

粗糙集

解释

不精确理论

人工智能 ②

计算机科学 1999Vol 26No 12

S-8

各种不精确理论的 Rough 集解释^{*}

Interpretations of Various Uncertainty Theories Using Rough Sets

刘清

刘群

TP18

(南昌大学计算机科学与工程系 南昌 330029) (武汉水产学校计算机教研组 武汉 430070)

Abstract This paper summarizes the rough set theory that is used as a unifying framework for various uncertainty theories. Fuzzy sets, Dempster-Shafer theory, Modal Logic and Probability Logic are interpreted by lower, upper approximations and properties of Rough Sets. And the properties of these interpretations are also presented, it proposes a preliminary exploration directions for further studying the relations between rough set and various uncertainty theories.

Keywords Rough sets, Fuzzy sets, Dempster-Shafer theory of evidence, Modal logic, Probability logic

长期以来,含糊(Vagueness)概念一直是被哲学家和逻辑学家十分重视的研究内容,特别是近些年,它也成为 AI 领域中的热门课题。含糊概念的思想出自于谓词逻辑的创始人 G. Frege 的所谓边界线观点,他认为如果个体域上的一些元素既不能在某集合上被分类,也不能在该集合的补集上被分类,则把这些元素归结为边界线区域^[1]。Rough 集哲学原理是基于知识具有粒状结构的假设,而这种知识颗粒性(granularity)是由一些重要个体不可能是分明的或相似的或者说是相同的这样一个事实引入的^[2]。全体不分明个体的集合被称做基本集,并且形成关于全域上知识的基本颗粒。任意一些基本集的并集上所有元素都能看成是某集合的成员,则该集合是精确的集合,否则一个集合是 Rough 的。

因此每个 Rough 集都含有边界线区域上的个体,即这些个体不能借用其有效知识分类为这个集合或它的补集的成员。由 Z. Pawlak 提出的 Rough 集方法是假设任何含糊集都可用被称做这个集的下和上近似来精确地表示。下近似是由那些属于这个集合的所有个

体组成,上近似包含那些可能属于这个集合的所有个体,显然上近似和下近似之间的差就构成了含糊集的边界线区域^[3]。

Rough 集理论覆盖了其它各种不精确理论,例如, Fuzzy 集、证据理论、模态和概率逻辑等各种不精确理论都可在 Rough 集意义下通过 Rough 下和上近似及其性质给予解释,可见 Rough 集与其它各种近似理论一样都是针对不精确的 Frege 边界集问题而提出的处理含糊集问题的一种方法。Rough 集的意义优于其它各种理论之处在于它是经等价关系定义的,因此边界线区域中的含糊元素个数可以被计算出来,而其它各种不精确理论只能是靠统计得到。

1 Rough 集中的一些概念及其意义

设 U 是非空的个体全域, I 是 U 上的不分明关系。为简便起见称 I 为等价关系, $I(x)$ 是包含 x 的等价类, $X \subseteq U$ 是任意子集, X 关于 I 的下近似,记成:

$$I_*(X) = \{x \in U : I(x) \subseteq X\} \quad (1)$$

类似地 X 关于 I 的上近似,记成:

* 这项研究得到国家自然科学基金和江西省自然科学基金的资助。

- in a BDI-Architecture. In: Proc. of the 2nd Intl. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufmanns, San Mateo, CA, 1991. 473~484
- 13 周北海. 模态逻辑导论. 北京: 北京大学出版社, 1997
- 14 Linder B, et al. Formalizing Motivational Attitudes of Agents. In: Intelligent Agents 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995
- 15 Konolige K. A Deduction Model of Belief. Pitman/Morgan Kaufmanns, 1986

- 16 Levesque H J. A logic of Implicit and Explicit Belief. AAAI-84. The 4th, Austin, TX, 1984. 198~202
- 17 Kripke S A. Semantical analysis of modal logic 1. In: J W Addison, et al., eds The Theory of Models, North-Holland, Amsterdam, 1965. 206~220
- 18 Konolige K. Pollack M E. A Representational Theory of Intention. IJCAI-93, 1993. 390~395

$$I^+(X) = \{x \in U, I(x) \cap X \neq \emptyset\} \quad (2)$$

X 的边界区域,记成:

$$BN_I(X) = I^+(X) - I^-(X) \quad (3)$$

若 $BN_I(X) = \emptyset$, 则 X 关于 I 被称做精确的; 如果 $BN_I(X) \neq \emptyset$, 则集 X 关于 I 是 Rough 的.

$$\text{正区域被定义为 } POS(X) = I^-(X) \quad (4)$$

$$\text{负区域是 } NEG(X) = U - I^+(X) \quad (5)$$

正、负和边界区域是 U 上的三个互不相交的区域, 因此可以看出正区域的元素全属于 X , 负区域的元素全不属于 X , 边界线区域的元素只能说可能属于 X .

