i, \bar{i+j}$ 上;

●对满足 $0 \leq i < r$ 的每一个 i , 有一个处理器同时挂在总线 $\bar{i}, \bar{i+k}$ 上。

情况二 B^2 含有 $2n+1$ 条总线, 这些总线被分成三组, 其中一组的总线被标记为 $0, 1, \dots, n-1$, 另一组为 $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}$, 第三组为 ∞ ; B^2 含有 $m = kn + r + \lceil k/2 \rceil$ 个处理器, $0 \leq k < n, 0 \leq r < n + \lceil (k+1)/2 \rceil - \lceil k/2 \rceil$, 处理机的挂接情况如下:

●对满足 $0 \leq i < n$ 和 $1 \leq j < k$ 的每一种组合 (i, j) , 有一个处理器同时挂在总线 $i, \bar{i+j}$ 上;

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
b_1	1	1	1									
b_2				1	1	1						
b_3							1	1	1			
b_4										1	1	1
b_5	1								1		1	
b_6		1		1								1
b_7			1		1		1					
b_8						1		1		1		

图3 $B^2(8, 12)$

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
b_1	1					1			1		
b_2		1					1			1	
b_3					1			1			1
b_4			1					1		1	
b_5				1		1					1
b_6					1		1		1		
b_7	1	1	1	1							

图4 $B^2(7, 11)$

●对满足 $0 \leq i < r$ 的每一个 i , 有一个处理器同时挂在总线 $i, \bar{i+k}$ 上;

●对满足 $\lceil k/2 \rceil \leq i < n$ 的每一个 i , 有一个处理器同时挂在总线 i, \bar{i} 上;

●对满足 $0 \leq i < \lceil k/2 \rceil$ 的每一个 i , 有一个处理器同时挂在总线 ∞, i 上, 有一个处理器同时挂在总线 ∞, \bar{i} 上。

图3和图4给出了 B^2 结构的两个例子。

三、对 B^2 结构的评价

下面从二方面对 B^2 结构进行评价。

1) 容错性

定理 1 (1)若 $kn \leq m < (k+1)n$, 则 $T_p(B^2(2n, m)) \geq T_p(2n, m) - 1 = 2k - 4$; (2)若 $kn \leq m < kn + kn/(2k+1)$, 则 $T_p(B^2(2n, m)) = T_p(2n, m) = 2k - 3$ 。

定理 2 (1)若 $kn + \lceil k/2 \rceil \leq m < (k+1)n + \lceil (k+1)/2 \rceil$, 则 $T_p(B^2(2n, m)) \geq T_p(2n, m) - 1 = 2k - 4$; (2)若 $kn + \lceil k/2 \rceil \leq m < kn + k(2n+1)/(4k+2) + \lceil k/2 \rceil$, 则 $T_p(B^2(2n, m)) = T_p(2n, m) = 2k - 3$ 。

这两个定理表明 B^2 结构的容错性是很好的, 其证明是通过证明对偶图的相应性质来完成的, 限于篇幅, 省略详细证明过程。

2) 扩充性 一方面, 在原有的 B^2 结构上添加处理器以组成新的结构, 不用改变原有处理器和总线的配置情况。另一方面, B^2 结构中处理机的数目是连续变化的, 这为系统设计带来了很大的方便。因此 B^2 结构具有很好的扩充性。

四、结束语

评价多总线结构优劣的主要指标有: 容错度, 可扩充性; 总线容错度, 在保证处理器能两两相互通信的条件下允许失效的总线的最大条数; 最大通信延迟, 在任意一对处理器之间通信的最大延迟时间; 平均通信延迟, 在任意一对处理器之间通信的平均延迟时间。

本文提出的 B^2 结构的前两个指标很好。 B^2 结构的缺点是总线容错性较差(只要某个处理器挂接的两种总线同时失效, 该处理器就不能与其它处理器通信), 为此需要研究处理器挂在多条总线上的结构。另外 B^2 结构的两种通信延迟在处理器数接近总线数的平方数量级时很小, 但在处理器数比总线数的平方数量级小得多时就太大了。设计综合指标较优的多总线通信结构有待进一步研究。

(参考文献见 P43)

$\overline{1}, \dots, \overline{n-1}$, 第三组为 $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$, 第四组为 ∞ . B^3 含有 $m = kn + \lceil 2k/3 \rceil + r$ 个处理机, $1 \leq k \leq n/3 - 1, 0 \leq r < n + \lceil 2(k+1)/3 \rceil - \lceil 2k/3 \rceil$, 处理机的挂接方式如下:

- 对满足 $0 \leq i < n$ 和 $1 \leq j < k$ 的每种组合 (i, j) , 有一个处理机同时挂在总线 $\overline{i}, \overline{i+j}, \overline{i+2j}$ 上;
- 对满足 $0 \leq i < r$ 的每一个 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\overline{i}, \overline{i+k}, \overline{i+2k}$ 上;
- 对满足 $0 \leq i < 2\lceil k/3 \rceil - 2$ 的每一个偶数 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\infty, \overline{i}, \overline{i}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i}, \overline{i+1}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i+1}, \overline{i+1}$ 上;

乘余处理机的挂接又分成两种情况:

(1) 如果 $k \neq 1 \pmod{3}$, 则

- 对满足 $\lceil 2k/3 \rceil \leq i < n$ 的每一个 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\overline{i}, \overline{i}, \overline{i}$ 上;
- 对满足 $2\lceil k/3 \rceil \leq i < 4\lceil k/3 \rceil - 2$ 的每一个偶数 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\infty, \overline{i}, \overline{i}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i}, \overline{i+1}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i+1}, \overline{i+1}$ 上.

