

傅里叶分析 小波分析 神经网络

信号分析

(8)

计算机科学1999Vol. 26No. 12

29-30, 57 从傅里叶分析到小波分析:回顾与发展^{*}

From Fourier Analysis to Wavelet Analysis: Recall and Development

李建平

(后勤工程学院 重庆 400016) (电子科技大学应用数学系 成都 610054)

张万萍

陈廷槐 徐问之

(重庆大学计算机研究所 重庆 400044)

Abstract In this paper, the history and features of Fourier analysis and wavelet analysis are introduced completely.

Keywords Fourier analysis, Wavelet analysis, Feature

1 傅里叶分析

大约在1822年,法国著名数学家傅里叶从热力学的角度提出一种新的理论即“热的解析理论”,这种理论以一种全新的观点对当时的分析领域产生了极为重要的影响,使数学、物理等学科发生了很大的变化,并引起众多科学家的广泛关注,后被誉为傅里叶分析方法,但傅里叶提出的这种方法仅仅是一种理论,尚不能具体进行应用。1965年,美国贝尔实验室的 Cooley, Tukey 两位工程师综合前人的研究成果,在大量计算机模拟的基础上,提出了影响深远的快速傅里叶变换即 FFT。从此,傅里叶方法从理论走向实践,成为大家爱不释手的一种数学工具,十分自然地将许多学科统一起来,很难发现一门自然科学或工程技术不与傅里叶方法发生连系。傅里叶分析优美的数学表达式、卓有成效的数值效果使人们认为:科学研究首先是追求一种美,一种自然的美,一种人与自然和谐的美。正如德国最著名的数学家之一 Hermann Weyl 曾说:“我的研究工作始终是设法把真和美统一起来,当我不得不二者取一时,我总是选择美”。

傅里叶变换定义了“频率”的概念,用它可分析信号能量在各个频率成分中的分布情况。对信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 其傅里叶变换定义为:

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

傅里叶逆变换定义为:

$$f(t) = \check{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

式(1)、(2)形成傅里叶变换对,并对信号 $f(t)$ 实施分解和综合。

尽管傅里叶分析对数学、物理产生了深远的影响,但对于大多数应用来说是很不够的,即传统的傅里叶分析有如下一些不足之处:①为了用式(1)从模拟信号 $f(t)$ 中提取频谱信息 $F(\omega)$,就要取无限的时间量,使用过去的和将来的信号信息只为计算单个频率 ω 的频谱;②式(1)甚至没有反映出随时间变化的频率,实际上需要的是,人们怎样能够确定时间间隔,使在任何希望的频率范围(或频带)上产生频谱信息;③在 L^2 以外空间,变换系数不能刻划出 $f(t)$ 或 $f(x)$ 所在的空间;④因为一个信号的频率与其周期长度成正比,由此得到,对于高频谱的信息,时间间隔要相对地小以给出比较好的精度,而对于低频谱的信息,时间间隔要相对地宽以给出完全的信息,亦即需要一个灵活可变的时间—频率窗,使在高“中心频率”时自动变窄,而在低“中心频率”时自动变宽。换句话说,傅里叶变换无法做局部分析。小波分析正是为了克服傅里叶变换这些不足而提出来的。

2 小波分析的发展历史^[1-3]

任何理论的提出和发现都有一个漫长的准备过程,小波分析也不例外。1910年 Haar 提出了小波规范正交基,这是最早的小波基,当时并没有出现“小波”这

^{*} 本文的研究得到国家自然科学基金和重庆市中青年科技专家基金资助,李建平 博士,教授,研究方向是小波分析及其应用;张万萍 硕士;陈廷槐 教授,博士导师;徐问之 教授。