$X \subseteq U$ 的下和上近似分别对应于由不分明关系 I 产生的 Pawlak 拓扑的内点和闭包^[4]. $X \subseteq U$ 的近似精度记成:

$$\alpha_I(X) = K(I^-(X))/K(I^+(X)) \quad (6)$$

其中 $K(S)$ 表示集合 S 的基数, 它类似于数学上的表示 $|S|$, 即 S 中的元素个数. 显然 $0 \leq \alpha_I(X) \leq 1$, 如果 $\alpha_I(X) = 1$, 则 X 是清楚的, 否则 $\alpha_I(X) < 1$, 则 X 关于 I 是 Rough 的.

拥有边界线区域的集合 $X \subseteq U$ 的含糊是指 U 上的有些元素既不能在 X 上也不能在 $U-X$ 上被精确地分类, 因此出现关于元素隶属于集合 X 的隶属度的不精确性问题^[5]. 为了从 Rough 观点讨论不精确性问题, 我们定义关于 Rough 集意义的 Rough 隶属函数:

$$\mu_X^I(x) = K(X \cap I(x))/K(I(x)) \quad (7)$$

其中 $x \in U$, $I(x)$ 是包含 x 的等价类, 显然 $0 \leq \mu_X^I(x) \leq 1$. 利用 Rough 隶属函数可定义 Rough 下、上近似和边界线区域:

$$I^-(X) = \{x \in U; \mu_X^I(x) = 1\},$$

$$I^+(X) = \{x \in U; \mu_X^I(x) > 0\} \quad \text{和}$$

$$BN_I(X) = \{x \in U; 0 < \mu_X^I(x) < 1\}.$$

从上述定义可以看出 Rough 集理论中的含糊和不精确性之间存在一定的联系. 含糊是关于集合而言, 有拓扑味, 而不精确性是关于集合的元素而言, 有概率性能. 所以当我们说含糊时, 近似是必然的, 而当我们考虑不精确数据时, Rough 隶属度是需要的.

2 Fuzzy 集理论的 Rough 集解释

给定一个全域 U 的子集 X , 关于 Fuzzy 集的命题的提法是:

X_x : “ x 属于给定集合 X ”

其中 $x \in U$ 并且 X 表示 U 的子集, 使得 X 是一个含糊集^[5,7], 给定的集合 X 涉及的含糊性是完全能够用 Rough 集来描述的. 它取决于全域 U 上定义的不分明关系. 即用上述公式 (2)~(7) 来定义 Fuzzy 集的命题 X_x . 根据这个定义我们可以得到用 Rough 隶属函数来表征 Fuzzy 隶属函数的类似性质:

(1) $\mu_X^I(x) = 1$ iff $x \in POS(X)$, 其中 $POS(X)$ 是 X 的正区域;

(2) $\mu_X^I(x) = 0$ iff $x \in NEG(X)$, 其中 $NEG(X)$ 是 X 的负区域;

(3) $0 < \mu_X^I(x) < 1$ iff $x \in BN_I(X)$, 其中 $BN_I(X)$ 是 X 的边界区域;

(4) 若 $IND(I) = \{(x, x); x \in U\}$, 则 $\mu_X^I(x)$ 是 X 的特征函数, 或称自反函数;

(5) 若 $xIND(1)y$, 则 $\mu_X^I(x) = \mu_X^I(y)$, 其中 $IND(1)$ 是 U 上全体不分明关系之交^[1];

$$(6) \mu_{U-X}^I(x) = 1 - \mu_X^I(x);$$

$$(7) \mu_{X \cap Y}^I(x) \leq \min\{\mu_X^I(x), \mu_Y^I(x)\}, \text{ 其中 } x \in U;$$

$$(8) \mu_{X \cup Y}^I(x) \geq \max\{\mu_X^I(x), \mu_Y^I(x)\}, \text{ 其中 } x \in U;$$

(9) 如果 Z 是 U 上两两不相交的子集族, 则 $\mu_Z^I(x) = \sum_{x \in Z} \mu_X^I(x)$, 其中 $x \in U$.