(2) 如果 $k = 1 \pmod{3}$, 则

- 对满足 $4\lceil k/3 \rceil \leq i < n$ 的每一个 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\overline{i}, \overline{i}, \overline{i}$ 上;
- 对满足 $2\lceil k/3 \rceil - 1 \leq i < 4\lceil k/3 \rceil - 2$ 的每一个奇数 i , 有一个处理机同时挂在总线 $\infty, \overline{i}, \overline{i}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i}, \overline{i+1}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i+1}, \overline{i+1}$ 上.
- 对 $i = 2\lceil k/3 \rceil - 2$, 有一个处理机同时挂在总线 $\infty, \overline{\infty}, \overline{i}$ 上, 有一个处理机同时挂在 $\infty, \overline{i}, \overline{i}$ 上.

图 1 至图 3 给出了 B^3 的三个例子.

	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	∞	
P_1	1																					
P_2		1																				
P_3			1																			
P_4				1																		
P_5					1																	
P_6						1																
P_7							1															
P_8								1														
P_9									1													
P_{10}										1												
P_{11}											1											
P_{12}												1										
P_{13}													1									
P_{14}														1								
P_{15}															1							
P_{16}																1						
P_{17}																	1					
P_{18}																		1				
P_{19}																			1			
P_{20}																				1		

图 1: $B^3(2, 3)$

图 2: $B^3(3, 3)$

	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	∞	
P_1	1																					
P_2		1																				
P_3			1																			
P_4				1																		
P_5					1																	
P_6						1																
P_7							1															
P_8								1														
P_9									1													
P_{10}										1												
P_{11}											1											
P_{12}												1										
P_{13}													1									
P_{14}														1								
P_{15}															1							
P_{16}																1						
P_{17}																	1					
P_{18}																		1				
P_{19}																			1			
P_{20}																				1		

图 3: $B^3(4, 3)$

二、对 B^3 结构的评价

下面从两个方面对 B^3 结构进行评价.

1) 容错性

定理 1 (1) 若 $kn \leq m < (k+1)n$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) \geq T_p^3(3n, m) - 2 = 3k - 6$; (2) 若 $kn \leq m < kn + 2kn/(3k+1)$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) = T_p^3(3n, m)$; (3) 若 $kn \leq m < kn + kn/(3k+2)$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) = T_p^3(3n, m)$.

定理 2 (1) 若 $kn + \lceil k/3 \rceil \leq m < (k+1)n + \lceil (k+1)/3 \rceil$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) \geq T_p^3(3n, m) - 2 = 3k - 6$; (2) 若 $kn + \lceil k/3 \rceil \leq m < kn + 2k(3n+1)/(9k+3) + k/3$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) \geq T_p^3(3n, m) - 1$; (3) 若 $kn + \lceil k/3 \rceil \leq m < kn + k(3n+1)/(9k+6) + k/3$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) = T_p^3(3n, m)$.

定理 3 (1) 若 $kn + \lceil 2k/3 \rceil \leq m < (k+1)n + \lceil (k+1)/3 \rceil$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) \geq T_p^3(3n, m) - 2 = 3k - 6$; (2) 若 $kn + \lceil 2k/3 \rceil \leq m < kn + 2k(3n+2)/(9k+3) + 2k/3$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) \geq T_p^3(3n, m) - 1$; (3) 若 $kn + \lceil 2k/3 \rceil \leq m < kn + k(3n+2)/(9k+6) + 2k/3$, 则 $T_p(B^3(3n, m)) = T_p^3(3n, m)$.

上述定理的证明思路是将 $T_p(B^3)$ 转化为 $\lambda(M(B^3))$, 然后证明超图的相应结论, 限于篇幅, 详细证明过程省略. 这一系列定理表明 B^3 结构的容错性是很好的, 例如图 1-3 中的三个总线结构的容错度都达到最大.

2) 易扩充性 一方面, 在原有的 B^3 结构上添加处理机以组成新的 B^3 结构, 不用改变原有处理机和总线的连接情况. 另一方面, B^3 结构中处理机和总线的数目是连续变化的, 这为系统设计带来了很大的方便.

三、结束语

本文提出的 B^3 结构具有很好的处理机容错性和可扩充性, 并且它的吞吐量和总线容错性优于 B^2 结构. B^3 结构中每个处理机只能挂到三条总线上, 这导致其吞吐量较小, 研究综合指标较优的多端口总线结构的设计问题是我们下一步要做的工作.

参考文献

- [1] 陈廷槐等, 超图的连通性和容错多总线系统的设计, 中国科学(A辑), no. 12, 1987
- [2] Chen Tinghui, Fault Diagnosis and Fault Tolerance, A Systematic Approach to Special Topics. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- [3] D. K. Pradhan et al., Communication structures in fault-tolerant distributed systems, Networks, Vol. 23, 1993
- [4] 杨晓帆, 容错和诊断: 神经网络和多处理机系统中若干问题的研究, 重庆大学博士学位论文, 1994