个词,1936年 Littlewood 和 Paley 对傅里叶级数建立了二进频率分量分组理论,对频率按 2^j 进行划分,其傅里叶变换的相位变化并不影响函数的大小,这是多尺度分析思想的最早来源,1946年 Gabor 提出的加窗傅里叶变换(或称短时傅里叶变换)对弥补傅里叶变换的不足起到了一定的作用,但并没有彻底解决这个问题,后来,Calderon, Zygmund, Stern 和 Weiss 等人将 L-P 理论推广到高维,并建立了奇异积分算子理论,1965年,Calderon 给出了再生公式,1974年,Coifmann 对一维 H^p 空间和高维 H^p 空间给出了原子分解,1975年,Calderon 用他早先提出的再生公式给出了抛物型 H^1 的原子分解,这一公式现在成为许多函数分解的出发点,其离散形式已接近小波展开,此后,许多数学家为着各种不同的目的,给出了各类函数空间上的“原子分解”、“分子分解”、“拟正交分解”、“弱正交分解”、“框架分解”等,1976年,Peetre 在用 L-P 方法给出 Besov 空间统一描述的同时,引入了 Besov 空间的一组基,其展开系数的大小刻画了 Besov 本身,1981年,Stromberg 通过对 Haar 正交基的改进,引入了 Sobolev 空间 H^s 的正交基,这些工作为小波分析奠定了基础。

1981年,法国地质物理学家 Morlet 在分析地质数据时基于群论首先提出了小波分析(wavelet analysis)这一概念,Morlet 最初提出的是形状不变的小波,因为在分析函数(信号)时,加窗傅里叶变换并不具有形状,Morlet 方法所取得数值分析的成功不仅激发 Morlet 本人对小波分析进行深入研究,而且也大大鼓舞了法国理论物理学家 Grossmann,于是他们携手共同研究小波理论,1985年,法国大数学家 Meyer 首次提出光滑的小波正交基,后被称为 Meyer 基,对小波理论作出了重要贡献,1986年,Meyer 及其学生 Lemarie 提出了多尺度分析的思想,1988年,年轻的女数学家 Daubechies 提出了具有紧支集光滑正交小波基——Daubechies 基,为小波应用研究增添了催化剂,因此 Daubechies 名扬世界,现在人们借助 Daubechies 基和 Mallat 算法可从事广泛的应用研究,后来,信号分析专家 Mallat 提出了多分辨分析的概念,给出了构造正交小波基的一般方法,因为在这以前人们构造的正交小波基都带有高度技巧性和不可模仿性,多分辨分析概念是小波理论最基本的概念之一,最常用的多分辨分析有两大类:一类是时间有限的多分辨分析,另一类是样条多分辨分析,正交样条小波是最早构造出的小波函数(除 Haar 小波之外),多分辨分析原理与人类的视觉和听觉方式十分接近,例如我们站在月球上看地球,

只能看到地球上大概轮廓和地球上突出的建筑物(如中国的万里长城等),这就是高频边缘的提取;当我们站在地球上地球时,一草一木清晰可辨,这就是低频分析,Mallat 受金字塔算法的启发,以多分辨分析为基础提出了著名的快速小波算法——Mallat 算法(FWT),这是小波理论突破性的成果,其作用和地位相当于傅里叶分析中的 FFT, Mallat 算法的提出宣告小波从理论研究走向广泛的应用研究,1989年,Meyer 出版了三卷的《小波与算子》是小波理论这一新兴学科诞生的重要标志,该书是目前最权威、最系统的小波理论著作,其中第一卷适合所有关心和学习小波的读者,第二、三卷适合分析专家。

美国 Texas A&M 大学数学与电气工程教授、逼近论中心主任、小波研究的权威之一崔锦泰著的“An introduction to wavelets”是美国科学出版社出版的一部小波分析的入门书,崔教授主编的长达700余页的会议论文集使得小波研究向点深面广方面发展, Daubechies 的“Ten lectures on wavelets”总结了她的研究成果,并向世界科技工作者普及小波理论做出了积极贡献。

上述分析我们不难发现,傅里叶分析的提出是从理论通过 FFT 算法直接迈向应用,这是“理论→应用”的过程;小波分析的提出则首先是取得应用成果(如 Morlet 的地震数据处理等),再形成系统理论,最后在实际应用领域全面铺开,这是“应用→理论→应用”的过程,说明小波分析更具有实用价值。

3 小波分析待解决的有关问题

小波理论真正产生的时间较短,正在蓬勃发展,其理论研究结果和应用范围一时还无法准确预料,下面几方面的研究显得非常有意义。

(1)小波的基本理论与方法;(2)矢量积小波变换;(3)非线性小波变换的理论研究与应用;(4)小波滤波器系数的统一解析构造;(5)高维小波(张量积与非张量积形式)的理论研究;(6)快速小波算法与小波包算法;(7)超大规模科学计算的快速小波变换与算法;(8)小波与分形的定量的辩证统一关系;(9)Mallat 算法的分形研究(不动点压缩原理);(10)小波理论在数值分析中的应用;(11)小波理论在混沌(Chaos)湍流中的应用;(12)小波理论在偏微分方程求解中的应用;(13)小波理论在图像信号处理中的应用;(14)小波的神经网络研究与神经网络的小波分析;(15)小波分形与神经网络联合在图像压缩中的应用;(16)小波分析在人类