公式 2-(7) 也可用信息系统 $S = (U, A)$ 及其属性 A 来定义, 即 $\mu_X^I(x) = K([x]_A \cap X)/K([x]_A)$, 其中 $x \in U$, 同样有上述性质 (1)~(9). 这些性质用通常的集合论方法是不难证明的^[5]. 从这里我们也可以看到用 Rough 集来解释 Fuzzy 集理论比用 Fuzzy 集自身的意义解释似乎更加精确和理论化, 因为这个隶属函数 μ 显然是可通过精确的数学公式被计算的, 而不象 Fuzzy 中的 μ 只能依赖于统计或经验得到.

3 DS 证据理论的 Rough 集解释

给定一个个体集合 U , 且 $X \subseteq U$, 则 DS (Dempster-Shafer) 证据理论提供两个测度函数^[8,9], 置信函数 Bel (Belief) 和似然推理函数 Plb (Plausibility). 置信函数 $Bel: 2^U \rightarrow [0, 1]$, 其中 2^U 是 U 的幂集. $\forall X \in 2^U$, $Bel(X)$ 被解释为在有效证据的情况下, 一给定元素 $x \in U$, 它属于一个给定集合 X 的相信程度. 置信函数和似然推理测度函数能方便地用一个基本赋值函数 $m: 2^U \rightarrow [0, 1]$ 表示, 它应满足下面两个条件:

$$(i) m(\Phi) = 0; (ii) \sum_{X \in 2^U} m(X) = 1.$$

对每个 $X \in 2^U$, $m(X)$ 表示在所有有效证据支持下, 元素 $x \in U$, 它属于 X 的程度. 实质上置信和似然推理函数的表达式应是:

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y), Plb(X) = \sum_{Y \cap X \neq \emptyset} m(Y) \quad (8)$$

$$Bel(X) \div Bel(\sim X) \leq 1, Plb(X) = 1 - Bel(\sim X) \quad (9)$$

其中 Y 是 X 的任意子集. 在 Rough 集意义下, 基本赋值函数 m 应满足: (I) $m(\Phi) = 0$; (II) $\sum_{X \in 2^U} m(X) = 1$. 因此置信函数 Bel 和似然推理函数 Plb 分别如下定义:

$$Bel(X) = K(I^-(X))/K(U) = K(\bigcup_{E \subseteq X} E)/K(U) = \sum_{E \subseteq X} K(E)/K(U) = \sum_{E \subseteq X} m(E)$$

$$Plb(X) = K(I^+(X))/K(U) = K(\bigcup_{E \cap X \neq \emptyset} E)/K(U) =$$

$$\sum_{E \in U/\Gamma} K(E)/K(U) = \sum_{E \in U/\Gamma} m(E) \quad (8')$$

其中 X 是全集 U 上的任意子集, $E \in U/\Gamma$ 是等价类, $m(E) = K(E)/K(U)$ 被理解为等价类 E 的概率, Φ 是空集。

$$\text{Bel}(X) = \text{Bel}(\sim X) \leq 1, \text{Plb}(X) = 1 - \text{Bel}(\sim X) \quad (9')$$

(9') 中的两式成立是显然的。当 X 是一致集, 即 $1_\Gamma(X) = \Gamma^+(X)$ 时, “ $\leq$ ” 中的 “ $=$ ” 成立, 否则不等号成立。显然, 在 Rough 集理论意义下 $\text{Bel}(X)$ 和 $\text{Plb}(X)$ 的计算较之 DS 证据理论意义下更加理论化。

从以上描述的证据理论中的条件 (i) 和 (ii), 式 (8) 和 (9) 到 Rough 集理论中的条件 (I) 和 (II), 式 (8') 和 (9') 完全建立了统一的框架, 也就是条件 (i) 和 (ii) 与条件 (I) 和 (II) 完全类似, 式 (8) 和 (9) 可用式 (8') 和 (9') 解释。

对决策表 $S = (U, A)$ 上的 Rough 集, 也可用来定义或解 DS 证据理论中的置信函数 Bel 和似然推理函数 Plb 。在这种意义下, 基本赋值函数是 $m(\Phi) = 0$ 和 $m(\theta) = K(\{x \in U; a_A(x) = \theta\})/K(U)$, 其中 $\Phi \neq \emptyset \subseteq N = \{i; d(x) = 1 \wedge x \in U\}$, $a_A(x)$ 是属性集 A 中的属性 a 关于 x 的值的集合, $d(x)$ 是决策属性 d 关于 U 上的个体 x 的属性值。因此对任意 $\theta \subseteq N$ 的置信函数 Bel 和似然推理函数 Plb 分别有如下定义:

$$\text{Bel}(\theta) = K(A^-(\bigcup_{i \in \theta} X_i))/K(U)$$

$$\text{Plb}(\theta) = K(A^+(\bigcup_{i \in \theta} X_i))/K(U)$$

其中 A^- 和 A^+ 分别是关于 X_i 的并集的下和上近似。

4 模态理论的 Rough 集解释

在模态逻辑 S_5 中, 公式集 $\Gamma = \{T, \perp, P, Q, \dots, \varphi, \Psi, \dots\}$, 并且在 Γ 上定义一个解释函数 $\|: \Gamma \rightarrow 2^U$, 其中

U 被假定为所论述的非空全域, $\forall \varphi \in \Gamma$, 有 $|\varphi| = \{w \in 2^U; u_w(\varphi) = T\}$ 。其中 u_w 是子集 $w \subseteq U$ 上的赋值函数^[14-15], 于是得到受限的 S_5 上的逻辑公式与 Rough 集理论中的近似空间 $A = (U, R)$ 上子集之间的对应:

$$(1) |T| = 2^U; (2) |\perp| = \varnothing;$$

$$(3) |\sim \varphi| = \sim |\varphi|; (4) |\varphi \vee \Psi| = |\varphi| \cup |\Psi|;$$

$$(5) |\varphi \wedge \Psi| = |\varphi| \cap |\Psi|; (6) |\varphi \rightarrow \Psi| = |\sim \varphi| \cup |\Psi|;$$

$$(7) |\varphi \leftrightarrow \Psi| = (|\sim \varphi| \cup |\Psi|) \cap (|\varphi| \cup |\sim \Psi|)。$$

模态理论中的必然算子 ($\Box$) 和可能算子 ($\Diamond$) 是通过可能世界赋予解释^[16-17], 假定在可能世界集合 $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ 上定义一个二元可达关系 R' : 对任意二个可能世界 w 和 w' , 如果 $wR'w'$, 则称 w' 是从 w 可达的。可以证明如此的可达关系 R' 是等价关系^[14]。因此, $\Box \varphi$ 和 $\Diamond \varphi$ 在可能世界 w 上的真值为

$$u_w(\Box \varphi) = T \text{ iff 对 } \forall w' \in w, \text{ 如果 } wR'w' \rightarrow u_{w'}(\varphi) = T \quad (10)$$

$$u_w(\Diamond \varphi) = T \text{ iff } \exists w' \in w, \text{ 使得 } wR'w' \wedge u_{w'}(\varphi) = T \quad (11)$$

从式 (10) 或 (11) 可知一个公式 φ 在 W 上必然或可能真当且仅当它在一切或存在从 w 可达的可能世界 w' 上取真。若 $w_1, \dots, w_n$ 被理解为个体全域 U 上的一切子集, 则显然在有限可能世界集合限制下, 有 $W = \{w_1, \dots, w_n\} = 2^U$ 。于是近似空间 $A = (U, R)$ 上的 R 可用可能世界集 W 上的可达关系 R' 置换, 得

$$(8) |\Box \varphi| = R^+ (|\varphi|); (9) |\Diamond \varphi| = R' (|\varphi|)。$$

如果逻辑隐含用集合中的包含赋予解释, 则模态 S_5 系统可用 Rough 集理论的下和上近似算子的一些集论性质解释。

S_5 公理系统 ^[14]		Rough 集论性质	
T.	$\varphi \rightarrow \varphi$;	RT	$R_+ (\varphi) \subseteq \varphi $;
5.	$\Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$;	R5.	$R^+ (\varphi) \subseteq R_+ (R^+ (\varphi))$;
K.	$\Box (\varphi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \Psi)$;	RK.	$R_+ (\varphi) \rightarrow \Psi \rightarrow (R_+ (\varphi) \subseteq R_+ (\Psi))$;
Df.	$\Diamond \varphi = \sim \Box \sim \varphi$	RDf.	$R^+ (\varphi) = \sim R_+ (\sim \varphi)$;
PL.	φ 是重言式;	RPL.	$ \varphi = \{w \in 2^U; u_w(\varphi) = T\} = 2^U$, 重言式;
RN.	$\varphi \rightarrow \Box \varphi$;	RRN'	$ \varphi \rightarrow R_+ (\varphi)$;