(下转第57页)

3.3 两者之比较

以上介绍的基于“信息传送”的系统和基于“事件驱动”的系统都是一个可行的分布式工作流系统,但两者各有特点。

IBM 公司的基于“持续性信息传送”机制的一个最大优点是增加了系统的错误恢复能力。它强调了每个结点的功能独立性,使得一个结点的失败只影响到与该结点有关的相应工作流实例或某一工作流步骤,从而将影响范围缩小到最小范围,使得系统构造方面有了更好的升级性和适应性,但是它没有提供一个类似于“事件历史”的历史记录,所以该机制现在正在研究如何使用日志文件来管理工作流,并尝试用非持续性的信息传送来提高性能。

苏黎士大学所研究的基于“事件驱动”的机制主要是开发了 Brokers/Services 模型和 EVE 平台,从而将分布式工作流的实行分为三步^[2]:首先由高层的图形界面提供工作流建模工具,然后由中层的 Brokers/Services 模型执行工作流,最后由底层的 EVE 平台提供分布式工作流的实行框架,主要负责事件管理、历史记录和工作流执行者之间的交流,B/S 模型提供了一个较完善的语言定义机制,保证建模人可以了解工作流执行者的实际行为,组成工作流说明的工作流执行过程可以被正确定义,工作流执行过程的准确性得到

保证,工作流执行完毕后的分析也成为可能。但是,对活动的工作流或正在运行的组成部分进行修改所带来的影响还没有得到很好的解决,这将是以后的研究方向。

结束语 虽然目前的研究取得了一定的成绩,分布式工作流的实现机制在某种程度上也开始发挥作用,但是这些模型还是十分理想化的,如现今的 EVE 平台还不能处理异常的恢复,在某些长时间运行的工作流应用例子中,工作流类型的发展变化问题也仍未得到解决,所以我们还要继续努力,利用现有的理论研究成果进行深入研究并逐渐完善之,力求开发出一个能够真正支持分布式工作流的系统。

参考文献

- 1 Alonso G, et al. Exotica/FMQM: A Persistent Message-Based Architecture for Distributed Workflow Management
- 2 Feppert A, Tomtros D. Event-based Distributed Workflow Execution with EVE: [Technical Report] 96.05
- 3 Tomtros D, Geppert A. Semantics of Reactive Comopoment in Event-Driven Workflow Execution, Institut Informatits Universitat Zurich

(上接第30页)

与社会发展中的应用。

4 小波分析的发展前景

小波分析是科学家、工程师和数学家们共同创造的,反映了大科学时代学科之间的综合、渗透的优势,小波理论来自傅里叶分析,思想也来源于傅里叶分析,它不能完全取代傅里叶分析,它是傅里叶分析的新发展。小波理论与傅里叶分析的互补优势和相辅相成的良好效果已被科研实践所证实。小波分析的发展一方面需要从理论上提高和丰富,尤其是三维和三维以上的小波理论(因为它们还很不成熟),另一方面需要在应用中提出更多的研究课题,使小波应用的深度和广度得到进一步拓展。

尽管小波分析形成了目前国际研究热点,但我们不能认为小波分析是包打天下的有效工具。例如,在进行数值分析时,采用小波展开的优点是能够较准确地

算出 $f(x)$ 的精细结构,但付出的代价是代数方程阶数增大,条件数变坏,因此小波分析仅仅作为一个基来使用是很不够的,更重要的是作为数值计算后处理的分析手段。

由于小波理论处理问题的特殊技巧和特殊效果,小波分析不仅为纯数学与应用数学提供新的强有力的工具,而且是多媒体、信息高速公路某些核心技术的理论保证。

参考文献

- 1 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 重庆:重庆出版社,1997
- 2 李建平. 矢量积小波变换及小波分析的理论与应用研究: [博士学位论文]. 重庆:重庆大学,1998. 6
- 3 李建平,唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆:重庆大学出版社,1999