被理解成任意 $\varphi \in \Gamma$, 如果 φ 在 $|\varphi| \in 2^U$ 上取真, 则根据 $R_+ (|\varphi|) \subseteq |\varphi|$, 可知 φ 在 $R_+ (|\varphi|)$ 上也必然取真。

模态 S_5 上的假言推理 (Modus, Ponens) 规则

$$\text{MP: } \frac{\varphi \rightarrow \Psi, \varphi}{\Psi}$$

被解释为 Rough 集上的性质

$$\text{RMP: } |\varphi|, |\varphi \rightarrow \Psi| \\ \rightarrow |\varphi| \cap |\varphi \rightarrow \Psi| \subseteq |\Psi| \subseteq |\varphi \rightarrow \Psi|$$

意味着在可能世界 w 中, $\varphi \rightarrow \Psi$ 和 φ 均取真, 则在该 w 中 Ψ 也取真。因此, 有 $w \in |\varphi| \cap |\varphi \rightarrow \Psi| \rightarrow w \in |\Psi|$; 同样, 如果 Ψ 在 w 中取真, 则由隐含词 “ $\rightarrow$ ” 的定义, 无论 φ 在 w 上取真或取假, $|\varphi \rightarrow \Psi|$ 在 w 上都取真。故 $w \in |\Psi| \rightarrow w \in |\varphi \rightarrow \Psi|$ 。也就是 $(|\varphi| \cap |\varphi \rightarrow \Psi|) \subseteq |\Psi| \subseteq |\varphi \rightarrow \Psi|$ 。

5 概率理论的 Rough 集解释

设 $\Gamma = \{T, \perp, \dots, P, Q, \dots, \varphi, \Psi, \dots\}$ 是概率逻辑的公式集, U 是个体全域, 引用上述解释函数 $\| : \Gamma \rightarrow 2^U$. 即 $\forall \varphi \in \Gamma$, 有:

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \{w \in 2^U : u_w(\varphi) = T\}, \\ R' \cdot (|\varphi|) &= \{w \in 2^U : w \subseteq |\varphi| \wedge u_w(\varphi) = T\}, \\ R^* \cdot (|\varphi|) &= \{w \in 2^U : w \cap |\varphi| \neq \emptyset \wedge u_w(\varphi) = T\} \end{aligned}$$

其中 R' 是 2^U 上的可达关系, 称其为 φ 的影响范围 (Incidence)^[3]. 显然命题重言式的影响范围是全域, 矛盾命题的影响范围是空集. 公式 $\varphi \in \Gamma$ 的概率 (真值) 是概率函数 $p : \Gamma \rightarrow [0, 1]$, 即:

$$\forall \varphi \in \Gamma, p(\varphi) = K(|\varphi|) / K(U) \quad (12)$$

概率的下界和上界分别记成:

$$\begin{aligned} p_-(\varphi) &= K(R' \cdot (|\varphi|)) / K(U) \\ p_+(\varphi) &= K(R^* \cdot (|\varphi|)) / K(U) \end{aligned} \quad (13)$$

公式 Ψ 在条件公式 $\varphi \rightarrow \Psi$ 的条件概率的前提下, 是由另一公式 φ 的先验概率给出的. 即 $\forall \varphi, \Psi \in \Gamma$, 有:

$$p(\Psi|\varphi) = p(\varphi \wedge \Psi) / p(\varphi) \quad (14)$$

由式 (12) 可写成:

$$p(\Psi|\varphi) = K(|\varphi \wedge \Psi|) / K(|\varphi|) = K(|\varphi| \cap |\Psi|) / K(|\varphi|) \quad (15)$$

基于 Rough 集的决策规则可以带上 Rough 算子 $k^{[2,10]}$, 即 $\varphi \rightarrow k\Psi$, 其中 $k = K(\text{POS}_C(D)) / K(U)$, C 和 D 分别是条件属性和决策属性, $\text{POS}_C(D) = U_{x \in U, D} C(x)$, 被称做 C 关于 D 的划分 U/D 的正区域. 一般说来, 基于 Rough 集理论的决策规则是一种逻辑隐含式公式, 它是由基原子公式 (属性 a , 值 v) 简记为 (a, v) 和命题联结词 $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow$, 和 $\leftrightarrow$ 用通常方法组合而成. 显然在每一条决策规则中带的 Rough 算子 k 可直观地证明它就是一条件概率:

$$\begin{aligned} k &= p(\varphi|\Psi) = K(|\varphi| \cap |\Psi|) / K(|\varphi|) = \\ &= p(\varphi \wedge \Psi) / p(\varphi) \end{aligned} \quad (16)$$

k 的下界和上界分别是:

$$\begin{aligned} k_- &= K(C \cdot (|\varphi| \cap |\Psi|)) / K(U) \\ k_+ &= K(C^* \cdot (|\varphi| \cap |\Psi|)) / K(U) \end{aligned} \quad (17)$$

在概率逻辑下, MP 规则 $\frac{\varphi \rightarrow \Psi, \varphi}{\Psi}$ 被修改为

$$\frac{|\varphi \rightarrow \Psi|, |\varphi|}{R' \cdot (|\Psi|) \subseteq |\Psi| \subseteq R^* \cdot (|\Psi|)}$$

其概率: $\frac{p(\varphi \rightarrow \Psi) \cdot p(\varphi)}{p_-(\Psi) \leq p(\Psi) \leq p_+(\Psi)}$

已知条件: φ 的概率和决策规则 $\varphi \rightarrow \Psi$ 的概率, 由此可用如下公式来计算决策 Ψ 的概率:

$$p(\Psi) = \sum(p(\varphi) \cdot p(\varphi|\Psi)) = \sum(k \cdot p(\varphi)) = \sum(p(\varphi \wedge \Psi)) \quad (18)$$

其中 $\sum$ 被取作所有与相应决策 Ψ 有关的条件概率与 φ 的先验概率乘积之和, 所以式 (18) 被用来计算

决策 Ψ 在 S 中被满足时的概率.

结束语 本文所讨论的各种不精确理论受限于有限定义域, 因为 Rough 集理论的个体域被限定为非空、有限的, 对于无限域的情况, 本文暂未描述. 在当今计算机化的时代, 人们都在研究近似化和有限化. 因为现实世界绝对精确, 也就是古典逻辑中的绝对真或假束缚了经典逻辑在实际中的应用, 而且当前计算机只能接受和处理有限的数据和现象, 所以研究者们都在努力将连续数学离散化, 经典逻辑近似化. 各种不精确理论的先后提出, 而且正在不断地互相补充和互相完善, 这就说明了研究不精确性理论是实际需要, 而且是非常有意义的.

参考文献

- 1 刘清. 算子 Rough 逻辑及其归结原理. 计算机学机, 1998(5)
- 2 Pawlak Z. Reasoning about Data-A Rough Set Perspective, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1424, Springer Verlag, 1998(6): 25~34
- 3 Pawlak Z. Rough Sets. Theory, Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publisher, 1992
- 4 Lin T Y, et al. Logic System for Approximate Reasoning via Rough Sets and Topology, Lecture Notes in Artificial Intelligence 869, Springer-Verlag, 1994
- 5 Pawlak Z, Skowron A. Rough Membership Functions, [ICS Research Report 37/93], Institute of Computer Science, Warsaw University, Poland
- 6 Resconi G, et al. Interpretations of various uncertainty theories using models of modal logic: a summary, Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80: 7~14
- 7 Dubois D, Prade H. Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets. Intl. Conf. on Fuzzy Sets in Informatics Moscow, International Journal of General Systems, 1988
- 8 Busse J G. Dempster-Shafer Theory Interpretation of Rough Set Approach to Knowledge Acquisition under Uncertainty, Manuscript
- 9 Bundy A. Incidence Calculus: A Mechanism for Probabilistic Reasoning, Journal of Automated, 1985(1): 263~283
- 10 刘清, 王黔英. 基于 Rough 集的 Rough 数及 λ 算子的逻辑价值. 软件学报, 增刊 1996: 455~461
- 11 刘清. The OI-Resolution of Operator Rough Logic, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1424, Springer-Verlag, 1998
- 12 Yao Y Y, et al. Representation and Classification of Rough Set Models. In: Proc. of the 3rd Intl. Workshop on Rough Sets and Soft Computing, San Jose State University, CA, U. S. A., 1994: 630~637
- 13 Lin T Y, Liu Q. First Order Rough Logic: Approximate Reasoning via Rough Sets. Fundamenta Informaticae, 1996, 27(2): 137~153
- 14 Braun F, et al. Modal Logic: An Introduction, Published by the Press, Syndicate of the University of Cambridge, 1980